Czechoslovak Mathematical Journal

Břetislav Novák

Über eine Methode der Ω-Abschätzungen

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 21 (1971), No. 2, 257–279

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/101020

Czechoslovak Mathematical Journal, 21 (96) 1971, Praha

ÜBER EINE METHODE DER Ω-ABSCHÄTZUNGEN

BŘETISLAV NOVÁK, Praha

(Eingelangt am 17. Dezember 1969)

§1. Einleitung. Es sei r eine natürliche Zahl, $r \geqq 2$ und sei

$$Q(u) = Q(u_j) = \sum_{j,l=1}^{r} a_{jl} u_j u_l$$

eine positiv definite quadratische Form in r Veränderlichen mit der Determinante D; $\bar{Q}$ die zu Q konjugierte Form. Seien weiter

$$b_1, b_2, \ldots, b_r, \quad M_1 > 0, M_2 > 0, \ldots, M_r > 0 \tag{1}$$

und

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r \tag{2}$$

reelle Zahlen. Sei $\lambda_0 = 0$ und $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots$ sei die Folge aller positiven Werte der Form $Q(M_j m_j + b_j)$ mit ganzen $m_1, m_2, \ldots, m_r$. Für nichtnegative ganze m sei

$$a_m = \sum \exp\left(2\pi i \sum_{j=1}^{r} \alpha_j u_j\right),$$

wo über alle solchen Systeme $u_1, u_2, \ldots, u_r$ summiert wird, für welche $Q(u_j) = \lambda_m$, $u_j \equiv b_j \pmod{M_j}$, $j = 1, 2, \ldots, r$ ist. Für $x \geqq 0$ sei

$$A(x) = \sum_{\lambda_m \leqq x} a_m, \quad V(x) = \frac{\pi^{r/2} x^{r/2} \exp\left(2\pi i \sum_{j=1}^{r} \alpha_j b_j\right)}{\sqrt{(D)}\, \Gamma(\frac{1}{2}r + 1) \prod_{j=1}^{r} M_j} \delta \tag{3}$$

($\delta = 1$, wenn alle Zahlen $\alpha_1 M_1, \alpha_2 M_2, \ldots, \alpha_r M_r$ ganz sind, sonst $\delta = 0$).

Eine Grundfrage der Gitterpunkttheorie in Ellipsoiden ist das Studium der womöglich besten O – und Ω – Abschätzungen der Funktion

$$P(x) = A(x) - V(x). \tag{4}$$

Der „wahre" Exponent der Funktion (4) d. h. die Zahl

$$\limsup_{x \to +\infty} \frac{\lg |P(x)|}{\lg x}$$

ist nur in einigen Spezialfällen bekannt (vgl. z. B. [1]–[3], [10]). Abgesehen von den Fällen $r = 2, 3, 4$, bei denen spezielle wirksame Methoden benützt werden, geht die wirksamste O – Methode von der Beziehung $(a, x > 0)$

$$A'(x) = \tfrac{1}{2} \lim_{\varepsilon \to 0+} (A(x + \varepsilon) + A(x - \varepsilon)) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{e^{xs}\,\Theta(s)}{s}\,\mathrm{d}s \tag{5}$$

aus, in der das letzte (nicht absolut konvergente) Integral als

$$\lim_{T \to +\infty} \int_{a-iT}^{a+iT} \dots \mathrm{d}s$$

augefasst wird, wobei der Integrationsweg die die Punkte $a - iT$, $a + iT$ verbindende Strecke ist. Die Funktion $\Theta(s)$ ist dabei in der Halbebene $\operatorname{Re} s > 0$ durch die Beziehung

$$\Theta(s) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m e^{-\lambda_m s} \tag{6}$$

definiert. Wenn man die Tatsache übergeht, dass es meistens vorteilhaft ist das nicht absolut konvergente Integral (5) mit dem Studium der Funktion

$$\int_0^x A(y)\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{e^{xs}\,\Theta(s)}{s^2}\,\mathrm{d}s$$

zu eliminieren, dann kann man sagen, dass man aus (5) sehr gute O-Abschätzungen der Funktion (4) erhält, wenn gute O-Abschätzungen der Funktion (6) in der Nähe der Imaginären Achse vorhanden sind (in (5) setzen wir nämlich $a = 1/x$ und das Integral über eine kleine Umgebung des Punktes $s = 1/x$ können wir dann mit einem verhältnissmässig kleinen Fehler durch die Funktion $V(x)$ ersetzen).

Anstatt der Funktion (4) untersuchen wir allgemeiner für reelle $\varrho \geqq 0$ die Funktion

$$P_\varrho(x) = A_\varrho(x) - V_\varrho(x)\,, \tag{7}$$

wo $A_0(x) = A(x)$, $V_0(x) = V(x)$ und für $\varrho > 0$

$$A_\varrho(x) = \frac{1}{\Gamma(\varrho + 1)} \sum_{\lambda_m \leqq x} a_m (x - \lambda_m)^\varrho, \tag{8}$$

und

$$V_\varrho(x) = \frac{\pi^{r/2} x^{r/2+\varrho} \exp\left(2\pi i \sum_{j=1}^{r} \alpha_j b_j\right)}{\sqrt{(D)}\,\Gamma(\tfrac{1}{2}r + \varrho + 1) \prod_{j=1}^{r} M_j}\,\delta \tag{9}$$

gesetzt wird. Also ist $P_0(x) = P(x)$ und

$$P_{\varrho+1}(x) = \int_0^x P_\varrho(y)\,\mathrm{d}y\,. \tag{10}$$

Es ist leicht zu sehen, dass $(a > 0)$

$$A_\varrho(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{e^{xs}\,\Theta(s)}{s^{\varrho+1}}\,\mathrm{d}s \tag{11}$$

ist (für $\varrho = 0$ wird diese Beziehung im Sinne (5) aufgefasst, für $\varrho > 0$ ist das Integral in (11) absolut konvergent). O-Abschätzungen für die Funktion (7) kann man auch für $\varrho > 0$ so finden, wie es oben (siehe [1], [3], [9]) angedeutet wurde.

Die Funktionen (7)–(9) führte schon LANDAU in [8] (S. 23) ein (für ganzes ϱ) und benützte diese in seinen Methoden der O- und Ω-Abschätzungen (vgl. §6), welche folgende Ergebnisse liefern:

$$P_\varrho(x) = O(x^{(r-1)/4+\varrho/2}) \qquad \text{für} \quad \varrho > \frac{r}{2} - \frac{1}{2}\,,$$

$$P_\varrho(x) = O(x^{(r-1)/4+\varrho/2}\lg x) \quad \text{für} \quad \varrho = \frac{r}{2} - \frac{1}{2}\,, \quad \varrho \geqq 0\,,$$

$$P_\varrho(x) = O(x^{r/2-r/(r+1-2\varrho)+\varrho}) \quad \text{für} \quad 0 \leqq \varrho < \frac{r}{2} - \frac{1}{2}$$

und (wenn $A(x) \not\equiv 0$; den Fall $A(x) = 0$ für alle x schliessen wir von unseren Untersuchungen aus)

$$P_\varrho(x) = \Omega(x^{(r-1)/4+\varrho/2})\,. \tag{12}$$

Für $\varrho = 0$ finden wir den Beweis in [8]. Für $\varrho \geqq 0$ sind alle angeführten Abschätzungen (unter der Voraussetzung $M_j = 1$, $\alpha_j = b_j = 0$, $j = 1, 2, \ldots, r$, welche nicht wesentlich ist) in der Arbeit [7] von JARNÍK enthalten, welche also auch das oben formulierte Problem vom Studium der O- und Ω-Abschätzungen für die Funktion (4) auf die Funktion (7) verallgemeinert. Die obigen Formeln lösen also das Problem für $\varrho > \frac{1}{2}r - \frac{1}{2}$. Wenn vorausgesetzt wird, dass die Koeffizienten der Form Q ganzzahlig sind, $\alpha_j = b_j = 0$, $M_j = 1$, $j = 1, 2, \ldots, r$, dann kann das folgende merkwürdige Ergebniss (siehe [7]) bewiesen werden:

$$P_\varrho(x) = O(x^{r/2-1})\,, \quad P_\varrho(x) = \Omega(x^{r/2-1})\,, \quad 0 \leqq \varrho < \tfrac{1}{2}r - 2\,. \tag{13}$$

Unter den angeführten Voraussetzungen sind also bisher definitive Ergebnisse für $\frac{1}{2}r - 2 \leqq \varrho \leqq \frac{1}{2}r - \frac{1}{2}$, $\varrho \geqq 0$ nicht bekannt (ausführlicher siehe [7]).

Zusammen mit der Funktion (4) wird üblicherweise (siehe z. B. [4], [5] und [11]) in gleichem Sinne auch die Funktion

$$M(x) = \int_0^x |P(y)|^2 \, dy$$

studiert. Es erweist sich also als natürlich allgemein für $\varrho \geqq 0$ die Funktion

$$M_\varrho(x) = \int_0^x |P_\varrho(y)|^2 \, dy \tag{14}$$

einzuführen (vgl. z. B. [12], [15]).

In den Arbeiten des Verfassers [12], [13] und [15] werden O-Abschätzungen für die Funktionen (7) und (14) untersucht. Das Ziel dieser Arbeit ist eine verhältnissmässig einfache und wirksame Methode zur Bestimmung von ihren Ω-Abschätzungen anzuführen. Für die Funktion (4) wurde deren Idee in der Arbeit [10] benützt unter der Voraussetzung, dass die Koeffizienten der Form Q und die Zahlen (1) ganz sind. Die allgemeine Beschreibung der Methode ist in §2 gegeben und deren Anwendungen dann in §4 und §5. Ein kurzer Vergleich mit anderen bekannten Ω-Methoden ist in §6 gegeben.

§2. Allgemeine Formulierung der Methode. In diesem Paragraphen seien a_m komplexe Zahlen, $m = 0, 1, 2, \ldots$, $0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots$, $\lim_{n \to +\infty} \lambda_n = +\infty$. Sei weiter für ein bestimmtes $\alpha > 0$

$$\sum_{\lambda_m \leqq x} |a_m| = O(x^\alpha) \tag{15}$$

für $x \to +\infty$. Die Funktion $A_\varrho(x)$ sei für $x \geqq 0$, $\varrho \geqq 0$ durch die Beziehungen (8) und (3) definiert,

$$V_\varrho(x) = \frac{M x^{\alpha+\varrho}}{\Gamma(\alpha + \varrho + 1)},$$

wo M eine bestimmte komplexe Zahl ist, $P_\varrho(x) = A_\varrho(x) - V_\varrho(x)$. Wenn wir die Funktion $\Theta(s)$ durch die Beziehung (6) definieren, folgt aus (15), dass die Reihe (6) absolut und gleichmässig konvergent in jedem Bereich der Gestalt $\operatorname{Re} s \geqq \varepsilon > 0$ ist; die Funktion $\Theta(s)$ ist also in der Halbebene $\operatorname{Re} s > 0$ holomorph. Mittels einer leichten Berechnung findet man, dass für jedes $\varrho \geqq 0$ und jedes komplexe s, $\operatorname{Re} s > 0$ ist

$$\Theta(s) = s^{\varrho+1} \int_0^\infty e^{-xs} A_\varrho(x) \, dx$$

(diese Beziehung ist offenbar die inverse Transformation zu (11)) und

$$\Theta(s) - \frac{M}{s^\alpha} = s^{\varrho+1} \int_0^\infty e^{-xs} P_\varrho(x) \, dx . \tag{16}$$

Sei nun $g(x)$ eine positive stetige Funktion, das Integral

$$(17) \qquad G(t) = \int_0^\infty e^{-tx}\, g(x)\, \mathrm{d}x$$

sei für jedes $t > 0$ konvergent und

$$(18) \qquad \int_0^\infty g(x)\, \mathrm{d}x = +\infty .$$

Sei

$$(19) \qquad P_\varrho(x) = o(g(x))$$

für $x \to +\infty$. Wenn also $\varepsilon > 0$ gegeben ist, haben wir für $x \geqq x_0 = x_0(\varepsilon)$ $|P_\varrho(x)| \leqq \leqq \frac{1}{2}\varepsilon\, g(x)$ und also auch

$$\left|\int_0^\infty e^{-xs} P_\varrho(x)\, \mathrm{d}x\right| \leqq \int_0^{x_0} |P_\varrho(x)|\, \mathrm{d}x + \frac{\varepsilon}{2}\int_{x_0}^\infty e^{-x\sigma} g(x)\, \mathrm{d}x$$

für alle $s = \sigma + it$, $\sigma > 0$ und alle t d. h.

$$\left|\int_0^\infty e^{-xs} P_\varrho(x)\, \mathrm{d}x\right| \leqq \int_0^{x_0} |P_\varrho(x)|\, \mathrm{d}x + \frac{\varepsilon}{2}\, G(\sigma) .$$

Aus (18) ergibt sich aber $\lim\limits_{t \to 0+} G(t) = +\infty$ und also ist für alle $0 < \sigma < \sigma_0 = \sigma_0(\varepsilon)$ und für alle reellen t

$$\left|\int_0^\infty e^{-xs} P_\varrho(x)\, \mathrm{d}x\right| \leqq \varepsilon\, G(\sigma) .$$

Aus der Voraussetzung (19) bekommt man also, dass

$$(20) \qquad \int_0^\infty e^{-xs} P_\varrho(x)\, \mathrm{d}x = o(G(\sigma))$$

ist für $s = \sigma + it$, $\sigma \to 0+$ gleichmässig für alle reellen t.

Wenn also eine Folge $s_n = \sigma_n + it_n$ von Zahlen existiert, sodass $\sigma_n > 0$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \sigma_n = = 0$ und

$$(21) \qquad \limsup_{n \to +\infty} \left|\frac{\Theta(s_n) - \dfrac{M}{s_n^\alpha}}{s_n^{\varrho+1}}\right| \frac{1}{G(\sigma_n)} > 0$$

ist, dann bekommt man aus den obigen Betrachtungen wegen (16) und (20), dass die Beziehung (19) nicht gelten kann d. h. es ist

$$P_\varrho(x) = \Omega(g(x)) .$$

Bemerkung 1. Wenn in der oben eingeführten Bezeichnung

(22) $$\lim_{n\to+\infty} |s_n|^{\varrho+1+\alpha} G(\sigma_n) = +\infty$$

ist oder wenn $M = 0$ ist, dann genügt es anstatt (21)

(23) $$\limsup_{n\to+\infty} \left|\frac{\Theta(s_n)}{s_n^{\varrho+1}}\right| \frac{1}{G(\sigma_n)} > 0$$

zu schreiben.

Bemerkung 2. Wenn $g(x) = x^\beta \lg^\gamma (x + 1)$ ist, $\beta, \gamma \geqq 0$, dann gilt offensichtlich (18), das Integral (17) ist für jedes $t > 0$ konvergent und es ist

$$G(t) = \frac{\Gamma(\beta + 1)}{t^{\beta+1}}$$

für $\gamma = 0$,

$$0 < \liminf_{t\to 0+} \frac{G(t)\, t^{\beta+1}}{\lg^\gamma \frac{1}{t}} \leqq \limsup_{t\to 0+} \frac{G(t)\, t^{\beta+1}}{\lg^\gamma \frac{1}{t}} < +\infty$$

für $\gamma \geqq 0$.

Wir modifizieren nun diese Methode zu einer Anwendung auf die Funktion (14). Man setze voraus, dass

(24) $$M_\varrho(x) = o(g(x))$$

(für $x \to +\infty$) ist, wo $g(x)$ wieder eine positive stetige Funktion ist. Wir gehen wieder von der Beziehung (16) aus. Sei $T > 0$, $s = \sigma + it$, $\sigma > 0$ und für ein bestimmtes $\beta > 0$ sei

(25) $$P_\varrho(x) = O(x^\beta)$$

(für $x \to +\infty$).[1]) Wir schreiben

(26) $$\int_0^\infty e^{-xs} P_\varrho(x)\, \mathrm{d}x = \int_0^T e^{-xs} P_\varrho(x)\, \mathrm{d}x + \int_T^\infty e^{-xs} P_\varrho(x)\, \mathrm{d}x\,.$$

Für das erste der beiden Integrale verwenden wir die Schwarzsche Ungleichung

$$\left|\int_0^T e^{-xs} P_\varrho(x)\, \mathrm{d}x\right| \leqq \left(\int_0^T e^{-2x\sigma}\, \mathrm{d}x\; M_\varrho(T)\right)^{1/2} < \frac{1}{\sqrt{(2\sigma)}} \sqrt{(M_\varrho(T)}$$

[1]) Nach (15) und der Definition der Funktionen $V_\varrho(x)$ und $P_\varrho(x)$ nach kann man $\beta = \alpha + \varrho$ setzen.

und im zweiten benützen wir (25). Nach einer einfachen Berechnung ergibt sich dann die Beziehung

$$\int_T^\infty e^{-xs} P_\varrho(x)\,\mathrm{d}x = O\left(\frac{e^{-T\sigma/2}}{\sigma^{\beta+1}}\right)$$

gleichmässig für alle reellen $\sigma > 0$, t (die Konstanten in dieser Abschätzung hängen nur von β und von den Konstanten in (25) ab). Nun erhält man nach (16) und (24), dass für $T \to +\infty$, $s = \sigma + it$ ist

$$\frac{\Theta(s) - \dfrac{M}{s^\alpha}}{s^{\varrho+1}} = O\left(\frac{e^{-T\sigma/2}}{\sigma^{\beta+1}}\right) + o\left[\sqrt{\left(\frac{g(T)}{\sigma}\right)}\right] \tag{27}$$

gleichmässig für alle reellen t, σ ($\sigma > 0$).

Um diese Beziehung zu einem Widerspruch zu führen und damit die Abschätzung

$$M_\varrho(x) = \Omega(g(x))$$

zu beweisen, kann man z. B. so fortschreiten, dass man $T = \tau_n/\sigma_n$ setzt und Folgen $s_n = \sigma_n + it_n$, $\tau_n, \sigma_n > 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \sigma_n = 0$, $\tau_n/\sigma_n \to +\infty$ findet, sodass

$$\limsup_{n\to+\infty} \left|\frac{\Theta(s_n) - \dfrac{M}{s_n^\alpha}}{s_n^{\varrho+1}}\right| \sqrt{\left[\frac{\sigma_n}{g\left(\dfrac{\tau_n}{\sigma_n}\right)}\right]} > 0 \tag{28}$$

und

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{e^{-\tau_n}}{\sigma_n^{2\beta+1}\, g(\tau_n/\sigma_n)} = 0 \tag{29}$$

ist.

In manchen Fällen ist es vorteilhaft $\tau_n = \tau$ für alle n zu setzen und die zugehörigen Folgen so zu wählen, dass (28) gilt und dann τ so gross zu wählen, dass

$$\limsup_{n\to+\infty} \left|\frac{\Theta(s_n) - \dfrac{M}{s_n^\alpha}}{s_n^{\varrho+1}}\right| \sqrt{\left[\frac{\sigma_n}{g\left(\dfrac{\tau}{\sigma_n}\right)}\right]} > \limsup_{n\to+\infty} \frac{Ce^{-\tau/2}}{\sigma_n^{\beta+1}} \sqrt{\left[\frac{\sigma_n}{g\left(\dfrac{\tau}{\sigma_n}\right)}\right]}$$

gilt, wo C die Konstante in der Beziehung (27) ist. Dieses Verfahren ist im Fall $g(x) = x^{2\beta+1}$ besonders geeignet.

Bemerkung 3. Auch in diesem Fall kann man vereinfachte Bedingungen (28) wie in der Bemerkung 1 formulieren.

Bemerkung 4. Wenn (19) gilt, so ist offenbar

$$M_\varrho(x) = o\left(\int_0^x g^2(y)\mathrm{d}y\right),$$

man kann also aus Ω-Abschätzungen für $M_\varrho(x)$ Ω-Abschätzungen für die Funktion $P_\varrho(x)$ herleiten. Trotzdem ist es aber vorteilhaft die Ω-Abschätzungen für $P_\varrho(x)$ direkt herzuleiten, nachdem die Einführung des Parameters T in der angeführten Methode in vielen Fällen die Schärfe der Ergebnisse abschwächt.

In §4 und §5 werden die beiden erklärten Methoden in Einzelfällen angewandt. Die einzelnen Schritte werden also nur kurz durchgeführt.

§3. Transformation der Funktion $\Theta(s)$. Im Rest der ganzen Arbeit seien die Funktion $A_\varrho(x)$, $P_\varrho(x)$ usw., die Zahlen a_m, λ_m usw. wie in §1 definiert. In der Beziehung (15) kann man $\alpha = \frac{1}{2}r$ setzen und die Funktion $V_\varrho(x)$ von §2 fällt mit der Funktion $V_\varrho(x)$ von §1 zusammen, wenn man

$$M = \frac{\pi^{r/2}\exp\left(2\pi i \sum_{j=1}^{r} \alpha_j b_j\right)}{\sqrt{(D)}\prod_{j=1}^{r} M_j}\,\delta$$

setzt.

Mit dem Buchstaben c bezeichnen wir (eventuell auch verschiedene) positive Konstanten, welche nur von Q, ϱ und den Zahlen (1) und (2) abhängen. (Diese Werte betrachten wir als vorgegeben, $\varrho \geqq 0$.) Eine Abhängigkeit von weiteren Grössen schreiben wir in der üblichen Form ($c(\varepsilon)$, $c(\varepsilon, t)$ usw.). Wenn $|A| \leqq cB$ ist, schreiben wir kurz $A \ll B$. Wenn $A \ll B$, $B \ll A$ ist, schreiben wir $A \asymp B$. Die Symbole O, o und Ω sind in dem meisten Fällen zu dem Grenzübergang $x \to +\infty$ bezogen und die Konstanten, welche in deren Definitionen auftreten, sind vom „Typus c". Wenn die O (und ähnlich Ω) Beziehungen einen positiven Parameter ε enthalten, werden Konstanten der Art $c(\varepsilon)$ zugelassen. Die Zahlen m, h, k (eventuell mit einem Index) seien immer ganz, $k > 0$; wenn h, k gemeinsam auftreten sollten, sei immer $(h, k) = 1$ ($(h_1, k_1) = 1$ usw.). Die Zahl x sei hinreichend gross, $x > c$.

Aus den Betrachtungen im vorgehenden Paragraphen folgt die Wichtigkeit des Verhaltens der Funktion $\Theta(s)$ in der Nähe der imaginären Achse. Wir führen darum folgendes an:

Lemma 1. *Die Koeffizienten der Form Q und die Zahlen* (1) *seien ganz,* Re $s > 0$. *Dann ist*

(30)

$$\Theta(s) = \frac{\pi^{r/2}}{\sqrt{(D)}\prod_{j=1}^{r} M_j k^r \left(s - \frac{2\pi i h}{k}\right)^{r/2}} \sum_{m_1, m_2, \ldots, m_r = -\infty}^{+\infty} S_{h,k,(m)} \exp\left(-\frac{\pi^2 \bar{Q}\left(\frac{m_j}{M_j} - \alpha_j k\right)}{k^2\left(s - \frac{2\pi i h}{k}\right)}\right),$$

wo

$$S_{h,k,(m)} = S_{h,k,m_1,m_2,\dots,m_r} =$$

$$= \sum_{a_1,a_2,\dots a_r=1}^{k} \exp\left(-\frac{2\pi i h}{k} Q(a_j M_j + b_j) + \frac{2\pi i}{k}\sum_{j=1}^{r}\frac{m_j}{M_j}(a_j M_j + b_j)\right).$$

Für die sogenannten verallgemeinerten Gaussschen Summen (31) *gilt entweder* $S_{h,k,(m)} = 0$ *oder*

(31) $$S_{h,k,(m)} \asymp k^{r/2}\,.$$

Beweis. Siehe [10], Lemma 1,2 und 8.

Eher als wir die nötige Behauptung formulieren, führen wir noch einige Bezeichnungen ein. Unter der Voraussetzungen vom Lemma 1 sei

$$R_k = \min_{m_1,m_2,\dots,m_r} \bar{Q}\left(\frac{m_j}{M_j} - \alpha_j k\right).$$

Wenn nun die Beziehung

(32) $$R_k = \bar{Q}\left(\frac{m_j}{M_j} - \alpha_j k\right)$$

für ein einziges System $m_1, m_2, \dots, m_r$ erfüllt ist, sei

(33) $$S_{h,k} = S_{h,k,m_1,m_2,\dots,m_r}\,.$$

Im entgegengesetzten Fall wählen wir (z. B. nach der lexikographischen Ordnung) ein von den Systemen $m_1, m_2, \dots, m_r$, für welche (32) gilt, und den Wert $S_{h,k}$ definieren wir wieder nach (33). Wir bemerken noch (vgl. [9], S. 431, Bemerkung 2), dass es eine Konstante $c_1 = c$ so gibt, dass die Beziehung (32) für genau ein System $m_1\ m_2, \dots, m_r$ erfüllt ist, wenn $R_k < c_1$.

Wir sagen nun, dass das Paar h, k singulär ist, wenn entweder die Beziehung (32) für zwei verschiedene Systeme $m_1, m_2, \dots, m_r$ erfüllt ist (dann ist notwendig $R_k \geqq c_1$) oder wenn diese für genau ein System $m_1, m_2, \dots, m_r$ erfüllt ist und der zugehörige Wert (33) gleich Null ist. Eine natürliche Zahl k nennen wir singulär, wenn das Paar h, k singulär für alle h ist. Schliesslich sagen wir, dass der Singulärfall vorkommt, wenn es eine Konstante $c_2 = c$ gibt, sodass, wenn $R_k < c_2$ ist, dann ist k singulär.[2]) (Wir bemerken noch, dass man eigentlich genauer sagen sollte, dass k singulär in Bezug auf Q und die Zahlen (1) und (2) ist usw. Nachdem aber diese Grössen als fest aufgefasst werden, kann es zu keinem Missverständniss kommen.)

---

[2]) In [9], [14] usw. wurde der Singulärfall nur für den Fall eines rationalen Systems der Zahlen (2) definiert mittels einer äquivalenten Forderung: wenn $R_k = 0$ ist, ist $S_{h,k} = 0$ für alle h. Die Existenz von einem Singulärfall ist in [10], S. 393—395 gezeigt.

Lemma 2. *Es seien die Voraussetzungen vom Lemma 1 erfüllt. Dann ist für* $s = \sigma + 2\pi i h/k$, $\sigma > 0$

$$\left| \Theta(s) - \frac{S_{h,k}\pi^{r/2}\, e^{-\pi^2 R_k/k^2\sigma}}{\sqrt{(D)} \prod_{j=1}^{r} M_j \sigma^{r/2} k^r} \right| \leqq c\, \frac{e^{-c/k^2\sigma}}{\sigma^{r/2} k^{r/2}} . \tag{34}$$

Beweis. Wir benützen die Beziehung (30) und sondern das Glied mit den in (33) gebrauchten $m_1, m_2, \ldots, m_r$ ab. Es ist leicht zu sehen (vgl. [9], S. 431), dass in der übriggebliebenen Summe die Werte der Form $\bar{Q}$ von unten durch eine bestimmte Konstante c beschränkt sind. Wenn man nun (31) benützt ergibt sich daher leicht (vgl. [10], Lemma 6, S. 387) die Beziehung (34).

§4. Erste Anwendung der Methode von §2. Im ganzen Paragraphen seien die Koeffizienten der Form Q und die Zahlen (1) ganz. Als eine einfache Darstellung der Methode führen wir den folgenden Satz (für $\varrho = 0$ vgl. [10], S. 388, Satz 2, für $\alpha_j = b_j = 0$, $M_j = 1$, $j = 1, 2, \ldots, r$ vgl. [7], S. 154) an:

Satz 1. *Es seien die Zahlen* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ *rational und es existiere ein nichtsinguläres* k, *sodass* $R_k = 0$ *ist. Dann ist*

$$P_\varrho(x) = \Omega(x^{r/2-1}) .$$

Beweis. Sei H der kleinste gemeinsame Teiler der Zahlen $\alpha_1 M_1, \alpha_2 M_2, \ldots, \alpha_r M_r$. Es ist also $k \equiv 0 \pmod{H}$ und es gibt ein h sodass $S_{h,k} \neq 0$. Wenn $H > 1$ ist, dann ist notwendig $h \neq 0$ (und $\delta = 0$). Wenn $H = 1$ (und also $\delta = 1$), kann man offenbar $k = 1$ wählen und h beliebig und also von Null verschieden. Man setze in (21) $\sigma_n = 1/n$, $t_n = 2\pi h/k$, $\alpha = \frac{1}{2}r$. Nach dem Lemma 2 ist

$$\lim_{\sigma \to 0+} \sigma^{r/2}\Theta(\sigma + 2\pi i h/k) = \frac{\pi^{r/2} S_{h,k}}{\sqrt{(D)} \prod_{j=1}^{r} M_j k^r} \neq 0$$

und weiter ist $\lim_{n \to +\infty} s_n = \lim (\sigma_n + i t_n) = 2\pi i h/k \neq 0$. Die Bedingung (21) ist also für die Funktion $g(x) = x^{r/2-1}$ (vgl. Bemerkungen 1 und 2) erfüllt.

Bemerkung 5. Wenn ein k, welches die Voraussetzungen des Satzes 1 erfüllt, nich existiert, dann entsteht offenbar der Singulärfall. Im Singulärfall kann man allgemein folgende Abschätzungen (vgl. [13]) beweisen:

$$P_\varrho(x) = \begin{cases} O(x^{r/4+\varrho/2}) & \text{für} \quad \varrho > 0 , \\ O(x^{r/4} \lg x) & \text{für} \quad \varrho = 0 \end{cases}$$

(für $\varrho > \frac{1}{2}r - \frac{1}{2}$ sind nach §1 stärkere Ergebnisse bekannt).

Bemerkung 6. Unter den Voraussetzungen des Satzes 1 gilt auch

$$M_\varrho(x) = \Omega(x^{r-1}) \tag{35}$$

und man kann sogar viel mehr zeigen (vgl. [14], [15]). Wenn der Singulärfall entsteht, ist

$$M_\varrho(x) = O(x^{r/2+\varrho+1/2})$$

(siehe [12]) und sogar

$$M_\varrho(x) \asymp x^{r/2+\varrho+1/2} .$$

Es entsteht nun die Frage, welche Ergebnisse man in diesem Fall mittels der Methode von §2 beweisen kann. Wir schreiten folgenderweise fort (unter den Voraussetzungen des Satzes 1): Sei $P_\varrho(x) = O(x^{r/2-1})$ (diese Abschätzung gilt – vgl. [13] – bestimmt für $0 \leqq \varrho < \frac{1}{2}r - 2$). Wir benützen das Verfahren vom Ende des §2. Ebenso wie beim Beweis des Satzes 1 kann man feststellen, dass

$$\lim_{\sigma \to 0+} \frac{\Theta(s) - \dfrac{M}{s^{r/2}}}{s^{\varrho+1}}\, \sigma^{r/2} = \frac{\pi^{r/2} S_{h,k}}{\sqrt{(D)} \prod\limits_{j=1}^{r} M_j k^r} \left(\frac{k}{2\pi i h}\right)^{\varrho+1} \neq 0$$

ist, und also kann die Beziehung (27), wo man $g(x) = x^{r-1}$, $T = \tau/\sigma$ setzt, für kein genügend grosses τ gelten (vgl. auch Bemerkung 3). Für $0 \leqq \varrho < \frac{1}{2}r - 2$ haben wir also (unter der Voraussetzungen des Satzes 1) die Beziehung (35) beweisen.

Ein einigermassen schwächeres Ergebniss kann folgenderweise für alle $\varrho \geqq 0$ erreicht werden: Es seien die Voraussetzungen des Satzes 1 erfüllt und wir wählen h und k wie am Anfang dessen Beweises (d. h. $R_k = 0$, $h \neq 0$, $S_{h,k} \neq 0$). Nach Lemma 2 ist es leicht festzustellen, dass für alle hinreichend kleinen $\sigma > 0$, $s = \sigma + 2\pi i h/k$ ist

$$\left| \frac{\Theta(s) - \dfrac{M}{s^{r/2}}}{s^{\varrho+1}} \right| \gg \frac{|S_{h,k}|}{\sigma^{r/2} k^r} \left(\frac{k}{|h|}\right)^{\varrho+1} .$$

Wir benützen nun (27), wobei wir $\beta = \frac{1}{2}r + \varrho$ (vgl. (25)), $g(x) = x^{r-1-2\varepsilon}$, wo $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$, $T = \tau/\sigma$, $\tau > 0$ setzen. Es ergibt sich daher die Beziehung der Form

$$\frac{N}{\sigma^{r/2}} = O\left(\frac{e^{-\tau/2}}{\sigma^{r/2+\varrho+1}}\right) + o\left(\frac{\tau^{r/2-1/2-\varepsilon}}{\sigma^{r/2-\varepsilon}}\right) \tag{36}$$

für $\sigma \to 0+$, $\tau/\sigma \to +\infty$, wo $N = c(h, k)$. Man wähle nun $\sigma^\varepsilon \tau^{r/2-1/2-\varepsilon} = N$. Der Ausdruck

$$\frac{e^{-\tau/2}}{\sigma^{r/2+\varrho+1}} \frac{\sigma^{r/2-\varepsilon}}{\tau^{r/2-1/2-\varepsilon}}$$

hat dann für $\sigma \to 0+$ den Grenzwert Null und (36) kann also nicht gelten. Unter den Voraussetzungen des Satzes 1 ergibt sich also nach der Methode vom §2 für alle $\varrho \geqq 0$ nur das Ergebniss

$$M_\varrho(x) = \Omega(x^{r-1-\varepsilon}) .$$

Bemerken wir noch, dass das Ergebniss des Satzes 1 $P_\varrho(x) = \Omega(x^{r/2-1})$ für $\varrho > \frac{1}{2}r - \frac{3}{2}$ schwächer als die allgemein gültige Abschätzung (vgl. §1) $P_\varrho(x) = \Omega(x^{r/4-1/4+\varrho/2})$. Mittels der Methode von §2 bekommt man (unter den Voraussetzungen des Satzes 1) das schwächere Ergebniss

$$P_\varrho(x) = \Omega(x^{r/4-1/2+\varrho/2}) .$$

Die Überlegung wollen wir nur andeuten. Nach dem Lemma 2 in [10] stellen wir leicht fest, dass aus den Voraussetzungen des Satzes 1 (es sei z. B. $S_{h_0,k_0} \neq 0$) die Existenz einer Folge $h = h_n$, $k = k_n$ folgt, welche die Voraussetzungen des Satzes 1 erfüllt, $\lim_{n\to+\infty} k_n = +\infty$, $h_n \ll 1$ (z. B. $h_n = h_0$, $k_n = k_0 + 4nh_0HD^2 \prod_{j=1}^{r} M_j^4$, $n = 1, 2, \ldots$). Setzen wir nun in §2 $\sigma_n = 1/\tau k_n^2$, $t_n = 2\pi(h_n/k_n)$, $s_n = \sigma_n + it_n$, $\tau > 0$, dann ergibt sich aus Lemma 1, Lemma 2, dass für alle hinreichend grossen τ und n

$$\left| \frac{\Theta(s_n) - \dfrac{M}{s_n^{r/2}}}{s_n^{\varrho+1}} \right| \gg \frac{1}{k_n^{r/2-\varrho-1}\sigma_n^{r/2}}$$

ist. Wenn wir in der Beziehung (21) nun $g(x) = x^{r/4-1/2+\varrho/2}$ setzen, bekommen wir leicht einen Widerspruch.

Übergehen wir ferner zum Fall, dass mindestens eine der Zahlen (2) irrational ist. In [10] (Satz 3 und Lemma 9) wurde die Geltung folgender Behauptung gezeigt:

Für ein bestimmtes $\beta > 0$ sollen Folgen h_n, k_n $(n = 1, 2, \ldots)$ so existieren, dass $\lim_{n\to+\infty} k_n = +\infty$ und für $h = h_n$, $k = k_n$ und alle n ist

$$h \ll 1 \tag{37}$$

$$R_k \ll k^{-2\beta} \tag{38}$$

$$S_{h,k} \neq 0 . \tag{39}$$

Dann ist

$$P(x) = \Omega(x^{(r/4-1/2)(2\beta+1)/(\beta+1)}) .$$

Auf Grund der Methode von §2 kann man folgende zwei Sätze beweisen, von denen der erste diese Behauptung verallgemeinert.

Satz 2. *Sei $\beta > 0$, $0 \leqq \varrho \leqq \frac{1}{2}r - 1$ und es sollen unendlich viele nichtsinguläre Paare h, k so existieren, dass* (37) *und* (38) *für diese gilt. Dann ist*

$$P_\varrho(x) = \Omega(x^{(r/4-1/2)(2\beta+1)/(\beta+1)+\varrho/2(\beta+1)}) .$$

Satz 3. *Sei γ das Supremum aller Zahlen β, welche die Bedingung vom Satz 2 erfüllen, $0 \leqq \varrho \leqq \frac{1}{2}r - 1$. Dann gilt für alle $\varepsilon > 0$*

$$M_\varrho(x) = \Omega\left(x^{(r/2-1)(2\gamma+1)/(\gamma+1)+1+\varrho/(\gamma+1)-\varepsilon}\right)$$

(für $\gamma = +\infty$ definieren wir den Exponenten als $r - 1 - \varepsilon$).

Den Beweis führen wir für beide Sätze zugleich durch. Mit Rücksicht auf den Satz 1 und die Bemerkung 6 kann man voraussetzen, dass zumindest eine der Zahlen (2) irrational ist, d. h. $\delta = 0$. Zur Zahl β gibt es nach der Voraussetzung des Satzes 2 Folgen von Zahlen $h = h_n$, $k = k_n$, $\lim\limits_{n \to +\infty} k_n = +\infty$, sodass (37)–(39) gilt. Dasselbe kann auch unter den Voraussetzungen des Satzes 3 behauptet werden, wenn man $\beta < \gamma$ wählt. Sei nun

$$\sigma_n = \frac{R_{k_n}}{k_n^2}, \quad t_n = 2\pi\frac{h_n}{k_n}, \quad s_n = \sigma_n + it_n .$$

Nach Lemma 2 folgt, dass für alle hinreichend grossen n ($\sigma_n \to 0+$ für $n \to +\infty$)

$$|\Theta(s_n)| \geqq \frac{c}{\sigma_n^{r/2} k_n^{r/2}} \tag{40}$$

ist (wir gebrauchen (37), (39) und (31)).

Sei nun

$$f = \left(\frac{r}{4} - \frac{1}{2}\right)\frac{2\beta + 1}{\beta + 1} + \frac{\varrho}{2(\beta + 1)}$$

und sei $g(x) = x^f$ d. h. $G(\sigma) = \Gamma(f+1)/\sigma^{f+1}$ (siehe Bemerkung 2). Nach Benützung der Bemerkung 1, (21) und (40) genügt es zu zeigen, dass der Ausdruck

$$\frac{\sigma_n^{f+1}}{\sigma_n^{r/2} k_n^{r/2}} \frac{1}{|s_n|^{\varrho+1}} \tag{41}$$

für $n \to +\infty$ nicht den Grenzwert Null hat. Nachdem nach (37), (38)

$$|s_n| \asymp \sigma_n + 2\pi\frac{|h_n|}{k_n} \asymp \frac{1}{k_n} \tag{42}$$

ist, genügt es dasselbe für den Ausdruck

$$\sigma_n^{f+1-r/2} k_n^{\varrho+1-r/2} = \left(R_{k_n} k_n^{2\beta}\right)^{f+1-r/2}$$

zu zeigen. Aus der Voraussetzung $0 \leqq \varrho \leqq \frac{1}{2}r - 1$ folgt $f + 1 - \frac{1}{2}r \leqq 0$ und die Behauptung ergibt sich aus (38).

Zum Schluss des Beweises vom Satz 3 sei $g(x) = x^{2f+1-2\varepsilon}$, $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$. σ_n und t_n seien wie oben gewählt. Nach §2 genügt es mit Rücksicht auf (28) und (29) eine Folge τ_n zu finden sodass $\tau_n/\sigma_n \to +\infty$ und

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{e^{-\tau_n}}{\sigma_n^{r+2\varrho+1}} \frac{\sigma_n^{2f+1-2\varepsilon}}{\tau_n^{2f+1-2\varepsilon}} = 0 \tag{43}$$

und so dass der Ausdruck (vgl. (40) und Bemerkung 3)

$$\frac{\sigma_n^{f+1-\varepsilon}}{\tau_n^{f+1/2-\varepsilon}} \frac{1}{\sigma_n^{r/2} k_n^{r/2} |s_n|^{\varrho+1}}$$

für $n \to +\infty$ nicht den Grenzwert Null haben soll. Mit Rücksicht auf (42) genügt es dasselbe für

$$\frac{\sigma_n^{f+1-r/2-\varepsilon}}{k_n^{r/2-\varrho-1} \tau_n^{f+1/2-\varepsilon}} \tag{44}$$

zu zeigen.

Wählen wir also τ_n derart, dass der Ausdruck (44) immer gleich Eins ist, d. h. es sei

$$\tau_n = \left(\frac{R_{k_n}^{f+1-r/2-\varepsilon}}{k_n^{2f+1-r/2-\varrho-2\varepsilon}}\right)^{1/(f+1/2-\varepsilon)} = \left(R_{k_n} k_n^{2\beta+\delta_1}\right)^{\delta_2},$$

wo

$$\delta_1 = \frac{4\varepsilon(\beta+1)^2}{\varrho - (\frac{1}{2}r - 1) - 2\varepsilon(\beta+1)}, \quad \delta_2 = \frac{f + 1 - \frac{1}{2}r - \varepsilon}{f + \frac{1}{2} - \varepsilon}$$

ist. Aus der Voraussetzung $0 \leqq \varrho \leqq \frac{1}{2}r - 1$ folgt $f + 1 - \frac{1}{2}r \leqq 0$ und nach (38) ist $\lim_{n\to+\infty} \tau_n = +\infty$. Es genügt also die Geltung der Beziehung (43) zu verifizieren. Nachdem $e^{-x} = O(x^{-m})$ für jedes $m = c$ ist, genügt es zu zeigen, dass für ein passend gewähltes $m = c$ der Ausdruck

$$V = \frac{\sigma_n^{f-\varrho-\varepsilon-r/2}}{\tau_n^{f+1/2+m-\varepsilon}}$$

für $n \to +\infty$ den Grenzwert Null hat. Durch Einsetzung ergibt sich nach mechanischen Berechnungen

$$V = R_{k_n}^{\delta_3} k_n^{\delta_4},$$

wo

$$\delta_3 = f - \varrho - \tfrac{1}{2}r - \varepsilon - \delta_2(f + 1 + m - \varepsilon),$$
$$\delta_4 = -(2\beta + \delta_1)\,\delta_2(f + 1 + m - \varepsilon) - 2f + 2\varrho + r + 2\varepsilon$$

ist, was für hinreichend grosses $m = c$ in der Form

$$V = \left(R_{k_n} k_n^{2\beta+\delta_1(1+O(1/m))}\right)^{cm+O(1)}$$

ausdrückbar ist und nach (38) bekommt man leicht die Behauptung.

Bemerkung 7. Leicht kann man zeigen (vgl. [9], S. 431, Bemerkung 2), dass $R_k \asymp P_k^2$ ist, wobei wir

$$P_k = \max_{j=1,2,\ldots,r} \langle \alpha_j M_j k \rangle$$

setzen (für ein reelles t bezeichnet $\langle t \rangle$ die Entfernung von t zu der nächsten ganzen Zahl). Man kann also beide eben bewiesene Sätze mit Hilfe der Simultanapproximation des Systems $\alpha_1 M_1, \alpha_2 M_2, \ldots, \alpha_r M_r$ formulieren.

Bemerkung 8. In der Arbeit [10], Seiten 393–395 wurde eine Form Q und Zahlensysteme (1) und (2) so konstruiert, dass der Singulärfall entsteht, wobei die Konstruktion so durchgeführt werden kann, dass die Ungleichung $R_k \ll k^{-2\beta}$ unendlich viele Lösungen in natürlichen k für jedes $\beta > 0$ hat. In diesem Fall ist nach [12] und [13]

$$P_\varrho(x) = O(x^{r/4+\varrho/2}) \quad \text{für} \quad \varrho > 0\,, \quad P_\varrho(x) = O(x^{r/4} \lg x) \quad \text{für} \quad \varrho = 0$$

und

$$M_\varrho(x) = O(x^{r/2+\varrho+1/2})\,.$$

Die Bedingungen der Sätze 2 und 3 können also allgemein nicht abgeschwächt werden.

Bemerken wir noch, dass nach [10], S. 392, Lemma 9 die Bedingungen (37) und (39) im Fall $b_1 = b_2 = \ldots = b_r = 0$ automatisch erfüllt sind.

Bemerkung 9. Aus den Ergebnissen der Arbeiten [12] und [13] folgt, dass die Ω-Abschätzungen der beiden Sätze allgemein definitiv sind. Wir führen eine Übersicht der zugehörigen Ergebnisse an.

Es sei γ das Supremum aller Zahlen $\beta > 0$, für welche die Ungleichung $R_k \ll k^{-2\beta}$ für unendlich viele k erfüllt ist. Dann gilt:

a) Wenn $0 \leqq \varrho < \frac{1}{2}r - 2$ ist, ist für jedes $\varepsilon > 0$

$$P_\varrho(x) = O(x^{(r/4-1/2)(2\gamma+1)/(\gamma+1)+(\varrho+1)/(2(\gamma+1)+\varepsilon})\,.$$

Weiter ist

$$P_\varrho(x) = O(x^{r/4+\varrho/2} \lg x)$$

für $\varrho = \frac{1}{2}r - 2 \geqq 0$ und

$$P_\varrho(x) = O(x^{r/4+\varrho/2})$$

für $\varrho > \frac{1}{2}r - 2$, $\varrho \geqq 0$.

b) Wenn $0 \leqq \varrho < \frac{1}{2}r - \frac{3}{2}$ ist, ist für jedes $\varepsilon > 0$

$$M_\varrho(x) = O(x^{(r/2-1)(2\gamma+1)/(\gamma+1)+(\varrho+1/2)/(\gamma+1)+1+\varepsilon})\,.$$

Weiter ist

$$M_\varrho(x) = O(x^{r/2+\varrho+1/2} \lg x)$$

für $\varrho = \frac{1}{2}r - \frac{3}{2} \geqq 0$ und

$$M_\varrho(x) = O(x^{r/2+\varrho+1/2})$$

für $\varrho > \frac{1}{2}r - \frac{3}{2}$, $\varrho \geqq 0$.

Bemerken wir, dass immer für $0 \leqq \varrho < \frac{1}{2}r - 2$ bzw. für $0 \leqq \varrho < \frac{1}{2}r - \frac{3}{2}$

$$P_\varrho(x) = O(x^{r/2-1}) \quad \text{bzw.} \quad M_\varrho(x) = O(x^{r-1})$$

ist und weiter ist

$$P_\varrho(x) = \Omega(x^{(r-1)/4+\varrho/2}), \quad M_\varrho(x) = \Omega(x^{r/2+\varrho+1/2}).$$

Wenn $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_r = \alpha$ ist, kann man beide der angeführten Abschätzungen etwas verbessern (anstatt der Ungleichung $R_k \ll k^{-2\beta}$ kann man in der Definition von γ $\langle \alpha k \rangle \ll k^{-\beta}$ nehmen):

c) Es sei $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_r = \alpha$. Dann gilt: Wenn $0 \leqq \varrho < \frac{1}{2}r - 3$ oder $\frac{1}{2}r - 3 \leqq \varrho < \frac{1}{2}r - 2$, $\varrho \geqq 0$ und $\gamma > 1/(\frac{1}{2}r - 2 - \varrho)$ ist, dann ist für jedes $\varepsilon > 0$

$$P_\varrho(x) = O(x^{(r/4-1/2)(2\gamma+1)/(\gamma+1)+\varrho/2(\gamma+1)+\varepsilon}).$$

Wenn $\gamma \leqq 1/(\frac{1}{2}r - 2 - \varrho)$ und $\frac{1}{2}r - 3 < \varrho < \frac{1}{2}r - 2$, $\varrho \geqq 0$ ist, so ist

$$P_\varrho(x) = O(x^{r/4+\varrho/2})$$

und für $\gamma \leqq 1/(\frac{1}{2}r - 2 - \varrho)$, $\varrho = \frac{1}{2}r - 3 \geqq 0$ (d. h. $\gamma = 1$) ergibt sich

$$P_\varrho(x) = O(x^{r/4+\varrho/2} \lg x).$$

Wenn $0 \leqq \varrho < \frac{1}{2}r - 2$ oder $\frac{1}{2}r - 2 \leqq \varrho < \frac{1}{2}r - \frac{3}{2}$, $\varrho \geqq 0$ und $\gamma > 1/(r - 3 - 2\varrho)$ ist, dann ist für jedes $\varepsilon > 0$

$$M_\varrho(x) = O(x^{(r/2-1)(2\gamma+1)/(\gamma+1)+1+\varrho/(\gamma+1)+\varepsilon}).$$

Wenn $\frac{1}{2}r - 2 \leqq \varrho < \frac{1}{2}r - \frac{3}{2}$, $\varrho \geqq 0$ und $\gamma \leqq 1/(r - 3 - 2\varrho)$ ist, dann ist

$$M_\varrho(x) = O(x^{r/2+\varrho+1/2})$$

und für $\gamma \leqq 1/(r - 3 - 2\varrho)$, $\varrho = \frac{1}{2}r - 2 \geqq 0$ (d. h. $\gamma = 1$) ist

$$M_\varrho(x) = O(x^{r/2+\varrho+1/2} \lg x).$$

§5. Zweite Anwendung der Methode von §2. In diesem Paragraph betrachten wir Formen Q der Gestalt

$$\sum_{j=1}^{\sigma} a_j Q_j(u_{1,j}, u_{2,j}, \ldots, u_{r_j,j}),$$

wo $r_1, r_2, \ldots, r_\sigma$ natürliche Zahlen sind, $r = r_1 + r_2 + \ldots + r_\sigma$; $a_1, a_2, \ldots, a_\sigma$ sind positive reelle Zahlen und $Q_1, Q_2, \ldots, Q_\sigma$ sind positiv definite quadratische Formen mit ganzzahligen Koeffizienten. Mit Rücksicht auf den vorangehenden Paragraphen genügt es offenbar vorauszusetzen, dass $\sigma \geqq 2$ ist und mindestens eine der Zahlen $a_2/a_1, a_3/a_1, \ldots, a_\sigma/a_1$ irrational ist (sonst genügt es die Form Q mit einer passenden reellen Zahl multiplizieren, sodass das Resultat schon eine Form mit ganzzahligen Koeffizienten ist).

Diese Formen wurden inbesondere in den Arbeiten [1]–[6] (für $\varrho = 0$, $\alpha_j = b_j = 0$, $M_j = 1$, $j = 1, 2, \ldots, r$) und in [13] untersucht. Wenn man $\Theta_j(s)$, $j = 1, 2, \ldots, \sigma$ die Funktion (6) für die Form Q_j und die zugehörigen Zahlengruppen (1) und (2) bezeichnet (wir identifizieren eigentlich u_1 mit $u_{1,1}$, u_2 mit $u_{2,1}, \ldots, u_{r_j}$ mit $u_{r,1}$ usw.) dann ergibt sich für komplexes s, $\operatorname{Re} s > 0$ offenbar $\Theta(s) = \Theta_1(a_1 s) \,.\, \Theta_2(a_2 s) \ldots \Theta_\sigma(a_\sigma s)$. Im ganzen Paragraphen seien die Zahlen (1) ganz.

Wir beweisen folgende zwei Sätze, welche die von Jarník mit seiner Methode bewiesenen Ω-Abschätzungen (vgl. z. B. [6], S. 251) verallgemeinern (vgl. §6).

Satz 4. *Sei* $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots \alpha_r = 0$, $\alpha \geqq 0$, $\gamma > 0$. *Es existiere eine Folge* $h = h_n > 1$ *von positiven ganzen Zahlen sodass* $\lim h_n = +\infty$,

$$\langle h(a_j/a_1)\rangle \ll \frac{1}{h^\gamma \lg^\alpha h}\,{}^{3)}, \quad j = 1, 2, \ldots, \sigma \tag{45}$$

für alle $n = 1, 2, \ldots$ *gilt. Dann ist*

$$P_\varrho(x) = \Omega(x^{r/2-1-(\varrho+1)/\gamma} \lg^{\alpha(\varrho+1)/\gamma} x)$$

und für jedes $\varepsilon > 0$ *ist*

$$M_\varrho(x) = \Omega(x^{r-1-2(\varrho+1)/\gamma-\varepsilon}) .$$

Beweis. Aus der Voraussetzung folgt, dass Folgen $h_{n,j}$ ($j = 1, 2, 3, \ldots, \sigma$, $n = 1, 2, \ldots$) von positiven ganzen Zahlen so existieren, dass für $j = 1, 2, \ldots, \sigma$ und alle natürlichen n (wir setzen $h_{n,1} = h_n$)

$$\left| h_n \frac{a_j}{a_1} - h_{n,j} \right| \ll \frac{1}{h_n^\gamma \lg^\alpha h_n}$$

ist. Den Beweis genügt es offenbar nur in dem Fall $f = \frac{1}{2}r - 1 - (\varrho + 1)/\gamma \geqq 0$ durchzuführen. Man setze nun ($n = 1, 2, \ldots$)

$$\sigma_n = \max_{j=1,2,\ldots,\sigma} \left| \frac{2\pi h_{n,1}}{a_1} - \frac{2\pi h_{n,j}}{a_j} \right| .$$

[3]) Wir bemerken, dass die unsymmetrische Rolle von a_1 nur scheinbar ist.

Der Voraussetzung nach ist

$$\sigma_n \ll \frac{1}{h_n^\gamma \lg^\alpha h_n}\,. \tag{45a}$$

Sei weiter

$$t_n = 2\pi\,(h_{n,1}/a_1)\,.$$

Wenn wir das Lemma 1 (für die Funktion Θ_j, $h = h_{n,j}$, $k = 1$ formuliert) benützen, dann bekommen wir leicht, dass für alle hinreichend grossen n $(s_n = \sigma_n + it_n)$, $j = 1, 2, \ldots, \sigma$

$$\left|\Theta_j(a_j s_n)\right| \gg \frac{1}{\left|s_n - 2\pi\,\dfrac{h_{n,j}}{a_j}\right|^{r_j/2}}$$

ist und also, wie man leicht sehen kann, ist

$$\left|\Theta(s_n)\right| \gg \frac{1}{\sigma_n^{r/2}}\,. \tag{46}$$

Man benütze nun die Methode von §2 auf die Funktion $P_\varrho(x)$ mit

$$g(x) = x^f \lg^{\alpha(\varrho+1)/\gamma}(x+1)\,.$$

Diese Funktion erfüllt offenbar alle zugehörigen Voraussetzungen und nach der Bemerkung 2 haben wir für die Funktion (17) die Beziehung

$$G(t) \asymp \frac{\lg^{\alpha(\varrho+1)/\gamma}\dfrac{1}{t}}{t^{f+1}}$$

für $t \in (0, \frac{1}{2})$. Man beachte noch, dass $|s_n| \asymp h_n$, $\lim\limits_{n\to+\infty} h_n = +\infty$, und also

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{G(\sigma_n)\,|s_n|^{r/2+\varrho+1}} = 0\,. \tag{47}$$

Um die Beziehung $P_\varrho(x) = \Omega(g(x))$ zu beweisen, genügt es mit Rücksicht auf die Bemerkung 1, (21) und (46) zu zeigen, dass

$$\sigma_n^{f+1} \gg \sigma_n^{r/2} h_n^{\varrho+1} \lg^{\alpha(\varrho+1)/\gamma}\frac{1}{\sigma_n} \tag{48}$$

gilt. Wir unterscheiden nun zwei Fälle.

Wenn ein $\gamma_1 = c$ so existiert, dass für alle natürlichen n

$$\sigma_n \gg \frac{1}{h_n^{\gamma_1}}$$

ist, so ist $\lg 1/\sigma_n \asymp \lg h_n$ und aus (45a) und der Definition von σ_n folgt, dass

$$\frac{\sigma_n^{f+1-r/2}}{h_n^{\varrho+1} \lg^{\alpha(\varrho+1)/\gamma} \dfrac{1}{\sigma_n}} \gg \frac{h_n^{-\gamma(f+1-r/2)} \lg^{-\alpha(f+1-r/2)} h_n}{h_n^{\varrho+1} \lg^{\alpha(\varrho+1)/\gamma} h_n} = 1$$

ist und (48) ist hiermit bewiesen.

Wenn keine derartige Zahl γ_1 existiert, kann man behaupten, dass für jedes $\gamma_1 > 0$ die Ungleichung

$$\max_{j=1,2,\ldots,\sigma} \left\langle \frac{a_j}{a_1} h \right\rangle \ll \frac{1}{h^{\gamma_1}}$$

für unendlich viele natürlichen h erfüllt ist. Weiter gehen wir für die Funktion $g(x) = x^{f_1}, f_1 = \frac{1}{2}r - 1 - (\varrho + 1)/\gamma_1$ ganz wie oben fort. Die Zahl γ_1 kann beliebig gross sein und also haben wir sogar $P_\varrho(x) = \Omega(x^{r/2-1-\varepsilon})$ für jedes $\varepsilon > 0$ bewiesen und also auch die Behauptung.

Wir übergehen zum Beweis des zweiten Teiles des Satzes (d. h. zur Behauptung über $M_\varrho(x)$). Wir behalten die Bezeichnungen von dem vorangehenden Teil des Beweises, nur sei $g(x) = x^{2f+1-2\varepsilon}, \frac{1}{2} > \varepsilon > 0$. Es gilt also (46),

$$\sigma_n \ll \frac{1}{h_n^\gamma}, \quad |s_n| \asymp h_n \tag{49}$$

und nach §2 genügt es zu zeigen, dass eine Folge τ_n, $\tau_n/\sigma_n \to +\infty$ existiert, sodass (28) und (29) gilt. Mit Rücksicht auf (46), (47) und Bemerkung 3 genügt es zu zeigen, dass man diese Folge so wählen kann dass

$$\frac{1}{\sigma_n^{r/2-1/2} h_n^{\varrho+1}} \frac{\sigma_n^{f+1/2-\varepsilon}}{\tau_n^{f+1/2-\varepsilon}} = 1 \tag{50}$$

und

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^{-\tau_n} \sigma_n^{2f+1-2\varepsilon}}{\sigma_n^{r+2\varrho+1} \tau_n^{2f+1-2\varepsilon}} = 0 \tag{51}$$

ist. Aus (50) folgt

$$\tau_n = (\sigma_n h_n^\gamma)^{-\delta_1} \sigma_n^{-\delta_2},$$

wo

$$\delta_1 = \frac{\varrho + 1}{\gamma(f + \frac{1}{2} - \varepsilon)}, \quad \delta_2 = \frac{\varepsilon}{f + \frac{1}{2} - \varepsilon}$$

ist. Nach (49) ist $\lim\limits_{n\to+\infty} \tau_n = +\infty$. Zum Beweis der Beziehung (51) genügt es zu zeigen, dass ein $m = c$ so existiert, dass der Ausdruck

$$\frac{1}{\sigma_n^{r/2+\varrho-f+\varepsilon} \tau_n^m}$$

für $n \to \infty$ den Grenzwert Null hat. Den Ausdruck kann man aber in die Gestalt

$$(\sigma_n h_n^\gamma)^{\delta_3} \sigma_n^{\delta_4}$$

bringen, wo

$$\delta_3 = m\delta_1 , \quad \delta_4 = m\delta_2 - \tfrac{1}{2}r - \varrho + f - \varepsilon$$

ist, und aus (49) bekommt man sofort, dass für hinreichend grosses $m = c$ dieser für $n \to +\infty$ den Grenzwert Null hat. Damit ist bewiesen, dass für jedes $\varepsilon > 0$ ist

$$M_\varrho(x) = \Omega(x^{2f+1-\varepsilon}) .$$

Bemerkung 10. Mittels einer zu der Bemerkung 6 analogischen Methode könnte das Ergebniss für $M_\varrho(x)$ etwas verbessert werden, wenn man die Abschätzung

$$P_\varrho(x) = O(x^{r/2-1-(\varrho+1)/\gamma})$$

benützen dürfte.

In der Arbeit [13] ist gezeigt worden, dass, wenn γ das Supremum aller Zahlen $\beta > 0$ ist, für welche die Ungleichungen

$$\left\langle h \frac{a_j}{a_1} \right\rangle \ll h^{-\beta} , \quad j = 1, 2, \ldots, \sigma$$

unendlich viele Lösungen in natürlichen h haben, ist unter der Voraussetzung

$$r_j \geqq (\varrho + 1)\frac{2(\gamma + 1)}{\gamma} , \quad j = 1, 2, \ldots, \sigma\ ^4)$$

für jedes $\varepsilon > 0$

$$P_\varrho(x) = O(x^{r/2-1-(\varrho+1)/\gamma+\varepsilon})$$

und also auch

$$M_\varrho(x) = O(x^{r-1-2(\varrho+1)/\gamma+\varepsilon}) .$$

Die Abschätzungen des Satzes 4 sind also im Allgemeinen definitiv (z. B. für $r_j \geqq 2\sigma(\varrho + 1)$, $j = 1, 2, \ldots, \sigma$; vgl. die Fussnote[4])).

Bemerkung 11. Wie bekannt, kann für alle Systeme $a_1, a_2, \ldots, a_\sigma$ im Satz 4 $\gamma = 1/(\sigma - 1)$, $\alpha = 0$ gesetzt werden, d. h. es gilt immer

$$P_\varrho(x) = \Omega(x^{r/2-\sigma-\varrho(\sigma-1)})$$

und für jedes $\varepsilon > 0$ ist

$$M_\varrho(x) = \Omega(x^{r-2\sigma-2\varrho(\sigma-1)+1-\varepsilon}).$$

---

[4]) Da immer $\gamma \geqq 1/(\sigma - 1)$ ist, gilt dies bestimmt für $r_j \geqq 2\sigma(\varrho + 1)$, $j = 1, 2, \ldots \sigma$.

Für fast alle Systeme $a_1, a_2, \ldots, a_\sigma$ (im Sinne des Lebesgueschen Masses) kann im Satz 4 $\alpha = \gamma = 1/(\sigma - 1)$ geschrieben werden, d. h. für fast alle Systeme $a_1, a_2, \ldots, \sigma_\sigma$ ist

$$P_\varrho(x) = \Omega(x^{r/2-\sigma-\varrho(\sigma-1)} \lg^{\varrho+1} x).$$

Für $\varrho = 0$ (und $M_j = 1$, $l_j = \alpha_j = 0$, $j = 1, 2, \ldots, r$) stammen diese Ergebnisse von Jarník (vgl. [2], [3] und [6]) – das letzte ist nur mit $\lg^{(\sigma-1)/(\sigma+1)} x$ anstatt $\lg x$ formuliert.

§6. Schlussbemerkungen. In der Theorie der Gitterpunkte in Ellipsoiden wurden bisher mit Erfolg grundsätzlich drei[5]) Ω-Methoden benützt. Die älteste ist die von Landau. Deren Gedanke beruht darin, dass für $\varrho > \frac{1}{2}r$ die Funktion $P_\varrho(x)$ mittels einer gewissen Reihe darstellbar ist, in der Besselfunktionen auftreten (vgl. z. B. [7], S. 147). Wenn die asymptotischen Eigenschaften der Besselfunktionen benützt werden, ergibt sich für $\varrho > c$ unmittelbar die Abschätzung

$$P_\varrho(x) = \Omega(x^{(r-1)/4+\varrho/2}).$$

Mittels einfacher Induktion kann die Geltung dieser Abschätzung auf alle $\varrho \geqq 0$ ausgedehnt werden (siehe [7], S. 149). Einen ein wenig modizifierten Vorgang kann man auch auf die Funktion $M_\varrho(x)$ anwenden (für $\varrho = 0$ vgl. [3], allgemein [12]). Eine wesentliche Verstärkung dieser Methode kann man nicht erwarten; in einigen Spezialfällen wurden diese Abschätzungen um einen logarithmischen Faktor verbessert.

Ein sehr einfaches Verfahren wurde von Jarník benutzt (vgl. [2]–[4] und [6]). Deren Fundamentalidee formulieren wir für $\varrho = 0$ unter den Voraussetzungen des §4 und für $\delta = 1$. Die Funktion $A(x)$ ist offensichtlich konstant in jedem Intervall $[n, n + 1)$ für jedes natürliche n. Es ist also

$$|P(n + \tfrac{1}{2}) - P(n)| = |V(n + \tfrac{1}{2}) - V(n)| \gg n^{r/2-1}.$$

Es ist also entweder $|P(n)| \gg n^{r/2-1}$ oder $|P(n + \frac{1}{2})| \gg n^{r/2-1}$ d. h. $P(x) = \Omega(x^{r/2-1})$. Wenn die Form Q nicht ganze Koeffizienten hat, kann man vorteilhaft die Tatsache benützen, dass je besser man das System $a_2/a_1, a_3/a_1, \ldots, a_\sigma/a_1$ simultan approximieren kann (d. h. je grösser γ im Satz 4 sein darf) desto „längere" Intervalle existieren, in dennen $A(x)$ konstant ist (vgl. z. B. [6], /S. 151). In Intervallen, in dennen die Funktion $A(x)$ konstant ist, ist nämlich der Zuwachs der Funktion $P(x)$ durch die Funktion $V(x)$ bestimmt, d. h. im Fall $\delta = 1$ durch die Funktion $cx^{r/2}$. Wir deuten darauf hin, dass diese Methode auch auf die Funktion $M(x)$ anwendbar ist, immer aber unter der Voraussetzung $\delta = 1$, welche offenbar wesentlich ist (vgl. [4], [5]). Diese Methode wurde bisher für $\varrho = 0$ verwendet; für $\varrho \geqq 0$ ist eine Modifikation im

---

[5]) Siehe aber auch die Arbeiten [16] und [17].

Fall einer ganzzahligen Form Q $(M_j = 1,\ \alpha_j = b_j = 0,\ j = 1, 2, \ldots, r)$ in [7], S. 154 angegeben. Eine Anwendung für $\varrho > 0$ in allgemeineren Fällen wurde bisher nicht durchgeführt.

In manchen Fällen kann man gute Ergebnisse auch mit Hilfe der Funktion $M_\varrho(x)$ erreichen. Wenn es nämlich z. B. in irgendeinem Fall gelingt zu beweisen, dass

$$M_\varrho(x) = \Omega(x^\gamma) \tag{52}$$

ist, ist offenbar $P_\varrho(x) = \Omega(x^{(\gamma-1)/2})$. Wenn wir von der Methode von §2 absehen, kann eine Beziehung der Form (52) meistens vom stärkeren Ergebniss

$$M_\varrho(x) = cx^\gamma + o(x^\gamma)$$

bewiesen werden, welches aber sehr umständliche Betrachtungen verlangt (siehe z. B. [5], [14], [15]). Auf diese Art kann man z. B. zeigen, dass unter den Voraussetzungen von §4 und für rationale $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ im nichtsingulären Fall

$$M_\varrho(x) = \Omega(x^{r-1})$$

für $0 \leqq \varrho < \frac{1}{2}r - \frac{3}{2}$,

$$M_\varrho(x) = \Omega(x^{r-1} \lg x)$$

für $\varrho = \frac{1}{2}r - \frac{3}{2} \geqq 0$ ist, d. h. es gilt

$$P_\varrho(x) = \Omega(x^{r/2-1})$$

für $0 \leqq \varrho < \frac{1}{2}r - \frac{3}{2}$ und

$$P_\varrho(x) = \Omega(x^{r/2-1} \sqrt{\lg x})$$

für $\varrho = \frac{1}{2}r - \frac{3}{2} \geqq 0$ (siehe [5], [14], [15]). Diese Methode ist also beträchtlich mühsam.

Zum Schluss bemerken wir, dass im Vergleich zur Methode von Jarník die Methode von §2 die Voraussetzung $\delta = 1$ nicht benötigt und dies ist ihr wesentlicher Vorteil. Auf der anderen Seite ist diese von weitem nicht so elementar.

Wenn man die Beweise der Sätze 2 und 4 vergleicht, ist es leicht zu sehen, welcher Art wahrscheinlich die mittels der Methode von §2 hergeleiteten Sätze in dem Fall sein werden, wenn man in den im §5 untersuchten Fällen von Null verschiedene Werte der Konstanten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ zulässt. Nachdem da bisher nicht untriviale O-Abschätzungen vorhanden sind, ist es nicht ganz klar, auf welche Weise man die Bedingungen (38) und (45) vereinigen soll. Wir führen darum zur Illustration ohne Beweis (den man leicht analog wie im Satz 4 durchführen kann) den folgenden Satz an:

Satz 5. *Sei Q die Form von §5 und seien die Zahlen (1) ganz, (2) rational. Für $j = 1, 2, \ldots, \sigma$ seien $R_k^{(j)}$ und $S_{h,k}^{(j)}$ die im §3 definierten Werte, aber für die Formen Q_j und die zugehörigen Teile der Zahlensysteme (1) und (2). Es sollen für bestimmte Zahlen $\gamma \geqq 0$, $\alpha \geqq 0$ Folgen $h_{n,j}$, $k_{n,j}$, $j = 1, 2, \ldots, \sigma$, $n = 1, 2, \ldots$ nichtsingulärer*

Paare[6]) *von natürlichen Zahlen existieren, sodass*

$$R_{k_{n,j}}^{(j)} = 0 \qquad \left|\frac{h_{n,1}}{a_1} - \frac{h_{n,j}}{a_j}\right| \ll \frac{1}{h_{n,1}^{\gamma} \lg^{\alpha} h_{n,1}} \qquad k_{n,j} \ll 1$$

für $j = 1, 2, \ldots, \sigma$, $n = 1, 2, \ldots$ *ist* (*also ist* $S_{h_{n,j},k_{n,j}}^{(j)} \neq 0$). *Dann gelten die Abschätzungen vom Satz* 4.

Ebenso wie bei den oben angeführten Sätzen kann gezeigt werden, dass die Voraussetzung der Nichtsingularität der Paare $h_{n,j}$, $k_{n,j}$ wesentlich ist (siehe [13]).

Literaturverzeichnis

[1] *B. Diviš:* Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden, Czech. Math. J. *20* (*95*), (1970), 130—139.

[2] *V. Jarník:* Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden, Math. Ann. *100* (1928), 699—721.

[3] *V. Jarník:* Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden, Tôhoku Math. Journal *30* (1929), 354—371.

[4] *V. Jarník:* Über Mittelwertsätze der Gitterpunktlehre I, II, Mathematische Zeitschrift *33* (1931), 62—97.

[5] *V. Jarník:* Über Mittelwertsätze der Gitterpunktlehre V, Časopis pro pěst. matematiky *69* (1940), 148—179.

[6] *V. Jarník:* Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden: eine Anwendung des Hausdorffschen Massbegriffes, Mathematische Zeitschrift *38* (1934), 217—256.

[7] *V. Jarník:* Bemerkungen zu Landauschen Methoden in der Gitterpunktlehre, Abhandlungen aus Zahlentheorie und Analysis. Zur Erinnerung an E. Landau, VEB, Berlin 1968, 139—156.

[8] *E. Landau:* Ausgewählte Abhandlungen zur Gitterpunktlehre, Berlin 1962.

[9] *B. Novák:* Verallgemeinerung eines Peterssonchen Satzes und Gitterpunkte mit Gewichten, Acta Arithmetica *XIII* (1968), 423—454.

[10] *B. Novák:* On lattice points with weight in high-dimensional ellipsoids, Acta Arithmetica *XIV* (1968), 371—397.

[11] *B. Novák:* Mean value theorems in the theory of lattice points with weight, Comment. Math. Univ. Carolinae *8* (1967), 711—733.

[12] *B. Novák:* Mean value theorems in the theory of lattice points with weight II, Comment. Math. Univ. Carolinae *11* (1970), 53—81.

[13] *B. Novák:* Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden, in Vorbereitung.

[14] *B. Novák:* Mittelwertsätze der Gitterpunktlehre, Czech. Math. J. *19* (*94*) (1969), 154—180.

[15] *B. Novák:* Mittelwertsätze der Gitterpunktlehre II, Časopis pro pěst. matematiky *96* (1971), No. 3.

[16] *G. Szegö:* Beiträge zur Theorie der Laguerreschen Polynome. II. Zahlentheoretische Anwendungen, Mathematische Zeitschrift *25* (1926), 388—404.

[17] *А. З. Вальфиш:* Абсциссы сходимости некоторых рядов Дирихле, Труды Тбилисского мат. института *22* (*1*956), 33—75.

Anschrift des Verfassers: Praha 8 - Karlín, Sokolovská 83, ČSSR (Matematicko-fyzikální fakulta KU).

[6]) Das Paar $h_{n,j}$, $k_{n,j}$ ist also nichtsingulär in Bezug auf Q_j und die zugehörigen Teilsysteme von (1) und (2).