Štefan Schwabik

Stetige Abhängigkeit von einem Parameter für ein Differentialgleichungssystem mit Impulsen

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 21 (1971), No. 2, 198–212

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/101016

Czechoslovak Mathematical Journal, 21 (96) 1971, Praha

STETIGE ABHÄNGIGKEIT VON EINEM PARAMETER FÜR EIN DIFFERENTIALGLEICHUNGSSYSTEM MIT IMPULSEN

ŠTEFAN SCHWABIK, Praha

(Eingelangt am 4. Dezember 1969)

Sei $M \subset E_n$ eine offene Menge, $G = M \times (-\infty, \infty) \subset E_{n+1}$. Sei ferner für jedes ganze k eine Funktion $\varphi_k(x) : M \to E_1$ so gegeben, dass

$$(1) \qquad |\varphi_k(x) - \varphi_k(y)| \leqq L\|x - y\|$$

für jedes ganze k und $x, y \in M$ gilt und sei

$$(2) \qquad \varphi_{k+1}(x) - \varphi_k(x) \geqq \delta > 0$$

für alle ganze k und $x \in M$. $L \geqq 0$ und δ sind dabei von k nicht abhängende Konstanten.

Weiter sei ebenfalls für jedes ganze k eine Funktion $\Phi_k(x) : M \to E_n$ gegeben, wobei vorausgesetzt wird, dass

$$(3) \qquad \|\Phi_k(x)\| \leqq \min\left(\Omega, \frac{\alpha_k \delta}{L}\right)$$

für alle ganze k und $x \in M$ gilt und dass auch

$$(4) \qquad \|\Phi_k(x) - \Phi_k(y)\| \leqq \Omega\|x - y\|$$

für alle ganze k und $x, y \in M$ gilt, wobei $\Omega \geqq 0$ eine, von k nicht abhängende, Konstante ist und es gilt $0 \leqq \alpha_k < A$, wo $A < 1$ eine von k nicht abhängende Konstante sei.

Definieren wir (so wie in [4] und [5]) die Mengen

$$(5) \qquad \begin{aligned} G_k &= \{(x, t);\ x \in M,\ \varphi_{k-1}(x) < t < \varphi_k(x)\}\,, \\ P_k &= \{(x, t);\ x \in M,\ t = \varphi_k(x)\} \end{aligned}$$

und setzen noch voraus, dass für jedes β, $0 < \beta \leqq 1$ die Beziehung

$$(6) \qquad (x + \beta\, \Phi_k(x),\ \varphi_k(x)) \in G_{k+1} \cup P_k$$

für alle ganze k und $x \in M$ gilt.

Sei nun $s(x, t) = k$, wenn $\varphi_k(x) < t \leqq \varphi_{k+1}(x)$ $((x, t) \in G_{k+1} \cup P_{k+1})$ ist. Offenbar gilt

$$(7) \qquad s(x, a + \delta) - s(x, a) \leqq 1$$

für alle $(x, a) \in G$. Mit Hilfe der Funktion $s(x, t) : G \to E_1$ definieren wir nun für $\varepsilon > 0$ die Funktion

$$(8) \qquad \tilde{F}_\varepsilon(x, t) = \varepsilon \sum_{i=s(x,0)}^{s(x,t/\varepsilon)} \Phi_i(x)$$

wobei $\sum\limits_{i=N_1}^{N_2} = - \sum\limits_{i=N_2}^{N_1}$ sein soll, wenn für die ganze Zahlen die Ungleichung $N_1 > N_2$ gilt.

Ferner sei $K \geqq 0$ gegeben. Für $\varepsilon > 0$ sei $\mathscr{F}(G, K, \{\varepsilon\varphi_k, \varepsilon\Phi_k\})$ die Funktionenklasse von [5] (vgl. auch [4]). Nachdem $s(x, t/\varepsilon) = k$ für $\varepsilon\,\varphi_k(x) < t \leqq \varepsilon\,\varphi_{k+1}(x)$ ist, gehört die Funktion $\tilde{F}_\varepsilon(x, t)$ von (8) zu der Klasse $\mathscr{F}(G, K, \{\varepsilon\varphi_k, \varepsilon\Phi_k\})$ nach [5] und für eine Funktion $F_\varepsilon(x, t) \in \mathscr{F}(G, K, \{\varepsilon\varphi_k, \varepsilon\Phi_k\})$ gilt

$$(9) \qquad F_\varepsilon(x, t) = \tilde{F}_\varepsilon(x, t) + \hat{F}_\varepsilon(x, t)\,,$$

wobei $\tilde{F}_\varepsilon(x, t)$ in (8) bestimmt ist und es ist $\hat{F}_\varepsilon(x, t) \in \mathscr{F}(G, K)$. Es gilt also (vgl. [4] und [5])

$$(10) \qquad \|\Delta_t^{t_2 - t_1} \hat{F}_\varepsilon(x, t_1)\| \leqq K|t_2 - t_1|$$

und

$$(11) \qquad \|\Delta_t^{t_2 - t_1} \Delta_x^y \hat{F}_\varepsilon(x, t_1)\| \leqq K\|y\|\,|t_2 - t_1|$$

für alle $(x, t_i), (x + y, t_i) \in G$, $i = 1, 2$. Wir benutzten da die Bezeichnungen $\Delta_t^\sigma F(x, \tau) = F(x, \tau + \sigma) - F(x, \tau)$, $\Delta_x^y F(z, t) = F(z + y, t) - F(z, t)$ für eine Funktion $F(x, t) : G \to E_n$.

Bemerkung. Ganz einfach kann man nachweisen, dass für jedes $\varepsilon > 0$ die Funktionenklasse $\mathscr{F}(G, K, \{\varepsilon\varphi_k, \varepsilon\Phi_k\})$ die Voraussetzungen des Absatzes 2 von [5] erfüllt. Es ist eben nur die Voraussetzung (2,11) von [5] nicht erfüllt, welche für unseren Fall besagt, dass $0 \leqq \varepsilon LK < 1$ sein muss. Es ist aber klar, dass für hinreichend kleine $\varepsilon > 0$ (d. h. für $\varepsilon < 1/KL$, falls $K > 0$, $L > 0$ und ε beliebig, wenn eine der Zahlen K, L Null gleich ist) diese Voraussetzung ebenfalls erfüllt sein wird. Uns wird da der Fall $\varepsilon \to 0+$ interessieren und also genügt es die Untersuchungen für hinreichend kleine $\varepsilon > 0$ durchzuführen.

Weiter sei eine Funktion $F_0(x, t) : G \to E_n$ gegeben, wobei

$$(12) \qquad F_0(x, t) = \tilde{F}_0(x, t) + \hat{F}_0(x, t)$$

ist und $\tilde{F}_0(x, t) \in \mathscr{F}(G, \Omega^*)$, $\hat{F}_0(x, t) \in \mathscr{F}(G, K^0)$. Es ist also offenbar auch $F_0(x, t) \in \in \mathscr{F}(G, K^0 + \Omega^*)$.

Unsere Untersuchungen werden den verallgemeinerten Differentialgleichungen (vgl. [1])

$$\frac{dx}{d\tau} = DF_\varepsilon(x, t) \tag{13}$$

und

$$\frac{dx}{d\tau} = DF_0(x, t) \tag{14}$$

gewidmet, wobei $F_\varepsilon(x, t) : G \to E_n$ von (9) und $F_0(x, t) : G \to E_n$ von (12) ist. Wir werden dabei voraussetzen, dass

$$\|\Delta_t^\vartheta[\hat{F}_\varepsilon(x, t) - \hat{F}_0(x, t)]\| = \psi(\varepsilon)\,, \quad \lim_{\varepsilon \to 0+} \psi(\varepsilon) = 0 \tag{15}$$

für alle $(x, t) \in G$, $0 < \vartheta \leqq 1$ ist, und

$$\|\Delta_t^\vartheta[\tilde{F}_\varepsilon(x, t) - \tilde{F}_0(x, t)]\| = \chi(\varepsilon)\,, \quad \lim_{\varepsilon \to 0+} \chi(\varepsilon)/\sqrt{(\varepsilon)} = 0 \tag{16}$$

für alle $(x, t) \in G$, $0 < \vartheta \leqq 1$ gilt.

Die Beziehungen (15) und (16) geben eine gewisse Konvergenz der rechten Seite der Gleichung (13) zu der rechten Seite der Gleichung (14).

Der Begriff der Lösung von (13) bzw. (14) ist in [1] definiert. Wir werden voraussetzen, dass $-\infty < T_1 < T_2 < +\infty$ ist. Eine Lösung der Gleichung (13) im Intervall $\langle T_1, T_2 \rangle$ bezeichnen wir mit $x_\varepsilon(\tau)$ und eine Lösung der Gleichung (14) im Intervall $\langle T_1, T_2 \rangle$ wird mit $x_0(\tau)$ bezeichnet.

Nachdem die Funktionenklasse $\mathscr{F}(G, K, \{\varepsilon\varphi_k, \varepsilon\Phi_k\})$ für alle hinreichend kleine $\varepsilon > 0$ die Voraussetzungen von [5] erfüllt (vgl. die obige Bemerkung), kann der Satz 3,1 von [5] zu Hilfe genommen werden, wenn man die Lösung $x_\varepsilon(\tau)$ der Gleichung (13) in $\langle T_1, T_2 \rangle$ untersucht. Wir werden nun schon immer voraussetzen, dass $\varepsilon > 0$ hinreichend klein ist. Nach dem Satz 3,1 von [5] gilt folgendes:

Es existieren ganze Zahlen $l_{1,\varepsilon}$, $l_{2,\varepsilon}$, sodass

$$\varepsilon\,\varphi_{l_{i,\varepsilon}-1}(x_\varepsilon(T_i)) < T_i \leqq \varepsilon\,\varphi_{l_{i,\varepsilon}}(x_\varepsilon(T_i))\,, \quad i = 1, 2$$

ist und es gilt $l_{1,\varepsilon} \leqq l_{2,\varepsilon}$ (vgl. (i) im Satz 3,1 von [5]); für jedes ganze l: $l_{1,\varepsilon} \leqq l < l_{2,\varepsilon}$ gibt es genau ein $t_l \in \langle T_1, T_2 \rangle$, sodass $\varepsilon\,\varphi_l(x_\varepsilon(t_l)) = t_l$ ist und es gilt $t_{l_{1,\varepsilon}} < t_{l_{1,\varepsilon}+1} < \ldots$ $\ldots < t_{l_{2,\varepsilon}-1}$ (vgl. (ii) im Satz 3,1 von [5]). In den Intervallen $\langle T_1, t_{l_{1,\varepsilon}} \rangle$, $\langle t_{l-1}, t_l \rangle$, $l = l_{1,\varepsilon} + 1, \ldots, l_{2,\varepsilon} - 1$, $(t_{l_{2,\varepsilon}-1}, T_2\rangle$ ist $x_\varepsilon(\tau)$ eine Lösung der Gleichung $dx/d\tau =$ $= D\hat{F}_\varepsilon(x, t)$ und es gilt in jedem von diesen Intervallen die Ungleichung

$$\|x_\varepsilon(\tau_2) - x_\varepsilon(\tau_1)\| \leqq K|\tau_2 - \tau_1|$$

(vgl. (iv) im Satz 3,1 von [5]). Für $l = l_{1,\varepsilon}, \ldots, l_{2,\varepsilon}$ ist

$$x_\varepsilon(t_l+) = x_\varepsilon(t_l) + \varepsilon\,\Phi_l(x_\varepsilon(t_l))$$

(vgl. (v) im Satz 3,1 von [5]). Ferner gilt noch für jedes ganze l, $l = l_{1,\varepsilon} + 1, l_{1,\varepsilon} + 2, \ldots, l_{2,\varepsilon} - 1$ die Ungleichung (vgl. (vi) im Satz 3,1 von [5])

$$t_l - t_{l-1} \geqq \varepsilon\delta(1 - \varepsilon A)(1 + \varepsilon LK)^{-1} > \varepsilon\delta(1 - A)(1 + LK)^{-1} = \varepsilon c\,, \tag{17}$$

wenn $\varepsilon > 0$ hinreichend klein ist. Wir bezeichneten dabei $c = \delta(1 - A)(1 + LK)^{-1}$, wobei δ die Konstante von (2), $A < 1$ die obere Schranke für α_k von (3), L die Konstante von (1) und K die Konstante, welche die Funktionenklasse $\mathscr{F}(G, K, \{\varepsilon\varphi_k, \varepsilon\Phi_k\})$ bestimmt, ist.

Die oben beschriebenen Punkte t_l, $l = l_{1,\varepsilon}, l_{1,\varepsilon} + 1, \ldots, l_{2,\varepsilon} - 1$ sind alle Unstetigkeitspunkte der Lösung $x_\varepsilon(\tau)$ im Intervall $\langle T_1, T_2\rangle$. Nach der Ungleichung (17) gilt für deren Anzahl $l_{2,\varepsilon} - l_{1,\varepsilon}$ die Ungleichung

$$l_{2,\varepsilon} - l_{1,\varepsilon} \leqq 1 + (T_2 - T_1)/\varepsilon c\,, \tag{18}$$

wo c die Konstante von (17) ist.

Lemma 1. *Es sei für $0 < \varepsilon < 1$, $x_\varepsilon(\tau)$ eine Lösung der Gleichung (13) im Intervall $\langle T_1, T_2\rangle$. Wenn $\tilde{F}_0(x, t) \in \mathscr{F}(G, \Omega^*)$ ist und wenn (16) gilt, dann ist*

$$\left\| \int_{T_1}^{\sigma} D[\tilde{F}_\varepsilon(x_\varepsilon(\tau), t) - \tilde{F}_0(x_\varepsilon(\tau), t)] \right\| = O(\sqrt{\varepsilon}) + O(1/\sqrt{\varepsilon})\,\chi(\varepsilon) \tag{19}$$

mit $\varepsilon \to 0+$ für jedes $\sigma \in \langle T_1, T_2\rangle$, wobei $\tilde{F}_\varepsilon(x, t)$ die Funktion von (8) ist.

Beweis. Bezeichnen wir $Q = \{t_{l_{1,\varepsilon}}, t_{l_{1,\varepsilon}+1}, \ldots, t_{l_{2,\varepsilon}-1}\}$. Für $\sigma_1, \sigma_2 \in \langle T_1, T_2\rangle$ ist nach der Definition einer Lösung

$$x_\varepsilon(\sigma_2) - x_\varepsilon(\sigma_1) = \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} DF_\varepsilon(x_\varepsilon(\tau), t) = \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} D\hat{F}_\varepsilon(x_\varepsilon(\tau), t) + \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} D\tilde{F}_\varepsilon(x_\varepsilon(\tau), t)\,.$$

Die Ungleichung (10) und Lemma 3,1 von [3] gibt die Ungleichung

$$\left\| \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} D\hat{F}_\varepsilon(x_\varepsilon(\tau), t) \right\| \leqq K|\sigma_2 - \sigma_1|\;;$$

nach dem Lemma 3,8 in [5] ist

$$\int_{\sigma_1}^{\sigma_2} D\tilde{F}_\varepsilon(x_\varepsilon(\tau), t) = \sum_{t_k \in Q \cap \langle \sigma_1, \sigma_2)} \varepsilon\, \Phi_k(x_\varepsilon(t_k))\,.$$

Daher ist

$$\|x_\varepsilon(\sigma_2) - x_\varepsilon(\sigma_1)\| \leqq K|\sigma_2 - \sigma_1| + \varepsilon \sum_{t_k \in Q \cap \langle \sigma_1, \sigma_2)} \|\Phi_k(x_\varepsilon(t_k))\|\,. \tag{20}$$

für $\sigma_1, \sigma_2 \in \langle T_1, T_2\rangle$.

Definieren wir nun $s_\varepsilon(\tau) = 0$, wenn $\tau \in \langle T_1, t_{l_{1,\varepsilon}} \rangle$, $s_\varepsilon(\tau) = l$, wenn $\tau \in (t_{l_{1,\varepsilon}+l-1}, t_{l_{1,\varepsilon}+l} \rangle$, $l = 0, 1, \ldots, l_{2,\varepsilon} - l_{1,\varepsilon} - 1$ und $s_\varepsilon(\tau) = l_{2,\varepsilon} - l_{1,\varepsilon}$, wenn $\tau \in (t_{l_{2,\varepsilon}-1}, T_2\rangle$ ist und bezeichnen $\tilde{H}_\varepsilon(\tau) = \varepsilon\Omega\, s_\varepsilon(\tau)$ für $\tau \in \langle T_1, T_2 \rangle$ (Ω ist die Konstante von (3) und (4)). Legen wir ferner $H_\varepsilon(\tau) = K\tau + \tilde{H}_\varepsilon(\tau)$. Der Definition nach ist $H_\varepsilon(\tau) : \langle T_1, T_2 \rangle \to \to E_1$ eine von links stetige, beschränkte, nichtfallende Funktion in $\langle T_1, T_2 \rangle$ und nach (18) gilt

$$H_\varepsilon(T_2) - H_\varepsilon(T_1) = K(T_2 - T_1) + \varepsilon\Omega(l_{2,\varepsilon} - l_{1,\varepsilon}) = \leqq K(T_2 - T_1) + \varepsilon\Omega[1 + (T_2 - T_1)/\varepsilon c] = O(1) \tag{21}$$

mit $\varepsilon \to 0+$. Nach (3) und nach der Definition von $\tilde{H}_\varepsilon(\tau)$ ist

$$\varepsilon \sum_{t_k \in Q \cap \langle \sigma_1, \sigma_2)} \|\Phi_k(x_\varepsilon(t_k))\| \leqq \varepsilon\Omega \sum_{t_k \in Q \cap \langle \sigma_1, \sigma_2)} 1 \leqq |\tilde{H}_\varepsilon(\sigma_2) - \tilde{H}_\varepsilon(\sigma_1)|$$

und von (20) ergibt sich dann

$$\|x_\varepsilon(\sigma_2) - x_\varepsilon(\sigma_1)\| \leqq |H_\varepsilon(\sigma_2) - H_\varepsilon(\sigma_1)| \tag{22}$$

für jede $\sigma_1, \sigma_2 \in \langle T_1, T_2 \rangle$.

Sei nun $\{\alpha_0, \tau_1, \alpha_1, \ldots, \tau_s, \alpha_s\}$ eine Teilung des Intervalles $\langle T_1, T_2 \rangle$ mit folgenden Eigenschaften:

a) $$T_1 = \alpha_0 \leqq \tau_1 \leqq \alpha_1 \leqq \ldots \leqq \alpha_{s-1} \leqq \tau_s \leqq \alpha_s = T_2\,,$$

b) $$\alpha_0 < \alpha_1 < \ldots < \alpha_s\,,$$

c) $$H_\varepsilon(\alpha_j) - H_\varepsilon(\alpha_{j-1}) < 2\Omega\sqrt{\varepsilon}\,.$$

Die Menge aller Einteilungen $\{\alpha_0, \tau_1, \alpha_1, \ldots, \tau_s, \alpha_s\}$ des Intervalles $\langle T_1, T_2 \rangle$ mit den Eigenschaften a), b), c) wurde in [2] mit $A(2\Omega\sqrt{(\varepsilon)}, T_1, T_2, H_\varepsilon)$ bezeichnet. Wir wollen da noch voraussetzen, dass folgendes gilt:

d) $$\alpha_j - \alpha_{j-1} \leqq 1 \quad \text{für} \quad j = 1, 2, \ldots, s\,.$$

Man kann nun eine Teilung $\{\alpha_0, \tau_1, \alpha_1, \ldots, \tau_s, \alpha_s\} \in A(2\Omega\sqrt{(\varepsilon)}, T_1, T_2, H_\varepsilon)$ so wählen, dass für diese womöglich $H_\varepsilon(\alpha_j) - H_\varepsilon(\alpha_{j-1}) > \Omega\sqrt{\varepsilon}$ sein wird und wenn man dieses nicht, ohne die Bedingung d) zu stören, erfüllen kann, dann sei einfach $\alpha_j - \alpha_{j-1} = 1$. Sei nun soeine Teilung $\{\alpha_0, \tau_1, \alpha_1, \ldots, \tau_s, \alpha_s\}$ fest gewählt. Es ist offenbar $s \leqq [(H_\varepsilon(T_2) - H_\varepsilon(T_1))/2\Omega\sqrt{\varepsilon}] + T_2 - T_1 + 1$ und daher ist nach (21)

$$s = O(\varepsilon^{-1/2}) \tag{23}$$

für $\varepsilon \to 0+$ (s ist die Anzahl der Intervalle $\langle \alpha_{j-1}, \alpha_j \rangle$ der gegebenen Teilung). Für ein gegebenes $\sigma \in \langle T_1, T_2 \rangle$ existiert offenbar eine ganze Zahl $s_\sigma, s_\sigma \leqq s$, sodass $\sigma \in (\alpha_{s_\sigma - 1}, \alpha_{s_\sigma}\rangle$ sein wird. Man kann nun von der Teilung des Intervalles $\langle T_1, T_2 \rangle$ einfach eine Teilung $\{\alpha_0, \tau_1, \alpha_1, \ldots, \alpha_{s_\sigma - 1}, \tau'_{s_\sigma}, \alpha'_{s_\sigma}\} \in A(2\Omega\sqrt{(\varepsilon)}, T_1, \sigma, H_\varepsilon)$ des Intervalles $\langle T_1, \sigma\rangle$ konstruieren (soeben, wie wir es im Beweis des Satzes 1,1 in [5] taten). Nachdem $\tilde{F}_0(x, t) \in \mathscr{F}(G, \Omega^*)$ ist, gilt dem Satz von Seite 405 in [3] zufolge die Ungleichung

$$\left\| \int_{T_1}^{\sigma} D\tilde{F}_0(x_\varepsilon(\tau), t) - \sum_{i=1}^{s_\sigma} [\tilde{F}_0(x_\varepsilon(\tau_i), \alpha_i) - \tilde{F}_0(x_\varepsilon(\tau_i), \alpha_{i-1})] \right\| \leqq$$
$$\leqq 2\Omega \sqrt{(\varepsilon)}\, [\Omega^*(\sigma - T_1) + H_\varepsilon(\sigma) - H_\varepsilon(T_1)]$$

für alle $\sigma \in \langle T_1, T_2\rangle$ und also ist nach (21)

$$\left\| \int_{T_1}^{\sigma} D\tilde{F}_0(x_\varepsilon(\tau), t) - \sum_{i=1}^{s_\sigma} [\tilde{F}_0(x_\varepsilon(\tau_i), \alpha_i) - \tilde{F}_0(x_\varepsilon(\tau_i), \alpha_{i-1})] \right\| = O(\varepsilon^{1/2}) \tag{24}$$

mit $\varepsilon \to 0+$ für alle $\sigma \in \langle T_1, T_2\rangle$.

Sei nun $\alpha_{i-1} \leqq \tau_i \leqq \alpha_i$ ein Intervall der obigen Teilung. Wir untersuchen die Differenz

$$\int_{\alpha_{i-1}}^{\alpha_i} D\tilde{F}_\varepsilon(x_\varepsilon(\tau), t) - [\tilde{F}_\varepsilon(x_\varepsilon(\tau_i), \alpha_i) - \tilde{F}_\varepsilon(x_\varepsilon(\tau_i), \alpha_{i-1})] = \tag{25}$$
$$= \sum_{j \in Z_{1,i}} \varepsilon\, \Phi_j(x_\varepsilon(t_j)) - \sum_{l \in Z_{2,i}} \varepsilon\, \Phi_l(x_\varepsilon(\tau_i)) = \sum_{j \in Z_{1,i} - (Z_{1,i} \cap Z_{2,i})} \varepsilon\, \Phi_j(x_\varepsilon(t_j)) +$$
$$+ \sum_{k \in Z_{1,i} \cap Z_{2,i}} [\varepsilon\, \Phi_k(x_\varepsilon(t_k)) - \varepsilon\, \Phi_k(x_\varepsilon(\tau_i))] - \sum_{l \in Z_{2,i} - (Z_{1,i} \cap Z_{2,i})} \varepsilon\, \Phi_l(x_\varepsilon(\tau_i))\,;$$

dabei ist $Z_{1,i} = \{j \text{ ganz};\ t_j \in \langle\alpha_{i-1}, \alpha_i),\ \varepsilon\, \varphi_j(x_\varepsilon(t_j)) = t_j\}$ und $Z_{2,i} = \{l \text{ ganz};\ \varepsilon\, \varphi_l(x_\varepsilon(\tau_i)) \in \langle\alpha_{i-1}, \alpha_i)\}$. Beim herleiten dieser Gleichung benutzten wir das Lemma 3,8 von [5] und die Definition von $\tilde{F}_\varepsilon(x, t)$ in (8).

Soeben, wie wir die Ungleichung (18) hergeleitet haben, kann man einfach zeigen, dass die Anzahl der in $Z_{1,i}$ und also auch in $Z_{1,i} \cap Z_{2,i}$ liegenden Punkte von oben mit der Zahl $1 + (\alpha_i - \alpha_{i-1})/\varepsilon c$ abgeschätzt werden kann, wobei c die Konstante von (17) ist. Nach c), (1) und (22) ist

$$|\varepsilon\, \varphi_j(x_\varepsilon(\tau_i)) - t_j| = |\varepsilon\, \varphi_j(x_\varepsilon(\tau_i)) - \varepsilon\, \varphi_j(x_\varepsilon(t_j))| \leqq \varepsilon L \|x_\varepsilon(\tau_i) - x_\varepsilon(t_k)\| \leqq$$
$$\leqq \varepsilon L(H_\varepsilon(\alpha_i) - H_\varepsilon(\alpha_{i-1})) \leqq \varepsilon L \,.\, 2\Omega \sqrt{(\varepsilon)}\, (= O(\varepsilon^{3/2}),\ \varepsilon \to 0+)$$

und man kann also die Anzahl der Punkte der Mengen $Z_{1,i} - (Z_{2,i} \cap Z_{1,i})$, $Z_{2,i} - (Z_{1,i} \cap Z_{2,i})$ von oben mit der Zahl $\varepsilon \sqrt{(\varepsilon)}\, 2L\Omega/\varepsilon c + 1 (= O(1))$ abschätzen und also ist nach (25), (3), (4), c) und (22)

$$\left\| \int_{\alpha_{i-1}}^{\alpha_i} D\tilde{F}_\varepsilon(x_\varepsilon(\tau), t) - [\tilde{F}_\varepsilon(x_\varepsilon(\tau_i), \alpha_i) - \tilde{F}_\varepsilon(x_\varepsilon(\tau_i), \alpha_{i-1})] \right\| \leqq$$
$$\leqq 2 \,.\, \varepsilon \,.\, \Omega \,.\, O(1) + \varepsilon\Omega \max_{k \in Z_{1,i} \cap Z_{2,i}} \|x_\varepsilon(t_k) - x_\varepsilon(\tau_i)\|\, [1 + (\alpha_i - \alpha_{i-1})/\varepsilon c] \leqq$$
$$\leqq O(\varepsilon) + 2\varepsilon\Omega^2 \sqrt{(\varepsilon)}\, [1 + (\alpha_i - \alpha_{i-1})/\varepsilon c] = (2\Omega^2/c)\, (\alpha_i - \alpha_{i-1}) \sqrt{(\varepsilon)} + O(\varepsilon)$$

für $\varepsilon \to 0+$. Dieses gibt nach der Summierung über $i = 1, 2, \ldots, s_\sigma$ nach (23) und nach der Ungleichung $s_\sigma \leqq s$ die Abschätzung

$$(26)\qquad \left\| \int_{T_1}^{\sigma} D\tilde{F}_\varepsilon(x_\varepsilon(\tau), t) - \sum_{i=1}^{s\sigma} [\tilde{F}_\varepsilon(x_\varepsilon(\tau_i), \alpha_i) - \tilde{F}_\varepsilon(x_\varepsilon(\tau_i), \alpha_{i-1})] \right\| \leqq$$

$$\leqq \sum_{i=1}^{s_\sigma} \left[\frac{2\Omega^2}{c} (\alpha_i - \alpha_{i-1}) \sqrt{(\varepsilon)} + O(\varepsilon) \right] = O(\sqrt{\varepsilon}), \quad \varepsilon \to 0+ .$$

Nach (26), (24) und (16) gilt also

$$\left\| \int_{T_1}^{\sigma} D[\tilde{F}_\varepsilon(x_\varepsilon(\tau), t) - \tilde{F}_0(x_\varepsilon(\tau), t)] \right\| \leqq \left\| \int_{T_1}^{\sigma} D\tilde{F}_\varepsilon(x_\varepsilon(\tau), t) - \sum_{i=1}^{s_\sigma} \Delta_t^{\alpha_i - \alpha_{i-1}} \tilde{F}_\varepsilon(x_\varepsilon(\tau_i), \alpha_{i-1}) \right\| +$$

$$+ \left\| \sum_{i=1}^{s_\sigma} \Delta_t^{\alpha_i - \alpha_{i-1}} [\tilde{F}_\varepsilon(x_\varepsilon(\tau_i), \alpha_{i-1}) - \tilde{F}_0(x_\varepsilon(\tau_i), \alpha_{i-1})] \right\| +$$

$$+ \left\| \int_{T_1}^{\sigma} D\tilde{F}_0(x_\varepsilon(\tau), t) - \sum_{i=1}^{s_\sigma} \Delta_t^{\alpha_i - \alpha_{i-1}} \tilde{F}_0(x_\varepsilon(\tau_i), \alpha_{i-1}) \right\| \leqq$$

$$\leqq O(\sqrt{\varepsilon}) + s_\sigma \chi(\varepsilon) = O(\sqrt{\varepsilon}) + O(1/\sqrt{\varepsilon}) \chi(\varepsilon)$$

für alle $\sigma \in \langle T_1, T_2 \rangle$ mit $\varepsilon \to 0+$.

Bemerkung 1. Von (19) geht hervor, dass wenn die Voraussetzungen vom Lemma 1 erfüllt sind, dann ist (nachdem $\lim_{\varepsilon \to 0+} \chi(\varepsilon)/\sqrt{(\varepsilon)} = 0$ gilt)

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} \left\| \int_{T_1}^{\sigma} D[\tilde{F}_\varepsilon(x_\varepsilon(\tau), t) - \tilde{F}_0(x_\varepsilon(\tau), t)] \right\| = 0$$

für alle $\sigma \in \langle T_1, T_2 \rangle$.

Bemerken wir auch noch folgendes: Sei $\omega(\varepsilon)$ soeine Funktion, für welche $\lim_{\varepsilon \to 0+} \omega(\varepsilon) = 0$ ist. Sei die Funktion $\tilde{F}_\varepsilon(x, t)$ mit

$$(8a)\qquad \tilde{F}_\varepsilon(x, t) = \omega(\varepsilon) \sum_{i=s(x,0)}^{s(x,t/\omega(\varepsilon))} \Phi_i(x)$$

definiert (anstatt (8)) für $(x, t) \in G$. Man kann einfach den Beweis vom Lemma 1 in diesem Fall wiederholen, indem man ε mit $\omega(\varepsilon)$ ersetzt. Anstatt (16) setze man voraus, dass

$$(16a)\qquad \|\Delta_t^\vartheta[\tilde{F}_\varepsilon(x, t) - \tilde{F}_0(x, t)]\| = \chi(\varepsilon), \quad \lim_{\varepsilon \to 0+} \frac{\chi(\varepsilon)}{\sqrt{\omega(\varepsilon)}} = 0$$

für alle $(x, t) \in G$, $0 < \vartheta \leqq 1$ gilt. Wir bekommen dann folgendes

Lemma 1a. *Sei $\varepsilon > 0$ derartig, dass $0 \leqq \omega(\varepsilon) < 1$ ist, und sei $x_\varepsilon(\tau)$ eine Lösung per Gleichung (13) im Intervall $\langle T_1, T_2 \rangle$, wobei $\tilde{F}_\varepsilon(x, t)$ in (8a) gegeben ist. Wenn $\tilde{F}_0(x, t) \in \mathscr{F}(G, \Omega^*)$ ist und wenn (16a) gilt, denn ist*

$$\left\| \int_{T_1}^{\sigma} D[\tilde{F}_\varepsilon(x_\varepsilon(\tau), t) - \tilde{F}_0(x_\varepsilon(\tau), t)] \right\| = O\left(\sqrt{\omega(\varepsilon)}\right) + O\left(\sqrt{\omega(\varepsilon)}\right) \chi(\varepsilon) \tag{19a}$$

mit $\varepsilon \to 0+$ für jedes $\sigma \in \langle T_1, T_2 \rangle$ d. h. es ist

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} \left\| \int_{T_1}^{\sigma} D[\tilde{F}_\varepsilon(x_\varepsilon(\tau), t) - \tilde{F}_0(x_\varepsilon(\tau), t)] \right\| = 0$$

für $\sigma \in \langle T_1, T_2 \rangle$.

Lemma 2. *Sei $\varepsilon > 0$ und sei $x_0(\tau)$ eine Lösung der Gleichung (14) im Intervall $\langle T_1, T_2 \rangle$. Wenn $\hat{F}_\varepsilon(x, t) \in \mathscr{F}(G, K)$ ist und wenn (15) gilt, dann ist*

$$\left\| \int_{T_1}^{\sigma} D[\hat{F}_\varepsilon(x_0(\tau), t) - \hat{F}_0(x_0(\tau), t] \right\| = O\left(\sqrt{\psi(\varepsilon)}\right) \tag{27}$$

für alle $\sigma \in \langle T_1, T_2 \rangle$ mit $\varepsilon \to 0+$.

Beweis. Nachdem $x_0(\tau)$ in $\langle T_1, T_2 \rangle$ eine Lösung der Gleichung (14) sein soll, wobei $F_0(x, t) \in \mathscr{F}(G, K^0 + \Omega^*)$ ist, gilt für $\sigma_1, \sigma_2 \in \langle T_1, T_2 \rangle$ die Ungleichung

$$\|x_0(\sigma_2) - x_0(\sigma_1)\| \leqq (K^0 + \Omega^*) |\sigma_2 - \sigma_1| \tag{28}$$

(vgl. Lemma 2,4 in [3]).

Bilden wir weiter eine Teilung $\{\alpha_0, \tau_1, \alpha_1, \ldots, \tau_r, \alpha_r\}$ des Intervalles $\langle T_1, T_2 \rangle$, für welche

a) $$T_1 = \alpha_0 \leqq \tau_1 \leqq \alpha_1 \leqq \ldots \leqq \alpha_{r-1} \leqq \tau_r \leqq \alpha_r = T_2 ,$$

b) $$\alpha_0 < \alpha_1 < \ldots < \alpha_r ,$$

c) $$\sqrt{[\psi(\varepsilon)]}/[2(K^0 + \Omega^*)] \leqq \alpha_j - \alpha_{j-1} \leqq \sqrt{[\psi(\varepsilon)]}/(K^0 + \Omega^*) , \quad j = 1, 2, \ldots, r$$

gilt. Setzen wir zugleich auch voraus, dass $\sqrt{[\psi(\varepsilon)]} < K^0 + \Omega^*$ ist (dann ist $\alpha_j - \alpha_{j-1} < 1$). Für die Zahl r, welche die Anzahl der Teilintervalle der obigen Einteilung des Intervalles $\langle T_1, T_2 \rangle$ bestimmt, gilt offenbar die Ungleichung $r \leqq 1 + 2(K^0 + \Omega^*)(T_2 - T_1)/\sqrt{[\psi(\varepsilon)]}$ und also ist

$$r = O\left(\frac{1}{\sqrt{[\psi(\varepsilon)]}}\right) \tag{29}$$

für $\varepsilon \to 0+$. Sei $\sigma \in \langle T_1, T_2 \rangle$. Offenbar findet man eine ganze Zahl r_σ, $r_\sigma \leqq r$, sodass $\sigma \in (\alpha_{r_\sigma - 1}, \alpha_{r_\sigma}\rangle$ sein wird. Soeben wie im Beweis vom Lemma 1 bilde man eine

Einteilung $\{\alpha_0, \tau_1, \alpha_1, \ldots, \alpha_{r_\sigma-1}, \tau'_{r_\sigma}, \alpha'_{r_\sigma}\}$ des Intervalles $\langle T_1, \sigma\rangle$ von der oben festgelegten Teilung. Nach dem Satz auf Seite 405 in [3] gilt nun

$$\left\|\int_{T_1}^{\sigma} D\hat{F}_\varepsilon(x_0(\tau), t) - \sum_{i=1}^{r_\sigma} \Delta_t^{\alpha_i-\alpha_{i-1}}[\hat{F}_\varepsilon(x_0(\tau_i), \alpha_{i-1})]\right\| \leqq (K + K^0 + \Omega^*)(T_2 - T_1)(\sqrt{\psi(\varepsilon)})$$

und ebenfalls

$$\left\|\int_{T_1}^{\sigma} D\hat{F}_0(x_0(\tau), t) - \sum_{i=1}^{r_\sigma} \Delta_t^{\alpha_i-\alpha_{i-1}}[\hat{F}_0(x_0(\tau_i), \alpha_{i-1})]\right\| \leqq (2K + \Omega^*)(T_2 - T_1)(\sqrt{\psi(\varepsilon)}),$$

nachdem $\hat{F}_\varepsilon(x, t) \in \mathscr{F}(G, K)$, $\hat{F}_0(x, t) \in \mathscr{F}(G, K^0)$ ist, (28) gilt und die Teilung zu der Menge $A(\sqrt{[\psi(\varepsilon)]}, T_1, \sigma, h)$ von Teilungen des Intervalles $\langle T_1, \sigma\rangle$ mit $h(t) = (K^0 + \Omega^*)\, t$ gehört (vgl. [3]). Daher ist

$$\left\|\int_{T_1}^{\sigma} D[\hat{F}_\varepsilon(x_0(\tau), t) - \hat{F}_0(x_0(\tau), t)]\right\| \leqq$$
$$\leqq \sum_{i=1}^{r_\sigma} \|\Delta_t^{\alpha_i-\alpha_{i-1}}[\hat{F}_\varepsilon(x_0(\tau_i), \alpha_{i-1}) - \hat{F}_0(x_0(\tau_i), \alpha_{i-1})]\| +$$
$$+ (T_2 - T_1)(3K + K^0 + 2\Omega^*)(\sqrt{\psi(\varepsilon)})$$

und also ist

$$\left\|\int_{T_1}^{\sigma} D[\hat{F}_\varepsilon(x_0(\tau), t) - \hat{F}_0(x_0(\tau), t)]\right\| \leqq$$
$$\leqq r_\sigma \max_i \|\Delta_t^{\alpha_i-\alpha_{i-1}}[\hat{F}_\varepsilon(x_0(\tau_i), \alpha_{i-1}) - \hat{F}_0(x_0(\tau_i), \alpha_{i-1})]\| + O(\sqrt{\psi(\varepsilon)}),$$

woher nach (15) und (29) die Abschätzung (27) folgt. Das Lemma ist so bewiesen.

Sei nun $x_\varepsilon(\tau)$ eine Lösung der Gleichung (13) in $\langle T_1, T_2\rangle$, sodass $x_\varepsilon(T_1) = \tilde{x}_\varepsilon$ ist und $x_0(\tau)$ sei eine Lösung der Gleichung (14) in $\langle T_1, T_2\rangle$, für welche $x_0(T_1) = \tilde{x}_0$ ist. Für $\sigma \in \langle T_1, T_2\rangle$ gilt dann

$$\|x_\varepsilon(\sigma) - x_0(\sigma)\| \leqq \|\tilde{x}_\varepsilon - \tilde{x}_0\| + \left\|\int_{T_1}^{\sigma} D[F_\varepsilon(x_\varepsilon(\tau), t) - F_0(x_0(\tau), t)]\right\| \leqq$$
$$\leqq \|\tilde{x}_\varepsilon - \tilde{x}_0\| + \left\|\int_{T_1}^{\sigma} D[\hat{F}_\varepsilon(x_\varepsilon(\tau), t) - \hat{F}_\varepsilon(x_0(\tau), t)]\right\| + \left\|\int_{T_1}^{\sigma} D[\hat{F}_\varepsilon(x_0(\tau), t) - \hat{F}_0(x_0(\tau), t)]\right\| +$$
$$+ \left\|\int_{T_1}^{\sigma} D[\tilde{F}_\varepsilon(x_\varepsilon(\tau), t) - \tilde{F}_0(x_\varepsilon(\tau), t)]\right\| + \left\|\int_{T_1}^{\sigma} D[\tilde{F}_0(x_\varepsilon(\tau), t) - \tilde{F}_0(x_0(\tau), t)]\right\|.$$

Nachdem $\hat{F}_\varepsilon(x, t) \in \mathscr{F}(G, K)$, $\tilde{F}_0(x, t) \in \mathscr{F}(G, \Omega^*)$ ist, gilt

$$\|\Delta_t^{t_2-t_1}[\hat{F}_\varepsilon(x_\varepsilon(\tau), t_1) - \hat{F}_\varepsilon(x_0(\tau), t_1)]\| \leqq \|x_\varepsilon(\tau) - x_0(\tau)\|\, K|t_2 - t_1)|,$$
$$\|\Delta_t^{t_2-t_1}[\tilde{F}_0(x_\varepsilon(\tau), t_1) - \tilde{F}_0(x_0(\tau), t_1)]\| \leqq \|x_\varepsilon(\tau) - x_0(\tau)\|\, \Omega^*|t_2 - t_1|$$

für alle $t_1, t_2 \in \langle T_1, T_2 \rangle$. Daher ist nach dem Lemma 2,1 in [3]

$$\left\| \int_{T_1}^{\sigma} D[\hat{F}_\varepsilon(x_\varepsilon(\tau), t) - \hat{F}_\varepsilon(x_0(\tau), t)] \right\| \leqq K \int_{T_1}^{\sigma} \|x_\varepsilon(\tau) - x_0(\tau)\| \, d\tau$$

und

$$\left\| \int_{T_1}^{\sigma} D[\tilde{F}_0(x_\varepsilon(\tau), t) - \tilde{F}_0(x_0(\tau), t)] \right\| \leqq \Omega^* \int_{T_1}^{\sigma} \|x_\varepsilon(\tau) - x_0(\tau)\| \, d\tau \, .$$

Mit Hilfe von Lemma 1 und 2 bekommen wir

$$(30) \quad \|x_\varepsilon(\sigma) - x_0(\sigma)\| \leqq \|\tilde{x}_\varepsilon - \tilde{x}_0\| + O(\sqrt{\varepsilon}) + O\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right)\chi(\varepsilon) + O(\sqrt{\psi(\varepsilon)}) + \\ + (K + \Omega^*) \int_{T_1}^{\sigma} \|x_\varepsilon(\tau) - x_0(\tau)\| \, d\tau$$

für $\varepsilon \to 0+$ und alle $\sigma \in \langle T_1, T_2 \rangle$. Wenn die Funktion $\tilde{F}_\varepsilon(x, t)$ nach (8a) definiert ist, und wenn (16a) gilt, dann ist soeben

$$(30a) \quad \|x_\varepsilon(\sigma) - x_0(\sigma)\| \leqq \|\tilde{x}_\varepsilon - \tilde{x}_0\| + O(\sqrt{\omega(\varepsilon)}) + O\left(\frac{1}{\sqrt{\omega(\varepsilon)}}\right)\chi(\varepsilon) + \\ + O(\sqrt{\psi(\varepsilon)}) + (K + \Omega^*) \int_{T_1}^{\sigma} \|x_\varepsilon(\tau) - x_0(\tau)\| \, d\tau$$

für $\varepsilon \to 0+$ und alle $\sigma \in \langle T_1, T_2 \rangle$. Das Gronwallsche Lemma (vgl. auch Lemma 2,3 in [3]) liefert dann nach (30) die Ungleichung

$$(31) \quad \|x_\varepsilon(\tau) - x_0(\tau)\| \leqq \\ \leqq \left[\|\tilde{x}_\varepsilon - \tilde{x}_0\| + O(\sqrt{\varepsilon}) + O\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right)\chi(\varepsilon) + O(\sqrt{\psi(\varepsilon)}) \right] e^{(K+\Omega^*)(\tau - T_1)}$$

und im Fall (30a) die Ungleichung

$$(31a) \quad \|x_\varepsilon(\tau) - x_0(\tau)\| \leqq \\ \left[\|\tilde{x}_\varepsilon - \tilde{x}_0\| + O(\sqrt{\omega(\varepsilon)}) + O\left(\frac{1}{\sqrt{\omega(\varepsilon)}}\right)\chi(\varepsilon) + O(\sqrt{\psi(\varepsilon)} \right] e^{(k+\Omega^*)(\tau - T_1)}$$

für alle $\tau \in \langle T_1, T_2 \rangle$ und $\varepsilon \to 0+$.

Für die Definition von $\tilde{F}_\varepsilon(x, t)$ benützen wir die allgemeinere Beziehung (8a) und formulieren für diesen Fall das eben erreichte Ergebniss:

Satz 1. *Es seien die Konstanten* $L \geqq 0, \delta > 0, 0 < A < 1, K \geqq 0, K^0 \geqq 0, \Omega^* \geqq 0, \Omega \geqq 0$ *gegeben. Dann gibt es zu jedem* $\eta > 0$ *ein* $\mu > 0$, *sodass folgendes gilt:*

Sei $F_0(x, t) = \hat{F}_0(x, t) + \tilde{F}_0(x, t)$, *wo* $\hat{F}_0(x, t) \in \mathscr{F}(G, K^0)$, $\tilde{F}_0(x, t) \in \mathscr{F}(G, \Omega^*)$, $F_\varepsilon(x, t) = \hat{F}_\varepsilon(x, t) + \tilde{F}_\varepsilon(x, t)$, *wo* $\hat{F}_\varepsilon(x, t) \in \mathscr{F}(G, K)$ *und* $\tilde{F}_\varepsilon(x, t)$ *in* (8a) *bestimmt ist. Sei weiter* $\tilde{x}_\varepsilon, \tilde{x}_0 \in M$, $-\infty < T_1 < T_2 < +\infty$ *und für alle* $(x, t), (x, t + \vartheta) \in M \times \times \langle T_1, T_2 \rangle$, $0 < \vartheta \leqq 1$ *sei* (15), (16a) *erfüllt, wobei*

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} \omega(\varepsilon) = 0 \,, \quad \lim_{\varepsilon \to 0+} \psi(\varepsilon) = 0 \,, \quad \lim_{\varepsilon \to 0+} \frac{\chi(\varepsilon)}{\sqrt{\omega(\varepsilon)}} = 0 \,.$$

Wenn $x_\varepsilon(\tau)$ *eine Lösung der Gleichung* (13) *in* $\langle T_1, T_2 \rangle$, $x_\varepsilon(T_1) = \tilde{x}_\varepsilon$ *und* $x_0(\tau)$ *eine Lösung der Gleichung* (14) *in* $\langle T_1, T_2 \rangle$, $x_0(T_1) = \tilde{x}_0$ *ist und wenn* $\|\tilde{x}_\varepsilon - \tilde{x}_0\| < \mu$, $0 < \varepsilon < \mu$, *dann gilt*

$$\|x_\varepsilon(\tau) - x_0(\tau)\| < \eta \tag{32}$$

für alle $\tau \in \langle T_1, T_2 \rangle$.

Bemerkung. Der Satz 1 gibt die stetige Abhängigkeit der Lösungen der Gleichung (13) für $\varepsilon \to 0+$ an und besagt, dass für hinreichend kleines $\varepsilon > 0$ in einem Intervall eine Lösung der Gleichung (13) der, von demselben Ausgangspunkt ausgehenden, Lösung der Gleichung (14) beliebig gleichmässig nahe ist.

Weiter wollen wir nun das Problem, welches den obigen Untersuchungen zum Grunde liegt und diese angeregt hat, darstellen.

Gegeben sei das Differentialgleichungssystem

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon[f(x, t) + \sum_{i=-\infty}^{\infty} \Phi_i(x)\, \delta(t - \varphi_i(x))] \tag{33}$$

in G, wobei $\varepsilon > 0$ ein kleiner Parameter ist und δ die Diracfunktion bedeutet. Sei dabei $f(x, t) : G \to E_n$ derartig, dass

$$\|f(x, t)\| \leqq K \tag{34}$$

$$\|f(x, t) - f(y, t)\| \leqq K\|x - y\| \tag{35}$$

für $(x, t), (y, t) \in G$ gilt; für $\varphi_k(x) : M \to E_1$ und $\Phi_k(x) : M \to E_n$ gelte (1), (2), (3), (4) und (6).

Ferner setze man voraus, dass

$$\lim_{T \to \infty} \int_a^{a + \vartheta T} [f(x, \tau) - f^*(x)] = 0 \,, \tag{36}$$

$$\lim_{T \to \infty} \sqrt{(T)} \left[\frac{1}{T} \sum_{i = s(x,a)+1}^{s(x, a + \vartheta T)} \Phi_i(x) - \vartheta\, \Phi^*(x)\right] = 0 \tag{37}$$

für alle $(x, a) \in G$, $0 < \vartheta \leqq 1$.

So, wie bei der Methode der Mittelwertannäherung von Krylov-Bogoljubov, soll das Verhalten der Lösungen der Gleichung (33) (der Begriff einer Lösung von (33) wird weiter festgelegt) für $\varepsilon \to 0+$ untersucht und mit den Lösungen der Mittelwertgleichung

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon[f^*(x) + \Phi^*(x)] \tag{38}$$

vergleicht werden.

Wenn man in (33) die, bei Untersuchungen dieser Art übliche, Transformation $t = \tau/\varepsilon$ formalerweise durchführt, übergeht (33) in

$$\frac{dx}{d\tau} = f\left(x, \frac{\tau}{\varepsilon}\right) + \varepsilon \sum_{i=-\infty}^{\infty} \Phi_i(x)\, \delta(t - \varepsilon\, \varphi_i(x)) . \tag{39}$$

Definiere man für $(x, t) \in G$

$$\hat{F}_\varepsilon(x, t) = \int_0^t f\left(x, \frac{\tau}{\varepsilon}\right) d\tau \tag{40}$$

und lege man $F_\varepsilon(x, t) = \hat{F}_\varepsilon(x, t) + \tilde{F}_\varepsilon(x, t)$, wobei $\tilde{F}_\varepsilon(x, t)$ so, wie in (8) bestimmt ist. Unter einer Lösung der Gleichung (39) werden wir die Lösungen der verallgemeinerten Differentialgleichung

$$\frac{dx}{d\tau} = DF_\varepsilon(x, t) \tag{41}$$

mit dem oben festgelegten $F_\varepsilon(x, t)$ verstehen. Von (34) und (35) folgt nach (40) einfach $\hat{F}_\varepsilon(x, t) \in \mathscr{F}(G, K)$ und also ist auch $F_\varepsilon(x, t) \in \mathscr{F}(G, K, \{\varepsilon\varphi_k, \varepsilon\Phi_k\})$. Nach (36) ist für $f^*(x) : M \to E_n$ von (34)

$$\|f^*(x)\| \leqq K \tag{42}$$

für $x \in M$ und von (35) ist

$$\|f^*(x) - f^*(y)\| \leqq K\|x - y\| \tag{43}$$

für $x, y \in M$. Nach (37) folgt für $\Phi^*(x) : M \to E_n$ mit Hilfe von (3) und (7) die Ungleichung

$$\|\Phi^*(x)\| \leqq \Omega^* , \tag{44}$$

wenn $x \in M$ ist und mit Hilfe von (4), (7) ist

$$\|\Phi^*(x) - \Phi^*(y)\| \leqq \Omega^*\|x - y\| \tag{45}$$

für $x, y \in M$, dabei ist $\Omega^* = \Omega/\delta \geqq 0$.

Legen wir nun für $(x, t) \in G : \hat{F}_0(x, t) = f^*(x)\, t,\ \tilde{F}_0(x, t) = \Phi^*(x)\, t$ und

$$F_0(x, t) = \hat{F}_0(x, t) + \tilde{F}_0(x, t) = (f^*(x) + \Phi^*(x))\, t\,. \tag{46}$$

Offenbar ist $\hat{F}_0(x, t) \in \mathscr{F}(G, K)$, $\tilde{F}_0(x, t) \in \mathscr{F}(G, \Omega^*)$. Wähle man $0 < \vartheta \leqq 1$, $(x, t) \in$ $\in G$. Es ist

$$\Delta_t^\vartheta[\hat{F}_\varepsilon(x, t) - \hat{F}_0(x, t)] = \int_t^{t+\vartheta} [f(x, (\tau/\varepsilon)) - f^*(x)]\, \mathrm{d}\tau = \varepsilon \int_{t/\varepsilon}^{t/\varepsilon+\vartheta/\varepsilon} [f(x, \tau) - f^*(x)]\, \mathrm{d}\tau\,.$$

Daher ist nach (36)

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \|\Delta_t^\vartheta[\hat{F}_\varepsilon(x, t) - \hat{F}_0(x, t)]\| = \lim_{\varepsilon \to 0} \psi(\varepsilon) = 0\,.$$

Soeben kann man zeigen, dass von (37) auch

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \|\Delta_t^\vartheta[\tilde{F}_\varepsilon(x, t) - \tilde{F}_0(x, t)]\| = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \chi(\varepsilon) = 0$$

für $(x, t) \in G$ gelten wird. Wir bemerken noch, dass die verallgemeinerte Differentialgleichung

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau} = DF_0(x, t) \tag{47}$$

mit $F_0(x, t)$ von (46) der Gleichung

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f^*(x) + \Phi^*(x) \tag{48}$$

äquivalent ist (vgl. [1]).

Als wir soeben zeigten, sind alle Voraussetzungen des Satzes 1 für die Gleichungen (41) und (48) erfüllt und also gilt dieser für diese Gleichungen.

Sei nun $x_\varepsilon(\tau)$ in $\langle T_1, T_2 \rangle$ eine Lösung der Gleichung (41), sodass $x_\varepsilon(T_1) = \tilde{x}_\varepsilon$ ist. Nach der Definition der Lösung gilt für alle $\xi \in \langle T_1, T_2 \rangle$

$$x_\varepsilon(\xi) = \tilde{x}_\varepsilon + \int_{T_1}^{\xi} DF_\varepsilon(x_\varepsilon(\tau), t)\,.$$

Daher ist für alle $\xi \in \langle T_1/\varepsilon, T_2/\varepsilon \rangle$ offenbar

$$x_\varepsilon(\varepsilon\xi) = \tilde{x}_\varepsilon + \int_{T_1}^{\varepsilon\xi} DF_\varepsilon(x_\varepsilon(\tau), t)\,.$$

Wenn man im letzten Integral $\tau = \varepsilon\sigma$ legt, ergibt sich (nach der Behauptung 2,1 in [3]) nach dieser Transformation die Gleichung

$$\int_{T_1}^{\varepsilon\xi} DF_\varepsilon(x_\varepsilon(\tau), t) = \int_{T_1/\varepsilon}^{\xi} D_s F_\varepsilon(x_\varepsilon(\varepsilon\sigma), \varepsilon s)$$

und es gilt also für alle $\xi \in \langle T_1/\varepsilon, T_2/\varepsilon\rangle$ die Gleichung

$$x_\varepsilon(\varepsilon\xi) = \tilde{x}_\varepsilon + \int_{T_1/\varepsilon}^{\xi} DF_\varepsilon(x_\varepsilon(\varepsilon\tau), \varepsilon t) .$$

Diese letzte Gleichung bedeutet, dass die Funktion $x_\varepsilon(\varepsilon\tau)$ im Intervall $\langle T_1/\varepsilon, T_2/\varepsilon\rangle$ eine Lösung der Gleichung

$$\frac{dx}{d\tau} = DF_\varepsilon(x, \varepsilon t) \tag{49}$$

ist, welche für $\tau = T_1/\varepsilon$ dem Wert $\tilde{x}_\varepsilon$ gleich ist. Wenn anderseits $y_\varepsilon(\tau)$ in $\langle T_1/\varepsilon, T_2/\varepsilon\rangle$ eine Lösung der Gleichung (49) ist, für welche $y_\varepsilon(T_1/\varepsilon) = \tilde{x}_\varepsilon$ gilt, dann ist $y_\varepsilon(\tau/\varepsilon)$ eine Lösung der Gleichung (41) in $\langle T_1, T_2\rangle$, welche für $\tau = T_1$ den Wert $\tilde{x}_\varepsilon$ annimmt. Gleicherweise kann gezeigt werden, dass wenn $x_0(\tau)$ eine in $\langle T_1, T_2\rangle$ bestimmte Lösung der Gleichung (47) mit $x_0(T_1) = \tilde{x}_0$ ist, dann ist $x_0(\varepsilon\tau)$ in $\langle T_1/\varepsilon, T_2/\varepsilon\rangle$ eine Lösung der Gleichung

$$\frac{dx}{d\tau} = DF_0(x, \varepsilon t) , \tag{50}$$

welche für $\tau = T_1/\varepsilon$ dem Wert $\tilde{x}_0$ gleich ist. Umgekehrt, wenn $y_0(\tau)$ in $\langle T_1/\varepsilon, T_2/\varepsilon\rangle$ eine Lösung der Gleichung (50) mit $y_0(T_1/\varepsilon) = \tilde{x}_0$ ist, dann ist $y_0(\tau/\varepsilon)$ eine Lösung der Gleichung (47) in $\langle T_1, T_2\rangle$, welche für $\tau = T_1/\varepsilon$ den Wert $\tilde{x}_0$ annimmt.

Wir legten bisher den Begriff der Lösung der Gleichung (33) noch nicht fest. Wir werden also unter einer Lösung der Gleichung (33) eine Lösung der verallgemeinerten Differentialgleichung (49) verstehen. Dieser Lösungsbegriff fällt mit dem, bei der Lösung von technischen Problemen gebrauchlichen Lösungsbegriff der Gleichung (33) zusammen, wenn man verlangt, dass die Lösung von (33) eine von links stetige Funktion sein soll. Diese Lösungen haben auch die Eigenschaft, dass falls die Lösung eine Fläche der Form $t = \varphi_k(x)$ in E_{n+1} trifft, dann besitzt diese Lösung eine Unstetigkeit $\Phi_k(z_k)$, wobei (z_k, t_k) der Punkt ist, in welchem die Lösung die Fläche trifft und für welchen also $t_k = \varphi_k(z_k)$ gilt.

Es ist offensichtlich, dass jede Lösung der Gleichung (50) zugleich auch eine Lösung der gewöhnlichen Gleichung

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon[f^*(x) + \Phi^*(x)] \tag{51}$$

ist und umgekehrt. Daher folgt nun, nach der Anwendung des Satzes 1, der folgende Satz:

Satz 2. *Es seien* $L \geqq 0$, $\delta > 0$, $0 < A < 1$, $K \geqq 0$, $\Omega \geqq 0$ *gegebene Konstanten. Dann gibt es zu jedem* $\eta > 0$ *ein* $\varepsilon_0 > 0$, *sodass folgendes gilt:*

Sei $f(x, t) : G \to E_n$, $\varphi_k(x) : M \to E_1$, $\Phi_k(x) : M \to E_n$ *so gegeben, dass* (34), (35), (1), (2), (3), (4) *und* (6) *gilt. Sei* (36) *und* (37) *erfüllt und sei* $-\infty < T_1 < T_2 < +\infty$, $\tilde{x}_\varepsilon, \tilde{x}_0 \in M$. *Wenn* $y_0(\tau)$ *eine Lösung der Gleichung* (48) *in* $\langle T_1, T_2 \rangle$ *ist,* $y_0(T_1) = \tilde{x}_0$ *und* $x_\varepsilon(\tau)$ *eine Lösung der Gleichung* (33) *in* $\langle T_1/\varepsilon, T_2/\varepsilon \rangle$, $x_\varepsilon(T_1/\varepsilon) = \tilde{x}_\varepsilon$ *und wenn* $\|\tilde{x}_\varepsilon - \tilde{x}_0\| < \varepsilon_0$, $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ *ist, dann gilt*

$$\|x_\varepsilon(\tau) - y_0(\varepsilon\tau)\| < \eta$$

für alle $\tau \in \langle T_1/\varepsilon, T_2/\varepsilon \rangle$.

Der Satz 2 gibt eine Aussage, welche den üblichen Mittelwertannäherungssätzen für gewöhnliche Differentialgleichungen ohne Impulsen nahe steht.

Literatur

[1] *Kurzweil, J.:* Generalized Ordinary Differential Equations and Continuous Dependence on a Parameter, Czech. Math. J. *7 (82)*, (1957), 418—449.

[2] *Kurzweil, J.:* Generalized Differential Equations, Czech. Math. J. *8 (83)*, (1958), 360—388.

[3] *Schwabik Š.:* Stetige Abhängigkeit von einem Parameter und invariante Mannigfaltigkeiten für verallgemeinerte Differentialgleichungen, Czech. Math. J. *19 (94)*, (1969), 398—427.

[4] *Schwabik Š.:* Verallgemeinerte gewöhnliche Differentialgleichungen; Systeme mit Impulsen auf Flächen I, Czech. Math. J. 20 (95), (1970), 468—490.

[5] *Schwabik Š.:* Verallgemeinerte gewöhnliche Differentialgleichungen; Systeme mit Impulsen auf Flächen II, Czech. Math. J. *21 (96)*, (1971), 172—197.

Anschrift des Verfassers: Praha 1, Žitná 25, ČSSR (Matematický ústav ČSAV v Praze).