Czechoslovak Mathematical Journal

Petre C. Osmatescu

Близость на T_1-пространствах

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 19 (1969), No. 2, 193–207

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/100889`

CZECHOSLOVAK MATHEMATICAL JOURNAL
Mathematical Institute of Czechoslovak Academy of Sciences
V. *19(94)*, PRAHA 19. 6. 19 69, No 1

БЛИЗОСТЬ НА T_1-ПРОСТРАНСТВАХ

П. К. ОСМАТЕСКУ, Кишинев

(Поступило в редакцию 23/VIII 1966 г.)

В этой работе вводится близость на T_1-пространства аксиомами предложенными А. В. Архангельским, которые являются обобщением известных аксиом близости В. А. Ефремовича [2], а также исследуются взаимное отношение между близостями на пространстве X и его $\omega\alpha$-расширении.

Оказывается, что любое $\omega\alpha$-расширение T_1-пространства X порождает на X совместимое с ним δ-пространство (теор. 2, 3) и обратно, каждое δ-пространство совместимое с X порождает $\omega\alpha$-расширение пространства X, тем самым устанавливается взаимно однозначное соответствие между близостями совместимыми с T_1-пространством X и его $\omega\alpha$-расширениями (теор. 6).

В работе [1] П. С. Александров установил $\omega X = \beta X$ для нормальных пространств X, где ωX, βX соответственно Волмэновское и Чеховское расширения.

Результат установленный теор. 6 совпадает для нормальных пространств с известным результатом Ю. М. Смирнова ,,О взаимном однозначном соответствии между всеми близостями совместимыми с данным вполне регулярным пространством X и всеми его бикомпактными расширениями (теор. 10 [4]), потому что $\omega X = \beta X$.

Следуя В. А. Ефремовичу мы будем пространство близости определять так:

0.1. Определение 1. Множество P называется *пространством близости*, или *δ-пространством*, если для любых его двух подмножеств A и B определенно близки они или нет (в последнем случае будем говорить, что они далеки друг от друга). Если они близки, условимся писать $\delta(A, B) = 0$, если далеки $\delta(A, B) = 1$.

При этом должны выполняться следующие аксиомы:

i_1) $\delta(x, y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$.

i_2) $\delta(A, B) = \delta(B, A)$.

i_3) $\delta(A \cup B, C) = \min. \{\delta(A, C), \delta(B, C)\}$.

i_4) $\delta(P, \Lambda) = 1$ [1]).

[1]) Λ — пустое множество.

i_5) Если $\delta(A, B) = 1$, то найдется подмножество $C \subset P$ такое, что $A \subseteqq C$, $B \subseteqq P \setminus C$, $\delta(A, P \setminus C) = 1$ и если $\delta(D, B) = 0$, где D – произвольное подмножество P, то непременно существуют такие точки $x \in P \setminus C$ в отношении $\delta(D, x) = 0$ которые образуют множество близко к B.

Система аксиом (i_1, i_2, i_3, i_4, i_5) была предложена А. В. Архангельским, она отличается аксиомой i_5 от известной системы аксиом близости В. А. Ефремовича [2], [3]. Пятая аксиома В. А. Ефремовича гласит: для любых множеств А и B находящихся в отношении $\delta(A, B) = 1$ существуют множества C и D таких, что $C \cup D = P$, $\delta(A, C) = 1$, $\delta(B, D) = 1$.

Замечание 1. Если $A \subset B$, то для любого C имеет место $\delta(AC) \geqq \delta(B, C)$. В самом деле, в силу аксиомы i_3 имеем $\delta(B, C) = \delta(B \cup A, C) = \min\{\delta(A, C), \delta(B, C)\}$.

Значит: либо $\delta(A, C) = 0$, тогда $\delta(B, C) = 0$; либо $\delta(A, C) = 1$, значит или $\delta(B, C) = 0$ или $\delta(B, C) = 1$, следовательно $\delta(A, C) \geqq \delta(B, C)$.

Замечание 2. Если произвольные два множества $A \cap B \neq A$, то $\delta(A, B) = 0$. В самом деле из $x_0 \in A \cap B$, в силу аксиомы i_3 имеем

1. $\delta(x_0, A) = \delta(x_0, A \cup x_0) = \min.\{\delta(x_0, A), \delta(x_0, x_0)\} = 0$, ибо $\delta(x_0, x_0) = 0$.
2. $\delta(A, B) = \delta(A, B \cup x_0) = \min.\{\delta(A, x_0), \delta(A, B)\} = 0$, ибо $\delta(A, x_0) = 0$.

0.2. Подмножество $C \subset P$ удовлетворяющее условию $\delta(A, P \setminus C) = 1$ назовем δ-окрестностью множества A (и очевидно $A \subseteqq C$), для удобства в дальнейшем обозначим так $C \Supset A$.

0.3. Пусть P – пространство близости. Введем топологию в P так: замыкание [A] произвольного подмножества $A \subset P$ состоит из всех тех и только тех точек $x \in P$, которые близки к A. Определенная так операция замыкания удовлетворяет аксиомам топологического пространства.

1° $A \subseteqq [A]$.
2° $[A_1 \cup A_2] = [A_1] \cup [A_2]$.
3° $[[A]] = [A]$.
4° $[\Lambda] = \Lambda$.

В самом деле 1° очевидно, 2° имеет место в силу аксиомы i_3. Проверим аксиому 3°, для этого достаточно показать $[[A]] \subseteqq [A]$.

Пусть $x \in [[A]]$, тогда $\delta(x, [A]] = 0$, отсюда непременно $\delta(x, A) = 0$. Если бы это не так, т.е. выполнялось отношение $\delta(x, A) = 1$, то тогда согласно аксиомы i_5 существует окрестность C точки x такая, что $\delta(x, P \setminus C) = 1$ и $A \subseteqq P \setminus C$. Далее пусть $y \in [A]$, т.е. $\delta(y, A) = 0$, откуда в силу аксиомы i_5 точка $y \in P \setminus C$, а это означает $[A] \subseteqq P \setminus C$, но $\delta(x, P \setminus C) = 1$ следовательно согласно замечанию 1

$$\delta(x, [A]) \geqq \delta(x, P \setminus C) = 1 \quad \text{т.е.} \quad \delta(x, [A]) = 1$$

— противоречие. Полученное противоречием показывает, что из $\delta(x, [A]) = 0$ следует $\delta(x, A) = 0$, другими словами $x \in [A]$ тем самым проверено равенство $[[A]] = [A]$. Наконец 4° выполняется согласно аксиоме i_4. Тем самым проверено выполнение аксиом топологического пространства.

Определение 2. Множество A называется *δ-замкнутым*, если $A = [A]$. Множество G называется *δ-открытым*, если $G = P \setminus A$, где $A = [A]$.

Очевидно, в силу аксиомы i_1 так определенная топология удовлетворяет T_1-аксиоме делимости.

Лемма 1. *В δ-пространстве P для любых двух подмножеств A и B всегда $\delta(A, B) = \delta([A], [B])$.*

1. Если $\delta(A, B) = 1$, то $\delta([A], [B]) = 1$. В самом деле согласно i_5 найдем такое C, что $A \subseteqq C$, $B \subseteqq P \setminus C$, $\delta(A, P \setminus C) = 1$. Установим сначала $[A] \subseteqq C$. Пусть $x \in [A]$, тогда $\delta(x, A) = 0$. Из предположения, что $x \in P \setminus C$ в силу аксиомы i_3 выполняется отношение $\delta(x \cup (P \setminus C), A) = 0$ другими словами $\delta(A, P \setminus C) = 0$ мы придем к противоречию с $\delta(A, P \setminus C) = 1$, значит $x \in C$, следовательно $[A] \subseteqq C$. Далее в силу аксиомы i_5 имеем $\delta([A], B) = 1$. Аналогично устанавливается отношение $\delta([A], [B]) = 1$.

2. Если $\delta(A, B) = 0$ то $\delta([A], [B]) = 0$.

В самом деле согласно замечанию 1 имеем: $\delta(A, B) \geqq \delta([A], [B])$. Но $\delta(A, B) = 0$, следовательно $\delta([A], [B]) = 0$. Тем самым лемма доказана.

Лемма 2. *Для любой δ-окрестности C множества A существует открытая δ-окрестность $U \subseteq C$, $U \Supset A$.*

Действительно, пусть $C \Supset A$. Тогда, согласно лемме 1 $\delta(A, P \setminus C) = \delta(A, [P \setminus C]) = 1$. Значит, открытое множество $U = P \setminus [P \setminus C] \supset A$, причем $C \supseteqq U$. Так как $P \setminus U = P \setminus (P \setminus [P \setminus C]) = [P \setminus C]$, то $\delta(A, P \setminus U) = 1$.

Следовательно $U \Supset A$. Лемма доказана.

Замечание 3. Из аксиомы i_5 и леммы 2 следует, что если $\delta(A, B) = 1$, то найдется открытая δ-окрестность C множества A, такая, что любое δ-замкнутое множество $F \subset C$ далеко от B.

Предложение 1. *Если в δ-пространстве P произвольные множества H, A_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Находятся в отношении $\delta(A_i, H) = 1$ и открытые δ-окрестности $C_i \Supset A_i$ имеют свойства:* 1) $P \setminus C_i \supset H$, 2) *если произвольное замкнутое множество $F \subset C_i$ непременно $\delta(F, H) = 1$, тогда $\bigcup_{i=1}^{n} C_i$ является тоже δ--окрестностью множества $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ с такими же свойствами* 1) $P \setminus \bigcup_{i=1}^{n} C_i \supset H$, 2) *если произвольное замкнутое множество $F \subset \bigcup_{i=1}^{n} C_i$, то $\delta(F, H) = 1$.*

Докажем предложения для $n = 2$ (для $n > 2$ доказывается по индукции).

Возьмем в δ-пространстве P произвольные множества H, A_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$, находящиеся в отношении $\delta(A_i, H) = 1$, и открытые δ – окрестности $C_i \supseteq A_i$ такие, что 1. $P \setminus C_i \supset H$, 2. если произвольное замкнутое множество $F \subset C_i$, то $\delta(F, H) = 1$ (C_i имеются в силу замечания 3). Объедиенение $C_1 \cup C_2$, является δ-окрестностью множества $A_1 \cup A_2$. В самом деле, применяя аксиому i_3 и замечание 1, получаем

$$\delta(A_1 \cup A_2, P \setminus (C_1 \cup C_2)) = \delta(A_1 \cup A_2, (P \setminus C_1) \cap (P \setminus C_2)) =$$
$$= \min \{\delta(A_1, (P \setminus C_1) \cap (P \setminus C_2)), \delta(A_2, (P \setminus C_1) \cap (P \setminus C_2)) \geqq$$
$$\geqq \min \{\delta(A_1, P \setminus C_1), \delta(A_2, P \setminus C_2)\} = \min \{1, 1\} = 1 .$$

Итак

$$\delta(A_1 \cup A_2, P \setminus (C_1 \cup C_2)) = 1 .$$

Очевидно, что

$$P \setminus (C_1 \cup C_2) \supset H .$$

Произвольное замкнутое множество $F \subset C_1 \cup C_2 (F \subset P)$ находится в отношении $\delta(F, H) = 1$. Действительно, замкнутое множество $F_1 = F \setminus C_2$, если оно не пустое (если $F_1 = \Lambda$, то $F \subset C_2$, тогда $\delta(F, H) = 1$) лежит в δ-окрестности C_1 и согласно выше сказанного $\delta(F_1, H) = 1$. Множество $M = F \setminus F_1$, если оно не пустое (если $M = \Lambda$, $F = F_1 \subset C_1$ тогда $\delta(F, H) = 1$) лежит в C_2. Теперь из замкнутости F любая точка $x \in P \setminus F$ далека от F значит и от $M \subset F$. Поэтому близкие точки к M из $P \setminus C_2$ могут быть только из множества $F_1 \cap \cap [M] \subset F_1$, если оно не пустое (если $F_1 \cap [M] = \Lambda$, то $M = [M]$, тогда $\delta([M], H) = 1$). Но это множество далеко от H потому что $\delta(F_1, H) = 1$. Таким образом $\delta(M, H) = 1$ ибо C_2 удовлетворяет аксиоме i_5 относительно H. Следовательно применяя аксиому i_3, получаем $\delta(F, H) = \delta(F_1 \cup M, H) = \min \{\delta(F_1, H), \delta(M, H)\} = \min \{1, 1\} = 1$, т.е. $\delta(F, H) = 1$; тем самым предложение доказано.

Как известно δ-пространство P называется совместимым с топологическим пространством X, если они определены на одном и том же множестве и если топология δ-пространства P совпадает с топологией в X.

В этой работе исследуется семейство всех δ-пространств, совместимых с данным топологическим T_1-пространством X.

Сначала заметим, что аналогом предложения „Для всякого вполне регулярного пространства имеется по крайней мере одно совместимое с ним δ-пространство“ (теор. 2 [4]) имеем

Предложение 2. *Для любого T_1-пространства X имеется по крайней мере одно совместимое с ним δ-пространство.*

Определим близость в X так $A, B \subset X$ близки, если $[A] \cap [B] \neq \Lambda$. Проверим, что близость введенная таким образом удовлетворяет аксиомам близости $(i_1, i_2, i_3, i_4, i_5)$. Выполнение (i_1, i_2, i_3, i_4) очевидно. Проверим i_5. Пусть $[A] \cap \cap [B] = \Lambda$, т.е. $\delta(A, B) = 1$ положим $O[A] = X \setminus [B]$. Окрестность $O[A]$ множества $[A]$ удовлетворяет аксиоме i_5. В самом деле $[A] \cap (X \setminus O[A]) = = [A] \cap [B] = \Lambda$ отсюда по определению близости в X имеем $\delta(A, X \setminus O[A]) = = 1$. Далее пусть произвольное множество $D \subset X$ близко к B, значит $[D] \cap \cap (X \setminus O[A]) = [D] \cap [B] = R \neq \Lambda$, следовательно имеются точки в $X \setminus O[A]$ близки к D, множество которых близко к B. Тем самым аксиома i_5 проверена.

А для бикомпактных T_1 – пространств доказывается аналогично теореме 3 [3] В. А. Ефремовича.

Теорема 1. *Для любого T_1-бикомпактного пространства Φ имеется только одно совместимое с ним δ-пространство.*

Согласно предложению 2 в Φ имеется одно совместимое с ним δ-пространство. Покажем, что оно единственное, т.е. в любом δ-пространстве, совместимом с бикомпактным Φ, множества A, B далеки тогда и только тогда, когда $[A] \cap [B] = \Lambda$.

В самом деле, пусть в δ-пространстве совместимым с T_1-бикомпактным пространством Φ множества A, B далеки, тогда согласно лемме 1 $\delta(A, B) = = \delta([A], [B]) = 1$, следовательно в силу замечания 2 $[A] \cap [B] = \Lambda$.

Обратно. Пусть $[A] \cap [B] = \Lambda$, значит для любой точки $x \in [A]$ непременно $\delta(x, [B]) = 1$, откуда согласно замечанию 3 найдем открытую δ-окрестность Ux точки x такую, что $P \setminus Ux \supset [B]$, и как только произвольное замкнутое множество $F \subset Ux$, то $\delta(F, [B]) = 1$. Таким образом мы получаем покрытие $\{Ux\}$ бикомпактного множества $[A]$ из которого можно выделить конечное подпокрытие Ux_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Итак, одноточечные множества x_i, множество $[B]$ и окрестности Ux_i удовлетворяют условиям предложения 1. Таким образом в силу предложения 1 множество $[A] \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} Ux_i$ находится в отношении $\delta([A], [B]) = 1$, а в силу леммы 1 $\delta(A, B) = \delta([A], [B]) = 1$, теорема доказана.

Теорема 2. *Любое $\omega\alpha$-расширение $\omega\alpha X$ T_1-пространства X порождает на пространстве X близость совместимую с ним.*

Доказательство. В работе [5] доказано, что для каждого T_1-пространства X существует бикомпактное расширение $\omega\alpha X$ на котором, в силу теоремы 1, существует только одно совместимое с ним δ-пространство.

Теперь на пространстве X рассмотрим близость, которая индуцируется δ-пространством совместимым с $\omega\alpha X$, т.е. $A, B \subset X$ близки (далеки), если они близки (далеки) в δ-пространстве на $\omega\alpha X$, а именно, $[A]_{\omega\alpha X} \cap [B]_{\omega\alpha X} \neq \neq \Lambda([A]_{\omega\alpha X} \cap [B]_{\omega\alpha X} = \Lambda)$, тем самым мы получаем δ-пространство на X. Проверим, что введенная так близость на X удовлетворяет аксиомам $(i_1, i_2,$

i_3, i_4, i_5). Выполнение первых четырех аксиом очевидна. Проверим аксиому i_5. Пусть $A, B \subset X$ находятся в отношении $\delta(A, B) = 1$, тогда согнасно определению близости на X имеем $[A]_{\omega\alpha X} \cap [B]_{\omega\alpha X} = \Lambda$. Далее для $[A]_{\omega\alpha X}$ существует квазиоткрыто-замкнутая δ-окрестность C удовлетворяющая аксиоме i_5.

Действительно, из $[A]_{\omega\alpha X} \cap [B]_{\omega\alpha X} = \Lambda$ для каждой точки $x \in [A]_{\omega\alpha X}$ существует окрестность $Ox \cap [B]_{\omega\alpha X} = \Lambda$ совокупность которых $\{Ox\}$ покрывает $[A]_{\omega\alpha X}$. В силу теоремы 3 [5] в $\omega\alpha X$ для каждой открытой окрестности Ox существует квазиоткрыто-замкнутое множество $Wx \subset Ox$, такое, что $x \in \operatorname{int} Wx_i$. Значит семейство $\{\operatorname{int} Wx\}$ есть покрытие $[A]_{\omega\alpha X}$, из которого в силу бикомпактности $[A]_{\omega\alpha X}$ выделим конечное подпокрытие $\operatorname{int} Wx_1, \operatorname{int} Wx_2, \ldots, \operatorname{int} Wx_n$, следовательно конечное покрытие квазиоткрыто-замкнутых множеств $Wx_1, Wx_2, \ldots, Wx_n$. Итак по лемме 5 [5] $C = \bigcup_{i=1}^{n} Wx_i$ есть квазиоткрыто-замкнутое множество, которое к тому же является δ-окрестностью множества $[A]_{\omega\alpha X}$. В самом деле, из $[A]_{\omega\alpha X} \subset \bigcup_{i=1}^{n} \operatorname{int} Wx_i \subset \bigcup_{i=1}^{n} Wx_i$ имеем $[A]_{\omega\alpha X} \cap [\omega\alpha X \setminus \bigcup_{i=1}^{n} \operatorname{int} Wx_i]_{\omega\alpha X} = \Lambda$, ибо $\omega\alpha X \setminus \bigcup_{i=1}^{n} \operatorname{int} Wx_i = [\omega\alpha X \setminus \bigcup_{i=1}^{n} \operatorname{int} Wx_i]_{\omega\alpha X}$ а также $[\omega\alpha X \setminus \bigcup_{i=1}^{n} \operatorname{int} Wx_i]_{\omega\alpha X} \supset [\omega\alpha X \setminus \bigcup_{i=1}^{n} Wx_i]_{\omega\alpha X}$, что означает $[A]_{\omega\alpha X} \cap [\omega\alpha X \setminus \bigcup_{i=1}^{n} Wx_i]_{\omega\alpha X} = 1$. Таким образом $\delta([A]_{\omega\alpha X}, \omega\alpha X \setminus \bigcup_{i=1}^{n} Wx_i) = 1$, тем самым установлено, что C есть δ-окрестность множества $[A]_{\omega\alpha X}$.

δ-окрестность C удовлетворяет и аксиоме i_5 относительно $[B]_{\omega\alpha X}$.

Действительно, из конструкции Wx_i непременно $Wx_i \cap [B]_{\omega\alpha X} = \Lambda$, т.е. $\bigcup_{i=1}^{n} Wx_i \cap [B]_{\omega\alpha X} = \Lambda$, откуда $[B]_{\omega\alpha X} \subset \omega\alpha X \setminus \bigcup_{i=1}^{n} Wx_i$. Теперь, если произвольное множество $N \subset \omega\alpha X$ находится в отношении $\delta(N, [B]_{\omega\alpha X}) = 0$, то $[N]_{\omega\alpha X} \cap [B]_{\omega\alpha X} = M \neq \Lambda$, другими словами точки $x \in M$ близки к N, а согласно замечанию 2 $\delta(M, [B]_{\omega\alpha X}) = 0$, к тому же $M \subset [B]_{\omega\alpha X} \subset \omega\alpha X \setminus C$, тем самым аксиома i_5 проверена для C относительно $[B]_{\omega\alpha X}$.

Далее по определению 4 [5] множество $C \cap X = G$ открыто.

Множество $G \supset A$ является δ-окрестностью множества A удовлетворяющая аксиоме i_5 относительно B.

Действительно, из $\omega\alpha X \setminus C \supset X \setminus G$ и $[A]_{\omega\alpha X} \cap [\omega\alpha X \setminus C]_{\omega\alpha X} = \Lambda$ (это было выше установлено) следует $\delta(A, X \setminus G) = 1$, заметим еще, что $B \subset X \setminus G$, ибо $[B]_{\omega\alpha X} \subset \omega\alpha X \setminus C$. Теперь пусть произвольное множество $D \subset X$ находится в отношении $\delta(D, B) = 0$, значит $[D]_{\omega\alpha X} \cap [B]_{\omega\alpha X} \neq \Lambda$. Случай $[D]_X \subset G$ исключен так как в силу квазиоткрыто-замкнутости $C \supset [D]_{\omega\alpha X}$, влечет $[D]_{\omega\alpha X} \cap [B]_{\omega\alpha X} = \Lambda$, что противоречит $\delta(D, B) = 0$. Следовательно, всегда $[D]_X \cap (X \setminus G) = K \neq \Lambda$, т.е. $K \subset X \setminus G$. Покажем, что $\delta(K, B) = 0$, другими словами $[K]_{\omega\alpha X} \cap [B]_{\omega\alpha X} \neq \Lambda$. Предположим противное, т.е. $[K]_{\omega\alpha X} \cap [B]_{\omega\alpha X} = \Lambda$, тогда (как было выше показано), существует такая квазиоткрыто-замкнутая δ-окрестность $E \supset [K]_{\omega\alpha X}$, которая удовлетворяет аксиоме i_5 относительно $[B]_{\omega\alpha X}$, и $E \cap X = G_E \supset K$. По лемме 5 [5] $C \cup E$ является квазиоткрыто-замкнутое множество. $(C \cup E) \cap X = G \cup G_E$ — открытое, а согласно квазиоткрыто-замкнутости (определение 4 [5]) для любого замкнутого множества $H \subset G \cup G_E$ $(H \subset X)$ имеем $[H]_{\omega\alpha X} \subset C \cup E$. Учитывая только, что сказанное и $[D]_X = K \cup ([D]_X \cap G) \subset G \cup G_E$, то $[D]_{\omega\alpha X} \subset C \cup E$ отсюда и из $(E \cup C) \cap [B]_{\omega\alpha X} = \Lambda$ имеем $[D]_{\omega\alpha X} \cap [B]_{\omega\alpha X} = \Lambda$, т.е. $\delta(D, B) = 1$. Полученное противоречие утверждает, что $\delta(K, B) = 0$. Тем самым аксиома i_5 проверена. Таким образом, мы полностью проверили аксиомы $(i_1, i_2, i_3, i_4, i_5)$ для близости индуцированной в пространстве X; теорема доказана.

Теорема 3. *Два различных $\omega\alpha$-расширения T_1-пространства X индуцируют две различные близости на пространстве X.*

Доказательство. Пусть b_1X, b_2X два различных $\omega\alpha$-расширения пространства X. По теореме 2 бикомпактные расширения b_1X, b_2X индуцируют δ-пространства P_1, P_2 на пространстве X. Пространства $P_1 \neq P_2$. Действительно согласно внешнего критерия $\omega\alpha$-расширения (теор. 2 [5]) b_1X, b_2X являются непрерывными внешними разбиениями волмэновского (Wallman) расширения ωX пространства X. Так как $b_1X \neq b_2X$, то по крайней мере существуют два элемента разбиения, двух различных непрерывных внешних разбиений, $A_1, A_2 \subset \omega X \setminus X$ таких, что $A_1 \cap A_2 \neq \Lambda$, $A_1 \neq A_2$, и соответствующие точки $(A_1) \in b_1X$, $(A_2) \in b_2X$ [2]). Далее пусть $\xi_1 \in A_1 \cap A_2$, $\xi_2 \in A_2 \setminus A_1$, к тому же учитывая, что каждая точка ωX попадает в некоторый элемент непрерывного разбиения, то непременно $\xi_2 \in B$ — элемент принадлежащий тому же непрерывному внешнему разбиению, что и A_1, т.е. $(B) \in b_1X$.

Теперь для точек $\xi_1, \xi_2 \in \omega X$, являющихся ультрафильтрами из замкнутых множеств $\xi_1 = \{H^{(1)}\}$, $\xi_2 = \{H^{(2)}\}$ пространства X, согласно лемме 2 [6] имеем

$$\bigcap_{H^{(1)} \in \xi_1} [H^{(1)}]_{b_2X} = (A_2), \quad \bigcap_{H^{(2)} \in \xi_2} [H^{(2)}]_{b_2X} = (A_2)$$

значит для любых пар множеств $H^{(1)} \in \xi_1$, $H^{(2)} \in \xi_2$ точка $(A) \in [H^{(1)}]_{b_2X} \cap [H^{(2)}]_{b_2X} \neq \Lambda$, что означает в δ-пространстве P_2 $\delta(H^{(1)}, H^{(2)}) = 0$.

Тем не менее, не все пары множеств $H^{(1)} \in \xi_1, H^{(2)} \in \xi_2$ близки в δ-пространстве P_1, т.е. $P_1 \neq P_2$.

В самом деле, применяя снова лемму 2 [6] в пространстве b_1X получаем $\bigcap_{H^{(1)} \in \xi_1} [H^{(1)}]_{b_1X} = (A_1)$, $\bigcap_{H^{(2)} \in \xi_2} [H^{(2)}]_{b_1X} = (B)$. Отсюда, учитывая $(A_1) \neq (B)$, следует существование множества $H_1^{(1)} \in \xi_1$, которое $[H_1^{(1)}]_{b_1X} \not\ni (B)$. Заметим еще что имеется множество $H_1^{(2)} \in \xi_2$ такое, что $[H_1^{(1)}]_{b_1X} \cap [H_1^{(2)}]_{b_1X} = \Lambda$, в противном случае $[H_1^{(1)}]_{b_1X} \cap [H^{(2)}]_{b_1X} \neq \Lambda$ для всех $H^{(2)} \in \xi_2$. Значит семейство

[2]) *A — элемент непрерывного разбиения, (A) — точка пространства непрерывного разбиения.*

$\{[H^{(2)}]_{b_1X}\}$ вместе с $[H_1^{(1)}]_{b_1X}$ образует центрированную систему замкнутых множеств в бикомпакте b_1X которая в силу (B') стр. 383 [7] $[H_1^{(1)}]_{b_1X} \cap \cap (\bigcap_{H^{(2)}\in\xi_2} [H^{(2)}]_{b_1X}) \neq \Lambda$, т.е. $(B) \in [H_1^{(1)}]_{b_1X}$ – противоречие. Итак существование $H_1^{(2)} \in \xi_2$ установлено. Далее, учитывая $[H_1^{(1)}]_{b_1X} \cap [H_1^{(2)}]_{b_1X} = \Lambda$, в δ-пространстве P_1 имеем $\delta(H_1^{(1)}, H_1^{(2)}) = 1$. Таким образом, мы установили в δ-пространстве P_2 $\delta(H_1^{(1)}, H_1^{(2)}) = 0$ ибо $[H_1^{(1)}]_{b_2X} \cap [H_1^{(2)}]_{b_2X} \neq \Lambda$, а в δ-пространстве P_1 $\delta(H_1^{(1)}, H_1^{(2)}) = 1$ ибо $[H_1^{(1)}]_{b_1X} \cap [H_1^{(2)}]_{b_1X} = \Lambda$. Следовательно, $P_1 \neq P_2$, теорема доказана.

РАСШИРЕНИЯ δ-ПРОСТРАНСТВ

Сейчас для данного δ-пространства P совместимого с T_1 топологическим пространством X, мы построим uP – являющееся $\omega\alpha$-расширением пространства X.

Если δ-пространство P совместимо с T_1 топологическим пространством X, то замкнутое множество $F \subset X$ совпадает с δ-замкнутым множеством $F \subset P$.

Поэтому не будем различать замкнутость от δ-замкнутости. Множество всех ультрафильтров $\xi = \{F_\alpha\}$ из замкнутых множеств $F \subset P$ обозначим через πP.

Определение 3. Ультрафильтры $\xi_1, \xi_2 \in \pi P$ называются *эквивалентными*, если любые множества из ξ_1 близки к любому множеству из ξ_2. Эквивалентные ультрафильтры обозначим $\xi_1 \sim \xi_2$.

Эквивалентность ультрафильтров является отношением эквивалентности, т.е. обладают свойствами:

1. Рефлексивностью $\xi \sim \xi$.
2. Симметричностью, если $\xi_1 \sim \xi_2$, то $\xi_2 \sim \xi_1$.
3. Транзитивностью, если $\xi_1 \sim \xi_2$ и $\xi_2 \sim \xi_3$, то $\xi_1 \sim \xi_3$.

Первые два свойства очевидны, проверим третье. $\xi_1 \sim \xi_3$, так как в противном случае существуют множества $F_1 \in \xi_1$, $F_3 \in \xi_3$ в отношении $\delta(F_1, F_3) = 1$. Далее согласно замечанию 3 найдется открытое множество $G \supset F_1$ такое, что $P \setminus G \supset F_3$, $\delta(F_1, P \setminus G) = 1$ и если произвольное замкнутое множество $H \subset G$ то $\delta(H, F_3) = 1$. Множество $P \setminus G \,\bar{\in}\, \xi_2$ ибо $\xi_1 \sim \xi_2$ значит в ξ_2 есть множество F_2 которое $F_2 \cap (P \setminus G) = \Lambda$ отсюда $F_2 \subset G$, значит $\delta(F_2, F_3) = 1$, т.е. ξ_2 не эквивалентно ξ_3.

Заметим еще, что ультрафильтр ξ содержащий точку $x \in P$ эквивалентен только себе, ибо если $\xi \neq \xi'$, то найдется $F' \in \xi'$, которое $F' \,\bar{\in}\, \xi$, т.е. $x \,\bar{\in}\, F'$, что означает $\delta(x, F') = 1$, потому что F' замкнуто, значит ξ не эквивалентен ξ'.

Таким образом отношение эквивалентности разбивает πP на непересекающиеся классы эквивалентности состоящие из эквивалентных ультрафильтров. Из этого факта следует, что любые два замкнутые множества, входящие в ультрафильтры одного класса эквивалентности непременно близки, но два замкнутые множества входящие в ультрафильтры разных классов эквивалентности могут быть далекими. В построении uP используются некоторые идеи из работы [8].

Определение 4. Систему замкнутых множеств $F \subset P$ назовем *δ-системой,* когда:

1. В нее входят множества одного ультрафильтра $\xi \in \pi P$.
2. Любые ее два множества близки.
3. Если в систему входит $F_1 \cup F_2$, то в нее входит F_1 либо F_2.

Легко проверить, что в частичном упорядочном множестве (отношение порядка $\subset$) всех δ-систем выполняются условия леммы Цорна (9), поэтому любая δ-система содержится в некоторой максимальной δ-системе.

Теперь, так как каждая δ-система содержит один ультрафильтр πP, который содержится в некотором классе эквивалентности, то в каждой максимальной δ-системе содержится только один класс эквивалентности, к тому же максимальная δ-система содержащая класс эквивалентности состоящей из одного ультрафильтра совпадает с ним.

Пространство uP. Точками пространства uP будем считать максимальные δ-системы, обозначаемые (A), где A – множество замкнутых множеств $F \subset P$ составляющих максимальную δ-систему. Для удобства множества $F \in A$ назовем координатами точки (A).

Определение 5. $[F]_{uP} = \{(A); F \in A\}$ – совокупность всех максимальных δ-систем содержащих F.

Лемма 3. *Для любых замкнутых в P множеств F и F' имеем* $[F \cup F']_{uP} = [F]_{uP} \cup [F']_{uP}$.

Если $(A) \in [F \cup F']_{uP}$, то согласно определению 5 $F \cup F' \in A$, так как A – максимальная δ-система, либо $F \in A$ (условие 3, определение 4), значит $(A) \in [F]_{uP}$, либо $(A) \in [F']_{uP}$, т.е. $(A) \in [F]_{uP} \cup [F']_{uP}$. Если $(A) \in [F]_{uP} \cup [F']_{uP}$, для определенности пусть $(A) \in [F]_{uP}$, тогда по определению 5 $F \in A$ а в силу замечания 1 $F \cup F' \in A$, т.е. $(A) \in [F \cup F']_{uP}$.

Определяем на uP топологию, взяв семейство всех множеств $[F]_{uP}$ в качестве замкнутого базиса (это возможно в силу леммы 3). Каждую точку $x \in P$ отождествляем с той максимальной δ-системой, которая содержит x. Таким образом $P \subset uP$. Дополнения $C[F]_{uP} = uP \setminus [F]_{uP}$ образуют открытый базис пространства uP.

Лемма 4. *Пространство uP является T_1-расширением топологического пространства X совместимого с P и каждый ультрафильтр $\xi \in \pi P$ содержится только в одной максимальной δ-системе A.*

1. uP — T_1-пространство. Покажем, что одноточечное множество uP замкнуто. Пусть $(A) \in uP$, точка $(A) \in \bigcap_{F \in A} (F)_{uP}$, ибо по определению 5 $(A) \in [F]_{uP}$, если $F \in A$. В этом пересечении нет других точек uP. Действительно, если $(A') \in \bigcap_{F \in A} [F]_{uP}$, то $(A') \in [F]_{uP}$ для всех, $F \in A$, которые по определению 5 $F \in A'$, тогда $A \subset A'$, т.е. $(A) = (A')$, ибо A — максимальная δ-система.

2. P есть подпространство uP, потому что пересечение с P всех базисных замкнутых множеств пространства uP образуют базис P, ибо в силу определения 5 $[F]_{uP} \cap P = F$.

3. P плотно в uP, потому что все его замкнутые множества лежат в нем, т.е. $F \subset P$ и поэтому P входит во все максимальные δ-системы, иначе говоря, для любой точки $(A) \in uP$ имеем $P \in A$, значит $(A) \in [P]_{uP}$, следовательно $[P]_{uP} = uP$.

4. Каждый ультрафильтр $\xi \in \pi P$ содержится только в одной максимальной δ-системе. Действительно, из определения точки $(A) \in uP$ в A содержится некоторый ультрафильтр $\xi \in \pi P$. Таким образом $(A) \in \bigcap_{F \in \xi} [F]_{uP}$, ибо каждое $F \in \xi \subset$ $\subset A$. Теперь пусть $(A) \neq (A')$, тогда найдутся нножества $F \in A$ и $F' \in A'$ в отношении $\delta(F, F') = 1$, отсюда согласно замечанию 3 существует открытое множество $G \supset F$ такое, что $P \setminus G \supset F'$, $\delta(F, P \setminus G) = 1$ (т.е. $P \setminus G \mathrel{\overline{\in}} A$) и как только замкнутое множество $H \subset G$, то $\delta(H, F) = 1$. Из последнего отношения следует существование некоторого множества $F_1 \in \xi$ лежащее в G, ибо в противном случае все множества из ξ пересекались бы с $P \setminus G$ и поэтому $P \setminus G \in \xi \subset A$, что исключено. Итак $F_1 \subset G$, значит $\delta(F_1, F') = 1$, следовательно $[F_1]_{uP} \cap$ $\cap [F']_{uP} = \Lambda$. Отсюда имеем $(A') \mathrel{\overline{\in}} [F_1]_{uP}$, ибо $(A') \in [F']_{uP}$, другими словами $\bigcap_{F \in \xi} [F]_{uP} = (A)$. Таким образом каждый ультрафильтр $\xi \in \pi P$, тем более каждый класс эквивалентности, содержится только в одной максимальной δ-системе.

Лемма 5. *uP является естественным образом ωX.*[3])

Определяем отображение $\varphi : \omega X \to uP$ так: $\xi \in \omega X$, $\varphi\xi = (A)$, если $\xi \subset A$. По определению 4 в каждой максимальной δ-системе A точки $(A) \in uP$ содержится ультрафильтр $\xi \in \omega X$ (как множество совокупности всех ультрафильтров ωX совпадает с множеством πP), к тому же по лемме 4 любой ультрафильтр $\xi \in \omega X$ содержится только в одной максимальной δ-системе, значит φ отображает ωX на uP. Если $(A) \in P$, то A состоит лишь из одного ультрафильтра $\xi \in \omega X$, т.е. $\xi = A$ значит $\varphi^{-1}(A) = \xi$, другими словами точки пространства X при отображении φ остаются неподвижными. φ — непрерывно. Действительно, пусть $\xi_0 \in \omega X$, $\varphi\xi_0 = (A_0)$, $\xi_0 \subset A_0$, $O(A_0)$ — произвольная окрестность точки $(A_0) \in uP$. Так как семейство $\{C[F]_{uP}\}$ образует открытый базис, то непременно $(A_0) \in C[F]_{uP} \subset O(A_0)$, что означает в силу определения 5 $F \mathrel{\overline{\in}} A_0$, т.е. имеется

[3]) Отображение $\varphi : \omega X \to uP$ — естественное, если φ оставляет неподвижными точки X и непрерывно.

$F_0 \in A_0$ в отношении $\delta(F_0, F) = 1$. Из этого отношения учитывая замечания 3, найдем открытое множество $G_0 \supset F_0$ такое что $P \setminus G_0 \supset F$, $\delta(F_0, P \setminus G_0) = 1$ (т.е. $P \setminus G_0 \bar{\in} A_0$) и как только замкнутое множество $H \subset G_0 (H \subset P)$ то $\delta(H, F) = 1$. Отсюда следует, что некоторое множество $H_0 \in \xi_0$ лежит в G_0, ибо в противном случае все множества из ξ_0 пересекались бы с $P \setminus G_0$ и поэтому $P \setminus G_0 \in \xi_0 \subset A_0$, что исключено.

Итак окрестность $O\xi_0 = O\langle G_0 \rangle = \{\xi; F \in \xi, F \subset G_0\}$ отображается в $O(A_0)$. В самом деле, если $\xi \in O\xi_0$, то из определения $O\xi_0$ найдется $H \in \xi$ лежащее в G_0, значит $\delta(H, F) = 1$, что означает $[H]_{uP} \cap [F]_{uP} = \Lambda$. Отсюда точка $\varphi\xi = (A) \in [H]_{uP} \subset C[F]_{uP} \subset O(A_0)$, т.е. $\varphi\xi \in O(A_0)$. Тем самым непрерывность φ — установлена, и за одно бикомпактность uP — как непрерывный образ ωX.

Лемма 6. *В uP для произвольного замкнутого множества $H_0 \subset P$ и точки $(A_0) \in [A_0]_{uP}$ найдется центрированная система замкнутых множеств пространства P такая, что $H_0 \in \{H_\alpha\}$ и $\bigcap\limits_\alpha [H_\alpha]_{uP} = (A_0)$.*

Доказательство. Пусть $(A_0) \in [H_0]_{uP}$, где H_0 — произвольное замкнутое множество P. Если точка $(A_0) \in P$, тогда согласно ее определению A_0 является ультрафильтром, поэтому $H_0 \in A_0$ и $\bigcap\limits_\alpha [H_\alpha]_{uP} = (A_0)$.

Если же точка $(A_0) \in uP \setminus P$, то сначала покажем, что для любой конечной системы точек $(A_i)_{i=1,2,\ldots,n}$ из $uP \setminus (A_0)$ существуют окрестности $W(A_i)_{i=1,2,\ldots,n}$ такие, что как только $F \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} W(A_i)$, то $[F]_{uP} \subset uP \setminus (A_0)$.

Действительно, пусть точки $(A_i)_{i=1,2,\ldots,n}$ принадлежат $uP \setminus (A_0)$, тогда в силу определения 4 $A_i \supset \xi_i$, $A_0 \supset \xi_0$, где ξ_0, ξ_i — ультрафильтры πP, а также из различия точек $(A_i) \neq (A_0)$ найдутся $F_{0i} \in \xi_0$ и $F_i \in \xi_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ в отношении $\delta(F_i, F_{0i}) = 1$.

Теперь, согласно замечанию 3 существует открытое множество $G_{0i} \supset F_i$, $P \setminus G_{0i} \supset F_{0i}$, $\delta(F_i, P \setminus G_{0i}) = 1$ выполняющее условия замечания 3. Далее пересечение $\bigcap\limits_{i=1}^{n} F_{0i} = F_0 \neq \Lambda$, к тому же $F_0 \in \xi_0$, ибо ξ_0 — ультрафильтр. Отсюда, учитывая аксиому i_3 и замечание 1, мы получаем $\delta(\bigcup\limits_{i=1}^{n} F_i, F_0) = 1$.

Снова применяя замечание 3 найдем открытое множество $G_0 \supset \bigcup\limits_{i=1}^{n} F_i$ такое, что $P \setminus G_0 \supset F_0$, $\delta(\bigcup\limits_{i=1}^{n} F_i, P \setminus G_0) = 1$, и как только произвольное замкнутое множество $H \subset G_0 (H \subset P)$, то $\delta(H, F_0) = 1$, к тому же, тем более $\delta(F_i, P \setminus G_0) = 1$. Далее из установленных отношений $\delta(F_i, P \setminus G_0) = 1$, $\delta(F_i, P \setminus G_{0i}) = 1$ и аксиомы i_3 вытекает отношение $\delta(F_i, P \setminus (G_{0i} \cap G_0)) = \delta(F_i, (P \setminus G_{0i}) \cup \cap (P \setminus G_0)) = 1$, т.е. $\delta(F_i, P \setminus G_i) = 1$ где $G_i = G_{0i} \cap G_0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Открытые множества $W(A_i) = uP \setminus [P \setminus G_i]_{uP} = C[P \setminus G_i]_{uP}$ $(C[P \setminus G_i]_{uP} \cap P = G_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ суть искомые окрестности, ибо $(A_i) \in [F_i]_{uP} \subset C[P \setminus G_i]_{uP}$

($[F_i]_{uP} \cap [P \setminus G_i]_{uP} = \Lambda$), потому что $\delta(F_i, P \setminus G_i) = 1$, а также если произвольное замкнутое множество $H \subset \bigcup_{i=1}^{n} W(A_i)$ ($H \subset P$), т.е. $H \subset \bigcup_{i=1}^{n} G_i \subset G_0$, тогда $[H]_{uP} \subset C[F_0]_{uP} \subset uP \setminus (A_0)$ ибо $\delta(H, F_0) = 1$ и $(A_0) \in [F_0]_{uP}$.

Теперь рассмотрим систему множеств $\xi_{(A_0)} = \{(uP \setminus \bigcup_{i=1}^{n} W(A_i)) \cap P\}$ по произвольным конечным системам точек из $uP \setminus (A_0)$. Множества системы $\xi_{(A_0)}$ непустые, ибо в противном случае $(uP \setminus \bigcup_{i=1}^{n} W(A_i)) \cap P = \Lambda$, т.е. $\bigcup_{i=1}^{n} W(A_i) \supset P$, а согласно свойствам окрестностей $W(A_i)_{i=1,2,\dots,n}$ $(A_0) \in uP = [P]_{uP} \subset uP \setminus (A_0)$, что исключено, итак $(uP \setminus \bigcup W(A_i)) \cap P \neq \Lambda$. Окрестности $W(A_i)$ определены так, чтобы $P \cap W(A_i)$ были открыты в P следовательно $(uP \setminus \bigcup_{i=1}^{n} W(A_i)) \cap P = H_\alpha$ замкнуты в P, значит множество системы $\xi_{(A_0)}$ замкнуто в P. Система $\xi_{(A_0)}$ — — центрированная, ибо для произвольных H_α и $H_{\alpha'}$ имеем

$$H_\alpha \cap H_{\alpha'} = ((uP \setminus \bigcup_{i=1}^{n} W(A_i)) \cap P) \cap ((uP \setminus \bigcup_{j=1}^{m} W(A_j')) \cap P) =$$

$$((\bigcap_{i=1}^{n} (uP \setminus W(A_i))) \cap (\bigcap_{j=1}^{m} (uP \setminus W(A_j')))) \cap P =$$

$$= (\bigcap_{k=1}^{m+n} (uP \setminus W(A_k''))) \cap P = (uP \setminus \bigcup_{k=1}^{m+n} W(A_k'')) \cap P = H_{\alpha''} \neq \Lambda$$

где система точек $(A_1''), (A_2''), \dots, (A_{m+n}'')$ совпадает с системой $(A_1), (A_2), \dots$ $\dots, (A_n), (A_1'), (A_2'), \dots, (A_m')$. Множество $H_{\alpha''}$ имеет одинаковую конструкцию с H_α и $H_{\alpha'}$, значит $H_{\alpha''} \in \xi_{(A_0)}$. По лемме 4 uP — бикомпактно, поэтому $\bigcap_{H_\alpha \in \xi(A_0)} [H_\alpha]_{uP} \neq \Lambda$, к тому же ни одна точка $(A) \in uP \setminus (A_0)$ не принадлежит этому пересечению, следовательно $\bigcap_{H_\alpha \in \xi(A_0)} [H_\alpha]_{uP} = (A_0)$. Теперь присоединяя H_0 к $\xi_{(A_0)}$ не нарушаем центрированность, ибо в противном случае система $\xi'_{(A_0)} = \xi_{(A_0)} \cup \{H_0\}$ не была бы центрированной, тогда нашлось $H_\alpha \in \xi_{(A_0)}$ такое, что $H_\alpha \cap H_0 = \Lambda$. Далее из конструкции $H_\alpha = (uP \setminus \bigcup_{i=1}^{k} W(A_i)) \cap P$, вытекает $H_0 \subset \bigcup_{i=1}^{k} W(A_i)$, следовательно $(A_0) \in [H_0]_{uP} \subset uP \setminus (A_0)$, что исключено. Таким образом система $\xi'_{(A_0)}$ — центрирована. Лемма доказана.

З а м е ч а н и е 4. Отрадно заметить, что если замкнутое множество $H_0 \in A$, то по лемме 6 существует центрированная система замкнутых множеств $\{H_\alpha\} \ni H_0$ такая что, $\bigcap_{\alpha} [H_\alpha]_{uP} = (A)$. Дополняя эту систему до ультрафильтра $\xi \in \pi P$, по прежнему $\bigcap_{H \in \xi} [H]_{uP} = (A)$, ибо $\bigcap_{H \in \xi} [H]_{uP} \subset \bigcap_{\alpha} [H_\alpha]_{uP}$. Другими словами множество H_0 не только входит в A, но входит в некоторый ультрафильтр $\xi \subset A$, а это означает совпадение A с ситемой множеств входящих в ультрафильтры класса эквивалентности содержащегося в A, короче A совпадает с классом эквивалентности, который входит в A.

Теорема 4. *Для выполнения отношения $\delta(M, N) = 0$, где M, N — произвольные множества P, необходимо и достаточно чтобы $[M]_{uP} \cap [N]_{uP} \neq \Lambda$.*

Доказательство. Необходимости. Предположим противное, т.е. что произвольные множества $M, N \subset P$ находятся в отношении $\delta(M, N) = 0$ и тем не менее $[M]_{uP} \cap [N]_{uP} = \Lambda$, тогда $[M]_{uP} \subset C[N]_{uP}$.

Теперь для каждой точки $(A) \in [M]_{uP} \subset C[N]_{uP}$ в силу определения 5 $[N]_P \bar{\in} A$, поэтому имеется $F \in A$ в отношении $\delta(F, [N]_P) = 1$. Из этого отношения применяя замечание 3 найдем открытое множество $G \supset F$, такое что $P \setminus G \supset [N]_P$, $\delta(F, P \setminus G) = 1$ и как только произвольное замкнутое множество $H \subset G\,(H \subset P)$, то $\delta(H, [N]_P) = 1$. Отношение $\delta(F, P \setminus G) = 1$ влечет $[F]_{uP} \cap [P \setminus G]_{uP} = \Lambda$ а отсюда вытекает, что окрестность $W(A) = uP \setminus [P \setminus G]_{uP} \supset [F]_{uP} \ni (A)$ точки (A) не пересекается с $[N]_{uP}$, ибо $[P \setminus G]_{uP} \supset [N]_{uP}$.

Таким образом, мы получаем покрытие $\{W(A)\}$ множества $[M]_{uP}$, из которого в силу бикомпактности $[M]_{uP} \subset uP$ (лемма 5) можем выделить конечное подпокрытие $W(A_1), W(A_2), \ldots, W(A_s)$. В силу конструкции окрестности $W(A_i)$ точки (A_i) существует множество $F_i \in A_i$ такое, что $F_i \subset W(A_i) \cap P = G_i$ и $\delta(F_i, P \setminus G_i) = 1$, причем для любого замкнутого множества $H \subset G_i$ выполняестя отношение $\delta(H, [N]_P) = 1$.

Итак открытые множества G_i выполняют условия предложения 1, значит $\bigcup_{i=1}^{s} G_i$ является открытая δ-окрестность множества $\bigcup_{i=1}^{s} F_i$ удовлетворяющая замечанию 3, к тому же множество $[M]_{uP} \subset \bigcup_{i=1}^{s} W(A_i)$, отсюда $[M]_P \subset \bigcup_{i=1}^{s} G_i$, т.е. $\delta([M]_P, [N]_P) = 1$, значит $\delta(M, N) = 1$ ибо по лемме 1 $\delta(M, N) = \delta([M]_P, [N]_P)$. Полученное противоречие доказывает $[M]_{uP} \cap [N]_{uP} \neq \Lambda$.

Достаточность. Если для произвольных множеств $M, N \subset P$ $[M]_{uP} \cap [N]_{uP} \neq \Lambda$ то по лемме 1 $\delta(M, N) = \delta([M]_P, [N]_P) = 0$, ибо для произвольных точек (A) из этого пересечения $[M]_P, [N]_P \in A$. Теорема доказана.

Теорема 5. *uP является $\omega\alpha$-расширением T_1-пространства X совместимого с P.*

Доказательство. Согласно лемме 5 uP — непрерывный образ ωX. Докажем замкнутость естественного отображения $\varphi : \omega X \to uP$. В ωX любое замкнутое множество $Q = \bigcap_{\alpha}[F_\alpha]_{\omega X}$, где $\{F_\alpha\}$ центрированная система замкнутых множеств $F_\alpha \subset X$. Образ $\varphi Q = \bigcap_{\alpha}[F_\alpha]_{uP}$. Действительно, если $\xi \in Q = \bigcap_{\alpha}[F_\alpha]_{\omega X}$, то $\{F_\alpha\} \subset \xi$, кроме того $\varphi\xi = (A)$, $\{F_\alpha\} \subset \xi \subset A$, таким образом по определению 5 $(A) \in \bigcap_{\alpha}[F_\alpha]_{uP}$.

Теперь если $(A) \in \bigcap_{\alpha}[F_\alpha]_{uP}$ тогда центрированная система $\{F_\alpha\} \subset A$, согласно 4-го замечания, входит в некоторый ультрафильтр $\xi \subset A$, поэтому $\xi \in \bigcap_{\alpha}[F_\alpha]_{\omega X} = Q$, следовательно $(A) = \varphi\xi \in \varphi Q$. uP — $\omega\alpha$-расширением, ибо из замкнутости φ согласно теореме 12 [9] uP — непрерывное разбиение (внешнее в силу его конструкции), т.е. uP удовлетворяет условиям внешнего критерия $\omega\alpha$-расширения (теорема 2 [5].)

Другое доказательство теоремы 5. Согласно определениям 1, 2 [5] uP — $\omega\alpha$-расширением, ибо uP — непрерывный образ ωX и несжимаемый. Покажем несжимаемость uP. Пусть произвольное замкнутое множество $H \subset P$ и произвольное подпространство $\Phi \subset uP$ удовлетворяют условию $[H]_{uP} \supset \Phi \supset H(\Phi \neq [H]_{uP})$. Φ — небикомпактно потому, что для точки $(A) \in [H]_{uP} \setminus \Phi$ по лемме 6 имеется центрированная система $\{H_\alpha\}$ замкнутых множеств $H_\alpha \subset P$, что $H \in \{H_\alpha\}$ и $\bigcap_{\alpha}[H_\alpha]_{uP} = (A)$, но $\bigcap_{\alpha}[H_\alpha]_\Phi = \Lambda$, ибо $(A) \bar{\in} \Phi$.

Теорема 6. *Существует взаимно однозначное соответствие между элементами множества $\mathscr{P} = \{P\}$ всех δ-пространств совместимых с данным T_1-пространством X, и элементами множества $\mathscr{B} = \{\omega\alpha X\}$ всех $\omega\alpha$-расширений пространства X.*

Доказательство. Пусть $\omega\alpha X \in \mathscr{B}$, тогда по тереме 2 $\omega\alpha X$ индуцирует на X некоторое δ-пространство $P \in \mathscr{P}$, а по теореме 3 двум различным $\omega\alpha$-расширениям $\omega\alpha' X$, $\omega\alpha'' X$ соответствуют два различных δ — пространства P', $P'' \in \mathscr{P}$. Обратно, пусть $P \in \mathscr{P}$ тогда как мы показали δ-пространство P порождает uP, которое согласно теореме 5 является $\omega\alpha$-расширением пространства X, а в силу теоремы 4 близость индуцируемая $\omega\alpha X$ на X совпадает с a priori δ-пространством P совместимым с X. Теорема доказана.

В работе [8] устанавливается взаимно однозначное соответствие между так называемыми главными бикомпактными расширениями T_1-пространства X и всеми отношениями близости на X (теор. 9). Интересно узнать на сколько результат теоремы 6 пересекается с результатом теор. 9 [8], учитывая различие между аксиомой Б5 [8] и аксиомой i_5.

Литература

[1] *П. С. Александров:* О бикомпактных расширениях топологических пространств, мат. сбор. *5* (*47*) : 2, 403—423 (1939).

[2] *В. А. Ефремович:* Инфинитизимальные пространства ДАН, СССР, т. *LXXVI*, № 3, 341—343 (1951).

[3] *В. А. Ефремович:* Геометрия близости I, матем. сбор. *31* (*73*) № 1, 189—200 (1952).

[4] *Ю. М. Смирнов:* О пространствах близости, матем. сбор. т. *31* (*73*), № 3, 543—574 (1952).

[5] *П. К. Осматеску:* $\omega\alpha$-расширения, Вестник Московского университета, серия VI, математика, № 6, 45—54 (1963).

[6] *П. К. Осматеску:* О продолжении совершенных отображений на $\omega\alpha$-расширени»,
ДАН, СССР, т. *164*, № 5, 985—988 (1965).
[7] *П. С. Александров:* Введение в общую теорию множеств и функций, ОГИЗ-Гостехиздат. Москва—Ленинград 1948.
[8] *В. М. Иванова, А. А. Иванов:* Пространства смежности и бикомпактные расширения топологических пространств. Изв. АН СССР серия матем., 23, № 4, 613—634, (1959).
[9] *J. L. Kelley:* General topology, New York, 1955.

Адрес автора: Кишиневский политехнический институт, Кишинев, СССР.