Teo Sturm

Äquivalenz- und Ordnungsrelationen

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 22 (1972), No. 3, 373–392

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/101109

Czechoslovak Mathematical Journal, 22 (97) 1972, Praha

ÄQUIVALENZ- UND ORDNUNGSRELATIONEN

TEO STURM, Praha

(Eingelangt am 25. October 1970)

Diese Arbeit knüpft unmittelbar an den Artikel [7] an. In deren ersten Teil wird das System aller Ordnungen einer nichtleeren Menge A studiert, mit Rücksicht auf welche eine gegebene Äquivalenz schwach faktorisierend ist. Im zweiten Teil ist dann eine Charakterisierung einer Äquivalenz auf A mittels passender Ordnungen auf A gegeben (s. Abs. 30); insbesondere werden Ordnungssysteme gesucht, welche minimal mit Rücksicht zu der Inklusion sind und welche die Äquivalenz auf diese Weise charakterisieren.

Diese Arbeit entstand im Rahmen eines von Herrn Doc. Dr. JIŘÍ FÁBERA geleiteten Seminars über Boolesche Algebren. Herrn Prof. Dr. MIROSLAV NOVOTNÝ bin ich für viele Ratschläge und Hinweise dankbar.

Systeme von Ordnungen, mit Rücksicht auf welche die Äquivalenz schwach faktorisierend ist

1. Bezeichnungen und einleitende Definitionen. A ist eine gegebene nichtleere Menge. Die Ordnungsrelationen bezeichnen wir mit den Symbolen u, v, w ev. mit einem Index versehen; u wird eine Ordnung auf A genau dann genannt, wenn $\operatorname{dom} u = A$ ist. Mit dem Symbol $\mathscr{U}(A)$ wird die Menge aller Ordnungen auf A bezeichnet.

Wir übernehmen da die Bezeichnungen von [7] mit der folgenden Ausnahme: Ist $u \in \mathscr{U}(A)$ und $\varrho \in D(A)$, dann definieren wir $\varrho_u =_{\mathrm{Df}} u_\varrho \cap (u_\varrho)^{-1}$, s. [7], Abs. 12; das Symbol $\equiv_\varrho$ (s. [7], Abs. 14) ist da ungeeignet, nachdem wir verschiedene Ordnungen auf A erwägen werden. Wenn wir eine Ordnung $\leqq$ auf A (s. [7], Abs. 1), mit dem Symbol z. B. u bezeichnen, dann bezeichnen wir die Relation $^{\bullet}\!\leqq$ (s. [7], Abs. 17), resp. $\lesssim_{A/\varrho}$ (s. [7], Abs. 17; $\varrho \in D(A)$) mit dem Symbol $\dot{u}$ resp. $\underline{u}_{A/\varrho}$.

Die Äquivalenz in A bezeichnen wir mit ϱ, σ, τ ev. mit einem Index versehen. Die Abbildungen $U : B(D(A)) \to B(\mathscr{U}(A))$, $e : B(\mathscr{U}(A)) \to B(E(A))$ definieren wir folgendermassen:

Wenn $X \in B(D(A))$ ist, dann ist $U(X) \subseteq \mathscr{U}(A)$ und die Relation $u \in U(X)$ gilt genau dann, wenn $\varrho \in F(A, u)$ für jede Äquivalenz $\varrho \in X$ ist.

Wenn $Y \in B(\mathscr{U}(A))$ ist, dann ist $e(Y) \subseteq E(A)$ und die Relation $\varrho \in e(Y)$ gilt genau dann, wenn $\varrho \in G(A, u)$ für jede Ordnung $u \in Y$ gilt.

Wenn $\varrho \in D(A)$ bzw. $u \in \mathscr{U}(A)$ ist, dann schreiben wir kurz nur $U(\varrho) =_{\mathrm{Df}} U(\{\varrho\})$ bzw. $e(u) =_{\mathrm{Df}} e(\{u\})$.

2. Bemerkung. Betrachten wir die partielle Abbildung $U_1 =_{\mathrm{Df}} U \mid B(E(A))$; dann definieren die Abbildungen e, U_1 eine Galoissche Korrespondenz zwischen $(B(\mathscr{U}(A)), \subseteq)$ und $(B(E(A)), \subseteq)$. Offenbar gilt diese Behauptung:

Wenn I, J nichtleere Mengen sind und wenn für alle Indexe $i \in I$, $j \in J$ die Inklusionen $X_i \subseteq E(A)$, $Y_j \subseteq \mathscr{U}(A)$ gelten, dann ist

$$U_1\Big(\bigcup_{i \in I} X_i\Big) = \bigcap_{i \in I} U_1(X_i)\,, \quad e\Big(\bigcup_{j \in J} Y_j\Big) = \bigcap_{j \in J} e(Y_j)$$

(s. z. B. [3], S. 61 der russischen Übersetzung). Daher folgt

$$U_1(X) = \bigcap\{U_1(\varrho) \mid \varrho \in X\}\,, \quad e(Y) = \bigcap\{e(u) \mid u \in Y\}$$

für beliebige Systeme $X \subseteq E(A)$ und $Y \subseteq \mathscr{U}(A)$.

In dieser Arbeit beschränken wir uns auf das Studium der Struktur der geordneten Menge $(U(\varrho), \subseteq)$, wobei $\varrho \in D(A)$ eine gegebene Teiläquivalenz in A ist.

3. Lemma. *Es seien α, β, γ Relationen, $\alpha \subseteq \beta$ und $n \in N$. Dann ist $(\alpha \,.\, \gamma)^n \subseteq$ $\subseteq (\beta \,.\, \gamma)^n$.*

Beweis. Die Behauptung folgt unmittelbar vom Lemma 2 in [7], wenn man die Beziehungen

$$\alpha \subseteq \beta \Leftrightarrow \alpha^{-1} \subseteq \beta^{-1}\,, \quad ((\alpha \,.\, \gamma)^n)^{-1} = (\gamma^{-1} \,.\, \alpha^{-1})^n$$

in Betracht nimmt.

4. Lemma. *Es sei $u, v \in \mathscr{U}(A)$, $u \subseteq v$. Dann gelten die folgenden Beziehungen:*

a. $(u_\varrho)^{-1} = (u^{-1})_\varrho$,
b. $\varrho_{u^{-1}} = \varrho_u$,
c. $u_\varrho \subseteq v_\varrho$,
d. $\varrho \subseteq \varrho_u \subseteq \varrho_v$,
e. $(\mathrm{id}_A)_\varrho = \varrho$.

Beweis. a. Wir deuten zuerst auf die Tatsache hin, dass die zu einer Ordnung auf A inverse Relation eine Ordnung auf A ist. Ferner gilt

$$(u_\varrho)^{-1} = \Big(\bigcup_{n \in N} \varrho \,.\, (u \,.\, \varrho)^n\Big)^{-1} = \bigcup_{n \in N} (\varrho \,.\, (u \,.\, \varrho)^n)^{-1} = \bigcup_{n \in N} (\varrho^{-1} \,.\, u^{-1})^n \,.\, \varrho^{-1} =$$
$$= \bigcup_{n \in N} (\varrho \,.\, u^{-1})^n \,.\, \varrho = (\mathrm{id}_{\mathrm{dom}\,u} \,.\, \varrho) \cup \bigcup_{n=1}^{+\infty} (\varrho \,.\, u^{-1})^n \,.\, \varrho = \varrho \cup \bigcup_{n=1}^{+\infty} \varrho \,.\, (u^{-1} \,.\, \varrho)^n =$$
$$= \bigcup_{n \in N} \varrho \,.\, (u^{-1} \,.\, \varrho)^n = (u^{-1})_\varrho\,.$$

b. Nach a. gilt

$$\varrho_u = u_\varrho \cap (u_\varrho)^{-1} = ((u^{-1})^{-1})_\varrho \cap (u^{-1})_\varrho = ((u^{-1})_\varrho)^{-1} \cap (u^{-1})_\varrho = \varrho_{u^{-1}} .$$

c. Nach dem Lemma 3 und der vorausgesetzten Inklusion $u \subseteq v$ folgt $(u \, . \, \varrho)^n \subseteq$ $\subseteq (v \, . \, \varrho)^n$ für alle $n \in N$ und also ist auch

$$u_\varrho = \bigcup_{n \in N} \varrho \, . \, (u \, . \, \varrho)^n \subseteq \bigcup_{n \in N} \varrho \, . \, (v \, . \, \varrho)^n = v_\varrho \, .$$

d. Die Beziehung $\varrho \subseteq \varrho_u$ gilt nach [7], Abs. 14 und die zweite Inklusion, welche zu beweisen ist, folgt unmittelbar von c. und a.

e. Offensichtlich ist $\mathrm{id}_A \in \mathscr{U}(A)$. Weiter gilt

$$(\mathrm{id}_A)_\varrho = \bigcup_{n \in N} \varrho \, . \, (\mathrm{id}_A \, . \, \varrho)^n = \bigcup_{n \in N} \varrho \, . \, \varrho^n = \varrho \cup \bigcup_{n=1}^{+\infty} \varrho^n \subseteq \varrho \cup \bigcup_{n=1}^{+\infty} \varrho = \varrho \, ,$$

nachdem die Relation ϱ transitiv ist. Die umgekehrte Inklusion ist vom angeführten klar.

5. Satz. *Es sei ϱ eine Teiläquivalenz in A. Dann ist $(U(\varrho), \subseteq)$ eine nichtleere geordnete Menge mit dem kleinsten Element* id_A. *Wenn $u \in U(\varrho)$ und $v \in \mathscr{U}(A)$, $v \subseteq u$ ist, dann ist $v \in U(\varrho)$. Ist X eine nichtleere Teilmenge von $U(\varrho)$, dann ist $\bigcap X \in U(\varrho)$. Wenn $w \in \mathscr{U}(A)$ ist, dann gilt die Relation $w \in U(\varrho)$ genau dann, wenn $w^{-1} \in U(\varrho)$ ist.*

Beweis. Nach e. und a. von Abs. 4 ist die triviale Ordnung id_A auf A ein Element von $U(\varrho)$; offenbar ist id_A ein kleinstes Element in $(U(\varrho), \subseteq)$ und insbesondere ist $U(\varrho) \neq \emptyset$.

Von den Voraussetzungen $u \in U(\varrho)$, $v \in \mathscr{U}(A)$ und $v \subseteq u$ folgt nach d. vom Abs. 4 $\varrho \subseteq \varrho_v \subseteq \varrho_u = \varrho$ d. h. es ist $v \in U(\varrho)$. Wenn $\emptyset \neq X \subseteq U(\varrho) \subseteq \mathscr{U}(A)$ ist, dann $\bigcap X \in \mathscr{U}(A)$ und die Beziehung $\bigcap X \in U(\varrho)$ gilt nach dem Obigen.

Die letzte Behauptung ist eine unmittelbare Folgerung von b. Abs. 4.

6. Bemerkung. *Sei $\varrho \in D(A)$. Dann gelten die folgenden Behauptungen:*

a. *Wenn u, v binare Relationen sind und wenn*

$$u \cap (\mathrm{dom}\, \varrho \times \mathrm{dom}\, \varrho) = v \cap (\mathrm{dom}\, \varrho \times \mathrm{dom}\, \varrho) \tag{1}$$

gilt, dann ist $\varrho \, . \, (u \, . \, \varrho)^n = \varrho \, . \, (v \, . \, \varrho)^n$ für alle $n = 1, 2, \ldots$. Insbesondere gilt

$$\bigcup_{n=1}^{+\infty} \varrho \, . \, (u \, . \, \varrho)^n = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \varrho \, . \, (v \, . \, \varrho)^n \, .$$

b. *Wenn $u, v \in \mathscr{U}(A)$ ist und (1) gilt, dann ist $u_\varrho = v_\varrho$ und $\varrho_u = \varrho_v$. Speziell ist $u \in U(\varrho)$ genau dann, wenn $v \in U(\varrho)$ ist.*

Beweis. *a.* Sei $(x, y) \in \varrho . (u . \varrho)$. Dann gibt es Elemente r, s so, dass $(x, r) \in \varrho$, $(r, s) \in u$, $(s, y) \in \varrho$ ist. Daher folgt u. a. dass $r, s \in \operatorname{dom} \varrho$ ist und also ist nach (1) auch $(r, s) \in v$. Darum ist $(x, y) \in \varrho . (v . \varrho)$. Die Inklusion $\varrho . (v . \varrho) \subseteq \varrho . (u . \varrho)$ kann sogleich bewiesen werden und daher ist $\varrho . (u . \varrho) = \varrho . (v . \varrho)$.

Es gelte $\varrho . (u . \varrho)^n = \varrho . (v . \varrho)^n$ für eine natürliche Zahl n, $n \neq 0$ und wähle man $(x, y) \in \varrho . (u . \varrho)^{n+1} = (\varrho . (u . \varrho)^n) . u . \varrho$. Dann existieren Elemente r, s, für welche $(x, r) \in \varrho . (u . \varrho)^n$, $(r, s) \in u$ und $(s, y) \in \varrho$ ist. Der Induktionsvoraussetzung zufolge ist $(x, r) \in \varrho . (v . \varrho)^n$ und so wie in dem vorangehendem Teil des Beweises kann auch die Geltung der Relation $(r, s) \in v$ nachgewiesen werden. Es ist also $(x, y) \in \in \varrho . (v . \varrho)^{n+1}$. Die umgekehrte Inklusion $\varrho . (v . \varrho)^{n+1} \subseteq \varrho . (u . \varrho)^{n+1}$ beweist man gleicherweise und darum gilt $\varrho . (v . \varrho)^n = \varrho . (u . \varrho)^{n+1}$.

Dadurch wurde induktionsweise die Gleichung $\varrho . (u . \varrho)^n = \varrho . (v . \varrho)^n$ für alle $n = 1, 2, \ldots$ bewiesen, deren spezielle Folgerung die Beziehung $\bigcup_{n=1}^{+\infty} \varrho . (u . \varrho)^n = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \varrho . (v . \varrho)^n$ ist.

b. Es sei $(x, y) \in \varrho . (u . \varrho)^0$. Es ist

$$\mathrm{id}_{\operatorname{dom}(u.\varrho) \cup \operatorname{dom}(u.\varrho)^{-1}} = \mathrm{id}_{\operatorname{dom} u.\varrho} \cup \mathrm{id}_{\operatorname{dom} \varrho . u^{-1}} \supseteq \mathrm{id}_{\operatorname{dom} \varrho} \cup \mathrm{id}_{\operatorname{dom} \varrho} = \mathrm{id}_{\operatorname{dom} \varrho},$$

und darum ist $\varrho . (u . \varrho)^0 = \varrho$; soeben beweist man, dass auch $\varrho . (v . \varrho)^0 = \varrho$ ist. Daher und von der Behauptung a. folgt $u_\varrho = v_\varrho$. Es ist also auch $(u_\varrho)^{-1} = (v_\varrho)^{-1}$ und darum ist $\varrho_v = \varrho_u$. Diese Gleichung bringt also unmittelbar die letzte Behauptung des Abs. 6b. mit sich.

7. Lemma. *Es sei $\emptyset \subset X \subseteq \mathscr{U}(A)$ und sei die geordnete Menge $(X, \subseteq)$ von oben gerichtet. Dann ist $\bigcup X$ eine Ordnung auf A. Wenn insbesondere $(X, \subseteq)$ eine Kette ist, dann ist $(\bigcup X) \in \mathscr{U}(A)$.*

Beweis. Die in diesem Beweis durchgeführten Erwägungen sind im Grunde dem Artikel [8] entnommen. Es ist $X \neq \emptyset$, für alle $u \in X$ ist $\mathrm{id}_A \subseteq u$; demzufolge ist $\mathrm{id}_A \subseteq \bigcup X$, d. h. die Relation $\bigcup X$ ist reflexiv und es gilt $\operatorname{dom} \bigcup X = A$. Bezeichnen wir $v =_{\mathrm{Df}} \bigcup X$. Wenn $(x, y) \in v \cap v^{-1}$ ist, dann existieren $u_1, u_2 \in X$ so dass $(x, y) \in \in u_1 \cap u_2^{-1}$ ist. $(X, \subseteq)$ ist von oben gerichtet und deswegen existiert eine Ordnung $w \in X$, für welche $u_1 \cup u_2 \subseteq w$ ist. Von der Antisymmetrie von w folgt dann die Identität $x = y$ und also ist v eine antisymmetrische Relation auf A. Die Transitivität der Relation v auf A beweisen wir ähnlicherweise und also ist $\bigcup X$ eine Ordnung auf A.

8. Lemma. *Es sei $\varrho \in D(A)$, $\emptyset \subset X \subseteq U(\varrho)$ und sei die geordnete Menge $(X, \subseteq)$ von oben gerichtet. Dann ist $(\bigcup X) \in U(\varrho)$.*

Beweis. Wir bezeichnen $v =_{\mathrm{Df}} \bigcup X$; nach dem Lemma 7 ist $v \in \mathscr{U}(A)$. Es sei $(x, y) \in \varrho_v$. Dann gibt es ein $n \in N$ derart, dass $(x, y) \in \varrho . (v . \varrho)^n$ ist. Wenn $n = 0$ ist, dann ist $(x, y) \in \varrho \, . \, \mathrm{id}_{\mathrm{dom}\varrho} = \varrho$, wir setzen also voraus, dass $n \neq 0$ ist. Dann existieren $u_1, \ldots, u_n \in X$ und Elemente $x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n$ so dass $(x, x_1) \in \varrho$, $y_n = y$ ist und für $i = 1, \ldots, n$ gilt $(x_i, y_i) \in (u_i \, . \, \varrho)$. Die Menge $(X, \subseteq)$ ist von oben gerichtet und es existiert darum ein $u \in X$ so dass für $i = 1, \ldots, n$ sämtlich $u_i \subseteq u$ ist. Insbesondere gilt $(x_i, y_i) \in u \, . \, \varrho$ und es ist daher auch

$$(x, y) \in \varrho \, . \, (u \, . \, \varrho)^n \subseteq \bigcup_{m \in N} \varrho \, . \, (u \, . \, \varrho)^m = u_\varrho \, ;$$

analogisch ist $(y, x) \in u_\varrho$ (s. [7], Abs. 12). Also ist $\varrho_v \subseteq \bigcup_{u \in X} (u_\varrho \cap (u_\varrho)^{-1}) = \bigcup_{u \in X} \varrho_u = \varrho$ $(u \in X \subseteq U(\varrho))$ und daher auch $\varrho_v = \varrho$. Hiemit ist die Beziehung $v \in U(\varrho)$ bewiesen.*)

9. Folgerung. *Es sei $\varrho \in D(A)$ und sei X eine nichtleere Teilmenge in $U(\varrho)$, für welche $(X, \subseteq)$ eine Kette ist. Dann ist $\bigcup X \in U(\varrho)$.*

Der Beweis folgt sofort von Lemma 7 und 8, da eine Kette eine gerichtete Menge ist und da nach Lemma 7 $\bigcup X$ eine Ordnung auf A ist.

10. Lemma. *Es sei $\varrho \in D(A)$ und $u \in U(\varrho)$. Setze man voraus, dass $u, v \in \mathscr{U}(A)$ der folgenden Bedingung genügen.*

(2) *Wenn $(x, y) \in u$ und $(x, y) \notin v$ oder wenn $(x, y) \notin u$ und $(x, y) \in v$ ist, dann ist $(x, y) \in \varrho$.*

Dann gilt $v \in U(\varrho)$.

Beweis. Von der Voraussetzung (2) und von der Definition von $\dot{u}$ und $\dot{v}$ (s. Abs. 1 und [7], Abs. 17) folgt die Gleichung

$$\dot{u} \cap (A/\varrho \times A/\varrho) = \dot{v} \cap (A/\varrho \times A/\varrho)$$

und daher ist $\underline{u}_{A/\varrho} = \underline{v}_{A/\varrho}$ (s. [7], Abs. 17). Der Voraussetzung $u \in U(\varrho)$ zufolge ist $(A/\varrho, \underline{u}_{A/\varrho})$ eine geordnete Menge (s. [7], Abs. 19 und 17) und also ist die Menge $(A/\varrho, \underline{v}_{A/\varrho})$ ebenfalls geordnet. Nach dem Absatz 19 in [7] gilt dann $v \in U(\varrho)$.

Bemerke man das die Geltung von $\underline{u}_{A/\varrho} = \underline{v}_{A/\varrho}$ nach dem angeführten Beweis nur von den Voraussetzungen $u, v \in \mathscr{U}(A)$ und (2) folgt und also von der Erfüllung der Relation $u \in U(\varrho)$ unabhängig ist.

11. Lemma. *Es sei $\varrho \in E(A)$ und $u \in U(\varrho)$, sei $\underline{v}$ eine Ordnung auf A/ϱ, welche der Inklusion $u_{A/\varrho} \subseteq \underline{v}$ genügt. Wir definieren die Relation w folgenderweise.*

(3) *Wenn $(x, y) \in w$ ist, dann ist $x, y \in A$ (d. h. $w \subseteq A \times A$).*

(4) *Wenn $(x, y) \in \varrho$ ist, dann definieren wir $(x, y) \in w$ genau dann, wenn $(x, y) \in u$ ist.*

(5) *Wenn $X, Y \in A/\varrho$, $X \neq Y$, $x \in X$, $y \in Y$ ist, dann definieren wir $(x, y) \in w$ genau dann, wenn $(X, Y) \in \underline{v}$ ist.*

*) Ich danke dem Kollegen V. Slavík, der mich aufmerksam machte, dass die Voraussetzungen von Lemma 7 und 8 wesentlich vereinfacht werden können. Sein Entwurf wurde im Text benützt.

Dann ist w eine Ordnung auf A und es gelten die Beziehungen $u \subseteq w$, $w_{A/\varrho} = \underline{v}$, $w \in U(\varrho)$.

Beweis. Das System $\mathscr{A} =_{\mathrm{Df}} A/\varrho$ ist eine Zerlegung auf A. Wenn für alle Mengen $X \in \mathscr{A}$ $u_X =_{\mathrm{Df}} u \cap (X \times X)$ definiert wird, dann ist mit Rücksicht auf die vorausgesetzte Inklusion $u_{A/\varrho} \subseteq \underline{v}$ die Relation w die bekannte Ordnung der lexikographischen Summen $\sum\limits_{X \in (\mathscr{A}, \underline{v})} (X, u_X)$ mit dem Träger $A = \bigcup \mathscr{A}$ (s. [1], § 8, Kap. I); also ist w eine Ordnung auf A.

Es sei $x, y \in A$ und $(x, y) \in u$. Die Relation ϱ ist eine Äquivalenz auf A und es existieren darum $X, Y \in \mathscr{A}$ so dass $x \in X$ und $y \in Y$ ist. Wenn $X = Y$ ist, dann ist nach (4) $(x, y) \in w$. Wenn $X \neq Y$ ist, dann ist $(X, Y) \in \dot{u}$ und also ist $(X, Y) \in u_{A/\varrho} \subseteq \underline{v}$; nach (5) gilt dann wieder $(x, y) \in w$. Also ist $u \subseteq w$.

Es sei $X, Y \in \mathscr{A}$, $(X, Y) \in \underline{v}$. Wenn $X = Y$ ist, dann gilt nach (4) die Relation $(X, Y) \in \in w_{A/\varrho}$; es ist $X \neq \emptyset$ und also ist $(X, Y) = (X, X) \in \dot{w} \cap (\mathscr{A} \times \mathscr{A}) \subseteq w_{A/\varrho}$. Wenn $X \neq Y$ ist, dann wählt man $x \in X$, $y \in Y$ und nach (5) ist $(x, y) \in w$, d. h. es gilt auch $(X, Y) \in \dot{w} \cap (\mathscr{A} \times \mathscr{A}) \subseteq w_{A/\varrho}$. Also ist $\underline{v} \subseteq w_{A/\varrho}$. Ist umgekehrt $X, Y \in \mathscr{A}$, $(X, Y) \in \in w_{A/\varrho}$ dann ist im Fall $X = Y$ offenbar auch $(X, Y) \in \underline{v}$, nachdem die Menge $(\mathscr{A}, \underline{v})$ geordnet ist; sei also ferner $X \neq Y$. Dann existieren $n \in N$ und paarweise punktfremde Mengen $X_0, \ldots, X_n, X_{n+1} \in \mathscr{A}$ derart, dass $(X_i, X_{i+1}) \in \dot{w}$ für alle $i = 0, \ldots, n$ und $X_0 = X$, $X_{n+1} = Y$ ist; nach (5) gilt dann auch $(X_i, X_{i+1}) \in \underline{v}$ und der Transitivität von $\underline{v}$ auf $\mathscr{A}$ zufolge ist $(X, Y) \in \underline{v}$. Es gilt also auch die umgekehrte Inklusion $w_{A/\varrho} \subseteq \underline{v}$ und also ist $w_{A/\varrho} = \underline{v}$.

Die Relation $\underline{v} = w_{A/\varrho}$ ist eine Ordnung auf $\mathscr{A}$ und darum ist $\varrho \in G(A, w)$ nach dem Satz 19 in [7], d. h. es ist $w \in U(\varrho)$.

12. Lemma. *Es sei $\varrho, \sigma \in D(A)$, $\varrho \subseteq \sigma$ und zu jeder Menge $X \in A/\sigma$ existiere höchstens eine Menge $Y \in A/\varrho$, für welche $Y \subseteq X$ ist. Dann ist $U(\sigma) \subseteq U(\varrho)$.*

Beweis. Wählen wir $u \in U(\sigma)$. Nach den Voraussetzungen des Lemmas und nach [7], Abs. 17 ist $(A/\varrho, \underline{u}_{A/\varrho})$ eine geordnete Menge (die Relation $\underline{u}_{A/\varrho}$ ist nach den Voraussetzungen des Lemmas, welches da zu beweisen ist, antisymmetrisch auf A/ϱ). Demzufolge ist nach [7], Abs. 17 und 19 $\varrho \in F(A, u)$, d. h. es ist $u \in U(\varrho)$. Dadurch ist die Inklusion $U(\sigma) \subseteq U(\varrho)$ bewiesen.

13. Satz. *Es sei $\varrho \in D(A)$ und $u \in U(\varrho)$. Dann existiert im geordneten System $(U(\varrho), \subseteq)$ zumindest ein Maximalelement v, für welches $u \subseteq v$ gilt.*

Der Beweis folgt von der Folgerung 9 und dem Zornschen Satz.

14. Bezeichnung. Es sei ϱ eine Teiläquivalenz in A. Die Menge aller Maximalelemente in $(U(\varrho), \subseteq)$ bezeichnen wir dann mit $U'(\varrho)$.

15. Satz. *Es sei $\varrho \in D(A)$ und $u \in U'(\varrho)$. Dann ist (A, u) eine Kette.*

Beweis. Wählen wir $\sigma \in G_\varrho(A, u)$ (s. [7], Abs. 42). Vom Lemma 10 und von dem bekannten Satz über die Existenz einer Erweiterung einer Ordnung in eine lineare Ordnung (s. SZPILRAJN [8]) folgt die Existenz einer Ordnung $v \in U(\sigma)$, mit Rücksicht auf welche für alle Mengen B, $B \in A/\sigma$ die geordnete Menge (B, v) eine Kette ist, wobei v den Inklusionen $u \cap (B \times B) \subseteq v \cap (B \times B)$ genügt. Von der Maximalität von u in $(U(\varrho), \subseteq)$, der Definition von $G_\varrho(A, u)$ und von dem Lemma 12 folgt aber dann die Gleichung $u = v$. Zur Ordnung $u_{A/\sigma}$ auf A/σ existiert wieder nach der oben zitierten Behauptung von Szpilrajn eine Ordnung $\underline{v}$ auf A/σ derart, dass $u_{A/\sigma} \subseteq \underline{v}$ ist und dass $(A/\sigma, \underline{v})$ eine Kette ist. Zu der Ordnung $u = v$ auf A und zu $\underline{v}$ auf A/σ definieren wir nach dem Lemma 11 die Ordnung $w \in U(\varrho)$. Nach der im Lemma 11 angegebenen Konstruktion ist die geordnete Menge (A, w) offenbar eine Kette und die Inklusion $U(\sigma) \subseteq U(\varrho)$ (Lemma 12) hat $w \in U(\varrho)$ zu ihren Folgerung. Es ist $u = v \subseteq w$ und von der vorausgesetzten Maximalität von u in $(U(\varrho), \subseteq)$ folgt die Gleichung $u = w$. Dadurch ist der Satz bewiesen.

16. Folgerung. *Es sei $\varrho \in D(A)$ und $u \in U(\varrho)$. (A, u) ist genau dann eine Kette, wenn $u \in U'(\varrho)$ ist.*

Beweis. Wenn (A, u) eine Kette ist, dann kann die Ordnung u auf A schon nicht so erweitert werden, dass die entstandene Relation wieder eine Ordnung wäre; daher und von der Voraussetzung $u \in U(\varrho)$ folgt, dass $u \in U'(\varrho)$ ist. Die umgekehrte Behauptung ist die Behauptung des Satzes 15.

17. Folgerung. *Es sei $\varrho \in E(A)$. Dann ist (A, u) für alle $u \in U'(\varrho)$ die lexikographische Summe von Ketten, deren Träger genau alle Elemente von A/ϱ sind, wobei die geordnete Menge dieser Ketten selbst eine Kette ist.*

Der Beweis folgt unmittelbar vom Satz 15; wenn wir $u \in U'(\varrho)$ wählen, dann ist
$$(A, u) = \sum_{X \in (A/\varrho, u_{A/\varrho})} (X, u).$$
(Vgl. übrigens [1], Kap. I. § 8.)

18. Bemerkung. In den Abs. 19–21 beachten wir die Zusammenhänge zwischen schwach faktorisierenden Äquivalenzen und Zerlegungen in eingelegte teilgeordnete Teilmengen; die Zerlegungen in eingelegte teilgeordnete Teilmengen untersucht Prof. ČULÍK im Artikel [4].

Wir sagen genau dann, dass *die Menge B in die geordnete Menge (A, u) eingelegt ist*, wenn die folgende Bedingung erfüllt ist:

Wenn $x, y \in B$ und $z \in A - B$ ist, dann ist $(x, z) \in u$ genau dann, wenn $(y, z) \in u$ ist und $(z, x) \in u$ genau dann, wenn $(z, y) \in u$ ist.

Zum Unterschied von [4] S. 16 setzen wir also nicht voraus, dass die Menge B nicht leer ist. Ferner bemerken wir noch, dass die Zerlegung $\mathscr{A}$ in A man genau dann *eine Zerlegung in eingelegte Mengen in (A, u)* nennt, wenn jedes Element von $\mathscr{A}$ eine in (A, u) eingelegte Menge ist. Für die weiteren Ziele führen wir die folgenden Definitionen an:

a. Es sei $\varrho \in E(A)$ und $u \in \mathscr{U}(A)$. Dann wird ϱ *eine u-stark faktorisierende Äquivalenz* genau dann genannt, wenn für $x_1, x_2, y_1, y_2 \in A$, $(x_1, x_2) \in \varrho$, $(y_1, y_2) \in \varrho$, $(x_1, y_1) \notin \varrho$ die Beziehung $(x_1, y_1) \in u$ genau dann gilt, wenn die Relation $(x_2, y_2) \in u$ gilt.

b. Es sei $u \in \mathscr{U}(A)$ und $\varrho \in G(A, u)$. Dann definieren wir $(x, y) \in u(\varrho)$ genau dann, wenn $x, y \in A$ ist und entweder für $(x, y) \in \varrho \cap u$ oder für $X, Y \in A/\varrho$, $x \in X$, $y \in Y$ die Beziehungen $(X, Y) \in u_{A/\varrho}$ und $X \neq Y$ richtig sind.

19. Satz. *Es sei $\mathscr{A} \subseteq B(A)$ und $u \in \mathscr{U}(A)$. Dann ist $\mathscr{A}$ genau dann eine Zerlegung auf A in eingelegte u-teilgeordnete Teilmengen, wenn eine u-stark faktorisierende Äquivalenz ϱ so existiert, dass $\mathscr{A} = A/\varrho$ ist.*

Beweis. Sei $\mathscr{A}$ eine Zerlegung der geordneten Menge (A, u) in eingelegte u-teilgeordnete Mengen. Dann existiert genau eine Äquivalenz ϱ auf A so dass $\mathscr{A} = A/\varrho$ ist. Nach der Definition vom Abs. 18a. und nach den Definitionen in [4] S. 16 ist eine u-stark faktorisierende Äquivalenz.

Es sei ϱ eine u-stark faktorisierende Äquivalenz, $X \in A/\varrho$, $x, y \in X$, $z \in A - X$. Dann existiert $Z \in A/\varrho$ so dass $z \in Z$ ist. Sei $(x, z) \in u$. Es ist $X \neq Z$ und nach dem Abs. 18a. ist $(y, z) \in u$. Ähnlicherweise kann gezeigt werden, dass $(y, z) \in u$ zufolge $(x, z) \in u$, $(z, x) \in u$ zufolge $(z, y) \in u$ und schliesslich dass $(z, y) \in u$ zufolge $(z, x) \in u$ ist. Also ist A/ϱ eine Zerlegung von (A, u) in eingelegte u-teilgeordnete Mengen.

20. Satz. *Sei $u \in \mathscr{U}(A)$ und $\varrho \in E(A)$. Wenn ϱ eine u-stark faktorisierende Äquivalenz auf A ist, dann ist ϱ eine u-schwach faktorisierende Äquivalenz auf A, aber die umgekehrte Behauptung gilt allgemein nicht.*

Beweis. Die Relation $\dot{u} \cap (A/\varrho \times A/\varrho)$ ist offenbar eine Ordnung auf A/ϱ s. übrigens [4], S. 16. Nach [7], Abs. 17 und 19 ist also $\varrho \in G(A, u)$.

Wählen wir eine von drei Elementen bestehende Menge $A = \{a, b, c\}$ und $u = \{(a, b), (a, a), (b, b), (c, c)\}$. Offensichtlich ist $u \in \mathscr{U}(A)$. Ferner wählen wir $\sigma = \{(a, a), (b, b), (c, c), (b, c), (c, b)\}$, $u_{A/\sigma} = \{(\{a\}, \{a\}), (\{b, c\}, \{b, c\}), (\{a\}, \{b, c\})\} \in \mathscr{U}(A/\sigma)$ und also σ ist eine u-schwach faktorisierende Äquivalenz auf A. Offenbar ist σ nicht u-stark faktorisierend auf A, nachdem $(b, c) \in \sigma$, $(a, c) \notin \sigma$, $(a, b) \in u$, $(a, c) \notin u$ ist.

21. Satz. *Es sei $u \in \mathscr{U}(A)$ und $\varrho \in G(A, u)$. Dann gelten die folgenden Behauptungen:*

a. *Es ist $u \subseteq u(\varrho)$ und $(A, u(\varrho))$ ist eine geordnete Menge; es ist $u_{A/\varrho} = u(\varrho)_{A/\varrho}$.*

b. *Die Relation ϱ ist eine $u(\varrho)$-stark faktorisierende Äquivalenz auf A.*

c. *Sei $v \in \mathscr{U}(A)$, $u \subseteq v$ und sei ϱ eine v-stark faktorisierende Äquivalenz auf A. Dann ist $u(\varrho) \subseteq v$.*

Beweis. a. Diese Behauptung ist eine unmittelbare Folgerung der Definition von $u(\varrho)$ (Abs. 18b.) und des Lemmas 11.

b. Es sei $X \in A/\varrho$, $x, y \in X$, $z \in A - X$ und $(x, z) \in u(\varrho)$. Es existiert eine Menge Z, $Z \in A/\varrho$, welche das Element z enthält; offenbar ist $Z \neq X$. Der Definition von $u(\varrho)$ nach gilt auch die Ungleichung $(y, z) \in u(\varrho)$, da $(X, Z) \in u_{A/\varrho}$ ist. Gleicherweise leicht kann man auch die weiteren Aussagen herleiten, welche zum Beweis der Behauptungen

$$(X \in A/\varrho,\ x, y \in X,\ z \in A - X) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (((x, z) \in u(\varrho) \Leftrightarrow (y, z) \in u(\varrho)) \quad \text{und} \quad ((z, x) \in u(\varrho) \Leftrightarrow (z, y) \in u(\varrho)))$$

(s. [4] Voraussetzung (1) auf S. 16) benötigt werden. Also ist ϱ eine $u(\varrho)$-stark faktorisierende Äquivalenz auf A.

c. Es sei $x, y \in A$, $(x, y) \in u(\varrho)$, $X, Y \in A/\varrho$, $x \in X$, $y \in Y$. Wenn $X = Y$ ist, dann ist nach der Definition von $u(\varrho)$ (Abs. 18b.) $(x, y) \in \varrho \cap u$ und die Ungleichung $(x, y) \in v$ ist dann eine Folgerung der vorausgesetzten Inklusion $u \subseteq v$. Es gelte also $X \neq Y$. Dann ist $(X, Y) \in u_{A/\varrho}$ zufolge der vorausgesetzten Relation $(x, y) \in u(\varrho)$ und es gibt also eine natürliche Zahl n, $n \geqq 2$ und Mengen $X_1, \ldots, X_n \in A/\varrho$, welche die Beziehungen $X = X_1$, $Y = X_n$ und $(X_i, X_{i+1}) \in \dot{u}$ für alle $i = 1, \ldots, n - 1$ erfüllen. Die Mengen $X_1, \ldots, X_n$ sind voraussetzungsgemäss in (A, v) eingelegt (s. [4], S. 16) und deswegen ist $(x_i, x_{i+1}) \in v$ für $i = 1, \ldots, n - 1$ und beliebige Elemente $x_i \in X_i$, $x_n \in X_n$, nachdem offenbar $\dot{u} \cap (A/\varrho \times A/\varrho) \subseteq u_{A/\varrho} \subseteq v_{A/\varrho}$ und $(X_i, X_{i+1}) \in \dot{u}$ ist. Von den Beziehungen $(x_i, x_{i+1}) \in v$ und von der Transitivität von v auf A folgt dann speziell $(x, y) \in v$. Die Inklusion $u(\varrho) \subseteq v$ ist so hiemit bewiesen.

22. Definition. Es sei (A, u) eine Kette und $X \subseteq A$. Die Menge X nennen wir genau dann eine *echte u-konvexe* Menge, wenn $X \subset A$, $X \neq \emptyset$ und wenn X eine konvexe Teilmenge in (A, u) ist.

Wenn $\mathscr{V}$ die Menge linearer Ordnungen auf A ist, dann wird X genau dann *eine $\mathscr{V}$-konvexe Menge* genannt, wenn X für alle $v \in \mathscr{V}$ eine konvexe Teilmenge von (A, v) ist. X heisst genau dann eine *echte* $\mathscr{V}$-konvexe Menge, wenn X eine $\mathscr{V}$-konvexe Menge ist und wenn $\emptyset \neq X \subset A$ ist.

X wird genau dann eine *offene* $\mathscr{V}$-konvexe Menge genannt, wenn X eine $\mathscr{V}$-konvexe Menge ist und wenn für kein $v \in \mathscr{V}$ die geordnete Menge (X, v) ein kleinstes und ein grösstes Element hat.

Die Relation $\varrho \in E(A)$ heisst genau dann *eine $\mathscr{V}$-konvexe Äquivalenz* (kürzer *$\mathscr{V}$-Äquivalenz*), wenn jedes Element von A/ϱ eine $\mathscr{V}$-konvexe Menge ist.

23. Lemma. *Es sei $\varrho \in E(A)$. Dann gelten diese Behauptungen:*

a. *Wenn $X \in A/\varrho$ ist, dann ist X eine $U'(\varrho)$-konvexe Menge.*

b. *Es sei $w \in \mathscr{U}(A)$, sei (A, w) eine Kette und sei $w \notin U'(\varrho)$. Dann ist ϱ keine w-konvexe Äquivalenz.*

c. *Es sei $\mathscr{V}$ die Menge linearer Ordnungen auf A. Dann ist ϱ genau dann eine $\mathscr{V}$-konvexe Äquivalenz, wenn $\varrho \in e(\mathscr{V})$ ist.*

Beweis. Die Behauptung a. ist der Inhalt des Satzes 36 in [7].

b. Den Beweis führen wir mittels eines Widerspruches; es sei unter der gegebenen Voraussetzungen die Äquivalenz ϱ w-konvex. Dann sind alle Elemente des nichtleeren Systemes A/ϱ nichtleere w-konvexe Mengen. Sei $X, Y \in A/\varrho$, $(X, Y) \in \dot{w}$ und $(Y, X) \in \dot{w}$. Dann gibt es $x_1, x_2 \in X$, $y_1, y_2 \in Y$, für welche $(x_1, y_1) \in w$, $(y_2, x_2) \in w$ ist. Die geordnete Menge (A, w) ist eine Kette und demzufolge gelten die Implikationen

$$(y_1, y_2) \in w \Rightarrow y_1 \in X \; ; \quad (x_2, x_1) \in w \Rightarrow x_1 \in Y \; ;$$
$$(y_2, y_1) \in w \quad \text{und} \quad (x_1, x_2) \in w \quad \text{und} \quad (y_2, x_1) \in w \Rightarrow x_1 \in Y \; ;$$
$$(y_2, y_1) \in w \quad \text{und} \quad (x_1, x_2) \in w \quad \text{und} \quad (x_1, y_2) \in w \Rightarrow y_2 \in X \, ,$$

deren Antezendenten alle logische Möglichkeiten erschöpfen. Der Punktfremdheit des Systemes A/ϱ zufolge folgt dann von $(X, Y), (Y, X) \in \dot{w}$ die Gleichung $X = Y$. Die Relation $\dot{w}$ ist auf A/ϱ auch transitiv, was wieder sofort daher vorkommt, dass (A, w) eine Kette ist. Speziell ist $\dot{w} \cap (A/\varrho \times A/\varrho) = w_{A/\varrho}$ eine (lineare) Ordnung auf A/ϱ; nach [7], Abs. 17 und 19 ist dann $\varrho \in G(A, w)$ oder mit anderen Worten ist $w \in U'(\varrho)$. Dieser Widerspruch beweist die Behauptung.

c. Wenn ϱ eine $\mathscr{V}$-konvexe Äquivalenz auf A ist, dann ist nach b. $\mathscr{V} \subseteq U'(\varrho)$ und also ist $\varrho \in e(\mathscr{V})$. Wenn umgekehrt $\varrho \in e(\mathscr{V})$ ist, dann $\mathscr{V} \subseteq U(\varrho)$ und nachdem die Elemente von $\mathscr{V}$ auch lineare Ordnungen auf A sind, ist nach Abs. 16 $\mathscr{V} \subseteq U'(\varrho)$.

24. Bemerkung. Offenbar gelten diese Behauptungen:

a. Wenn $\mathscr{V} = \emptyset$ ist, dann ist jede Teilmenge in A $\mathscr{V}$-konvex.

b. Wenn $\mathscr{V}$ eine beliebige Menge linearer Ordnungen auf A ist (d. h. wenn $\mathscr{V} \subseteq$ $\subseteq U'(\mathrm{id}_A)$ ist), dann ist jede, höchstens ein Element enthaltend, Teilmenge in A $\mathscr{V}$-konvex und A ist immer eine $\mathscr{V}$-konvexe Menge.

c. Ist card $A \geqq 3$, $X \subset A$ und card $X > 1$, dann existiert eine lineare Ordnung $\boldsymbol{u}$ auf A derart, dass X nicht u-konvex ist.

d. Wenn die Menge X, $X \subseteq A$ $\mathscr{V}$-konvex ist und wenn $\mathscr{V}_1 \subseteq \mathscr{V}$ gilt, dann ist X $\mathscr{V}_1$-konvex.

e. Wenn die Menge X, $X \subseteq A$ nicht $\mathscr{V}$-konvex ist und wenn $\mathscr{V} \subseteq \mathscr{V}_2$ ist, dann ist X nicht $\mathscr{V}_2$-konvex.

25. Lemma. *Es sei $\varrho \in E(A)$, $a, b, c \in A$, $a \neq c$ und es gelte*

$$(a, b) \in \varrho \quad \textit{oder} \quad (b, c) \in \varrho \quad \textit{oder} \quad (a, b), (b, c), (c, a) \notin \varrho \, .$$

Dann existiert ein $\boldsymbol{u} \in U'(\varrho)$ so dass $(a, b) \in \boldsymbol{u}$, $(b, c) \in \boldsymbol{u}$ ist.

Beweis. Die Relation v definieren wir folgenderweise:

$$v =_{\mathrm{Df}} \{(a, b), (b, c), (a, c)\} \cup \mathrm{id}_A ;$$

nach den Voraussetzungen des Lemmas ist offenbar $v \in U(\varrho)$ und nach den Sätzen 13 und 15 existiert eine lineare Ordnung $u \in U'(\varrho)$ auf A, für welche $v \subseteq u$ ist; u besitzt die verlangten Eigenschaften.

26. Lemma. *Es sei $\varrho \in E(A)$ und sei B eine echte $U'(\varrho)$-konvexe Menge. Dann ist $(x, y) \in \varrho$ für alle Elemente $x, y \in B$.*

Den Beweis führen wir mittels eines Widerspruches. Es existiere $a, c \in B, (a, c) \notin \varrho$. Wählen wir $b \in A - B$; B ist nämlich eine echte konvexe Menge und darum ist $A - B \neq \emptyset$. Es können genau diese Möglichkeiten vorkommen:

$$(a, b) \in \varrho ; \quad (b, c) \in \varrho ; \quad (a, b) \notin \varrho \quad \text{und} \quad (b, c) \notin \varrho \quad \text{und} \quad (a, c) \notin \varrho .$$

Dem Lemma 25 nach existiert dann $u \in U'(\varrho)$ derart, dass $(a, b), (b, c) \in u$ ist und also ist B sogar keine $\{u\}$-konvexe Menge und desto weniger ist diese also eine $U'(\varrho)$-konvexe Menge.

27. Satz. *Es sei $\varrho \in E(A)$, $\sigma \in e(U'(\varrho))$ und sei* card $A/\sigma > 1$. *Dann ist $\sigma \subseteq \varrho$ und ferner gilt $\varrho \in e(U'(\varrho))$.*

Der Beweis folgt unmittelbar von der Voraussetzung card $A/\sigma > 1$ (d. h. für alle $X \in A/\sigma$ ist $\emptyset \subset X \subset A$) und vom Lemma 26. Die Relation $\varrho \in e(U'(\varrho))$ kommt direkt von der Definition der Abbildungen e, U her (s. Abs. 1).

Über eine Charakterisierung einer Äquivalenz auf einer Menge

28. Folgerung. *Es sei $\varrho \in E(A)$ und $\varrho \neq A \times A$. Dann ist*

$$\varrho = \max_{(E(A), \subseteq)} \{\sigma \mid \sigma \in e(U'(\varrho)), \ \sigma \neq A \times A\} .$$

Der Beweis folgt sofort vom Satz 27.

29. Bemerkung. Von der Folgerung 28 ist es zu sehen, dass die Äquivalenz $\varrho \in E(A)$ auf A, für welche $A/\varrho \neq \{A\}$ ist, vollständig durch die Menge $U'(\varrho)$ charakterisiert ist; die Voraussetzung $A/\varrho \neq \{A\}$ (d. h. $\varrho \neq A \times A$) ist dabei notwendig, nachdem für $\varrho' = A \times A$ ist $U'(\mathrm{id}_A) = U'(\varrho')$. Es ist offensichtlich, dass die Charakterisation $U'(\varrho)$ der Äquivalenz ϱ auf A „zu weitgehend" ist, da es z. B. genügt nur solche Mengen $\mathscr{V}$, $\mathscr{V} \subseteq U'(\mathrm{id}_A)$ zu erwägen, für welche $U'(\varrho) = \{u \mid u \in \mathscr{V}$ oder $u^{-1} \in \mathscr{V}\}$ ist; vgl. dafür übrigens Lemma 4b. Weiterhin werden wir uns mit der Charakterisation einer Äquivalenz auf A mit Hilfe von linearer Ordnungen auf A im Sinne der folgenden Definition befassen.

30. Definition. Es sei $\mathscr{V}$ eine Menge linearer Ordnungen auf A. $\mathscr{V}$ wird dann *eine e-Charakteristik* genau dann genannt, wenn die Äquivalenz

$$\mathscr{V}^* =_{\mathrm{Df}} \sup_{(E(A),\subseteq)} \{\sigma \mid \sigma \in e(\mathscr{V}),\ \sigma \neq A \times A\}$$

der Beziehung $\mathscr{V}^* \neq A \times A$ genügt. $\mathscr{V}$ nennen wir *eine e-Charakteristik der Äquivalenz* ϱ genau dann, wenn $\mathscr{V}^* = \varrho$ ist.

31. Bezeichnung. Mit dem Symbol $\mathscr{U}'(A)$ bezeichnen wir die Menge aller linearen Ordnungen auf A.

32. Lemma. *Es sei* $\mathscr{V} \subseteq \mathscr{U}'(A)$, *sei* $n \geqq 1$ *eine natürliche Zahl und es seien* $A_0, \ldots, A_n$ $\mathscr{V}$*-konvexe Mengen mit* $A_i \cap A_{i+1} \neq \emptyset$ *für alle* $i = 0, \ldots, n-1$. *Dann ist* $\bigcup_{i=0}^{n} A_i$ *eine* $\mathscr{V}$*-konvexe Menge.*

Der Beweis wird induktionsweise nach n durchgeführt; für $n = 1$ folgt dieser unmittelbar von der Definition einer $\mathscr{V}$-konvexen Menge (Abs. 22).

33. Lemma. *Es sei* $\mathscr{V} \subseteq \mathscr{U}'(A)$, $a \in A$ *und sei* $\mathscr{A}$ *ein nichtleeres System* $\mathscr{V}$*-konvexer Mengen, welche alle das Element a enthalten. Dann ist* $\bigcup \mathscr{A}$ *und auch* $\bigcap \mathscr{A}$ *eine* $\mathscr{V}$*-konvexe Menge.*

Der Beweis folgt direkt von der Definition einer $\mathscr{V}$-konvexen Menge (Abs. 22).

34. Lemma. *Es sei* $\mathscr{V}$ *eine e-Charakteristik. Dann ist* $\mathscr{V}^*$ *eine* $\mathscr{V}$*-Äquivalenz.*

Beweis. Wählen wir $B \in A/\mathscr{V}^*$ und $a \in B$. Für $x \in B$ existieren dann eine natürliche Zahl $n(x) \geqq 1$, Äquivalenzen $\varrho_i(x) \in e(\mathscr{V})$ $(i = 0, \ldots, n(x))$ und Elemente $B_i(x) \in A/\varrho_i(x)$ derart, dass $a \in B_0(x)$, $x \in B_{n(x)}(x)$, $B_j(x) \cap B_{j+1}(x) \neq \emptyset$ für $j = 0, \ldots$ $\ldots, n(x) - 1$ ist. Nach dem Lemma 32 ist $B(x) = \bigcup_{i=0}^{n(x)} B_i(x)$ eine $\mathscr{V}$-konvexe Menge und offenbar ist $a \in B(x)$, $x \in B(x)$ und $B(x) \subseteq B$. Nach den soeben hergeleiteten Beziehungen und nach dem Lemma 33 ist B eine $\mathscr{V}$-konvexe Menge; es ist also $\mathscr{V}^*$ eine $\mathscr{V}$-Äquivalenz, da die Menge B, $B \in A/\mathscr{V}^*$ beliebig gewählt worden ist.

35. Satz. *Es sei* $\mathscr{V}$ *eine e-Charakteristik. Dann ist*

$$\mathscr{V}^* = \max_{(E(A),\subseteq)} \left(e(\mathscr{V}) - \{A \times A\}\right).$$

Beweis. Nach dem Lemma 34 ist $\mathscr{V}^*$ eine $\mathscr{V}$-Äquivalenz und also ist nach dem Lemma 23c. $\mathscr{V}^* \in e(\mathscr{V})$; nach der Voraussetzung und der Definition der e-Charakteristik (Abs. 30) ist dann $\mathscr{V}^*$ im Sinne der Inklusion das grösste Element in $e(\mathscr{V}) - \{A \times A\}$.

36. Lemma. *Es sei $\mathscr{V}$ eine e-Charakteristik und sei C eine echte $\mathscr{V}$-konvexe Menge. Dann existiert B, $B \in A/\mathscr{V}^*$ so dass $C \subseteq B$ ist.*

Der Beweis folgt vom Lemma 23c.: Unter den Voraussetzungen des zu beweisenden Lemmas ist die Äquivalenz $\sigma =_{\mathrm{Df}} (C \times C) \cup \mathrm{id}_{A-C}$ eine $\mathscr{V}$-Äquivalenz auf A (s. z. B. [7], Abs. 41, wo wir $\varrho = k(\varrho) = C \times C$ legen) und deswegen ist $\sigma \in e(\mathscr{V})$. Der Voraussetzung nach ist $\emptyset \subset C \subset A$ und darum ist $\sigma \neq A \times A$; also ist $\sigma \in$ $\in e(\mathscr{V}) - \{A \times A\}$ und $\mathscr{V}$ ist eine e-Charakteristik. Von der Definition der e-Charakteristik (Abs. 30) ergibt sich dann von dieser Inklusion ist dann die Behauptung des Lemmas sofort ersichtlich.

37. Satz. *Es sei* card $A \geqq 2$ *und* $\mathscr{V} \subseteq \mathscr{U}'(A)$. *Dann ist $\mathscr{V}$ genau dann eine e-Charakteristik, wenn $\mathscr{V}$ der folgenden Bedingung genügt.*

(6) *Wenn X eine echte $\mathscr{V}$-konvexe Menge ist, dann existiert eine im Sinne der Inklusion grösste echte $\mathscr{V}$-konvexe Menge $B = B(X)$, für welche $X \subseteq B$ ist.*

Wenn $\mathscr{V}$ der Bedingung (6) genügt, dann ist das System $^*\mathscr{V}$ aller echten, im Sinne der Inklusion maximalen $\mathscr{V}$-konvexen Mengen einer Zerlegung von $A/\mathscr{V}^*$ gleich.

Beweis. Setzen wir zuerst voraus, dass $\mathscr{V}$ eine e-Charakteristik und X eine echte $\mathscr{V}$-konvexe Menge ist. Nach dem Lemma 36 existiert dann $B = B(X) \in A/\mathscr{V}^*$ so dass $X \subseteq B$ ist. Nach der Voraussetzung über $\mathscr{V}$ ist $\emptyset \subset B \subset A$; von diesem und von dem Lemma 34 folgt, dass B eine echte $\mathscr{V}$-konvexe Menge ist. Wenn B_1 eine echte $\mathscr{V}$-konvexe Menge, welche der Inklusion $B \subseteq B_1$ genügt, ist, dann ist es mit Hilfe vom Lemma 36 zu sehen, dass $B = B_1$ ist; B ist demzufolge eine im Sinne der Inklusion grösste echte $\mathscr{V}$-konvexe Menge, für die $C \subseteq B$ gilt.

Erfülle umgekehrt die Menge $\mathscr{V}$ die Bedingung (6). Jede nur ein Element enthaltende Teilmenge in A ist $\mathscr{V}$-konvex und es ist $A \neq \emptyset$; also ist $^*\mathscr{V} \neq \emptyset$. Wir zeigen zuerst, dass $^*\mathscr{V}$ eine Zerlegung auf A ist. Dem Obigen nach ist $\bigcup {}^*\mathscr{V} = A$. Wählen wir $B, C \in {}^*\mathscr{V}$, $B \neq C$. Wenn $B \cap C \neq \emptyset$ ist, dann ist nach Abs. 33 $B \cap C$ eine echte $\mathscr{V}$-konvexe Menge, wobei $B \cap C \subseteq B$, $B \cap C \subseteq C$, $B \neq C$ ist. Die Bedingung (6) ist also nicht erfüllt; dieser Widerspruch hat die Punktfremdheit des Systemes $^*\mathscr{V}$ zufolge. Die Elemente von $^*\mathscr{V}$ sind echte $\mathscr{V}$-konvexe Mengen und also sind diese alle nichtleere Mengen, d. h. $^*\mathscr{V}$ ist eine Zerlegung auf A und zugleich folgt daher, dass $^*\mathscr{V} \neq \{A\}$ ist. Wenn $\varrho \in E(A)$ diejenige Äquivalenz ist, für welche $^*\mathscr{V} = A/\varrho$ gilt, dann ist nach dem Voranstehenden und nach dem Lemma 23c. $\varrho \in e(\mathscr{V}) -$ $- \{A \times A\}$. Die Bedingung (6) bringt zugleich mit sich, dass ϱ im Sinne der Inklusion maximal in $e(\mathscr{V}) - \{A \times A\}$ ist und also ist $\varrho = \mathscr{V}^*$. Dadurch ist der Satz bewiesen.

38. Folgerung. *Es sei* card $A \geqq 2$ *und* $\mathscr{V} \subseteq \mathscr{U}'(A)$. *Dann ist $\mathscr{V}$ genau dann eine e-Charakteristik, wenn das System $^*\mathscr{V}$ (s. Abs. 37) eine Zerlegung auf A ist und wenn $^*\mathscr{V} \neq \{A\}$ gilt.*

Beweis. Es sei $*\mathscr{V} \neq \{A\}$ eine Zerlegung auf A und sei X eine echte $\mathscr{V}$-konvexe Menge. Setzen wir voraus, dass $B, C \in *\mathscr{V}$ so existieren, dass $B \neq C$ und $X \cap B \neq \emptyset \neq X \cap C$ ist. Nach Abs. 32 ist dann $X \cup B$ eine $\mathscr{V}$-konvexe Menge und von der Beziehung $X \cap C \neq \emptyset$ folgt $B \subset X \cup B$; soeben kann gezeigt werden, dass $C \subset X \cup C$ ist und dass $X \cup C$ eine $\mathscr{V}$-konvexe Menge ist. Zumindest eine der $\mathscr{V}$-konvexen Mengen $X \cup B$, $X \cup C$ ist eine echte und dieses widerspricht der Definition des Systemes $*\mathscr{V}$. Die Menge $*\mathscr{V}$ erfüllt also die Bedingung (6) vom Abs. 37 und demzufolge ist nach dem Satz 37 $\mathscr{V}$ eine e-Charakteristik.

Ist umgekehrt $\mathscr{V}$ eine e-Charakteristik, dann ist $*\mathscr{V} \neq \{A\}$ und nach dem Satz 37 ist $*\mathscr{V}$ eine Zerlegung auf A.

39. Definition. Es sei $\mathscr{V} \subseteq \mathscr{U}'(A)$. Für $x, y \in A$ definieren wir dann $(x, y) \in v_1$ genau dann, wenn eine echte $\mathscr{V}$-konvexe Menge $B = B(x, y)$ so existiert, dass $x, y \in B$ ist. Die Relation v definieren wir als die im Sinne der Inklusion kleinste transitive Hülle der Relation v_1 auf A.

40. Lemma. *Es sei* $\mathscr{V} \subseteq \mathscr{U}'(A)$ *und* $\operatorname{card} A \geqq 2$. *Die Relation v ist dann eine Äquivalenz auf A.*

Beweis. Die Relation v_1 ist auf A reflexiv, nachdem für jedes Element $x \in A$ $\{x\}$ eine echte $\mathscr{V}$-konvexe Menge ist; die Symmetrie von v_1 auf A folgt unmittelbar von der Definition 39 und es ist $v_1 \subseteq A \times A$. Also ist auch v (als die $\subseteq$-kleinste transitive Hülle der Relation v_1 in A) reflexiv und symmetrisch in A und definitionsgemäss ist v auch transitiv. Es ist auch $\mathrm{id}_A \subseteq v_1 \subseteq v \subseteq A \times A$ und daher ist $v \in E(A)$, d. h. v ist eine Äquivalenz auf A.

41. Satz. *Es sei* $\operatorname{card} A \geqq 2$ *und* $\mathscr{V} \subseteq \mathscr{U}'(A)$. *Dann ist $\mathscr{V}$ genau dann enie e-Charakteristik, wenn $v \neq A \times A$ ist. Wenn $\mathscr{V}$ eine e-Charakteristik ist, dann ist $*\mathscr{V} = A/v$ (d. h. $\mathscr{V}^* = v$).*

Beweis. Setzen wir zuerst voraus, dass $\mathscr{V}$ eine e-Charakteristik ist. Wählen wir $a \in A$. Dann ist $\{a\}$ eine echte $\mathscr{V}$-konvexe Menge und daher existiert nach der Bedingung (6) vom Abs. 37 eine Menge $B = B(a)$, welche die im Sinne der Inklusion grösste echte $\mathscr{V}$-konvexe Menge ist, die das Element a enthält. Wählen wir $x \in A - B$ und zeigen wir, dass $(a, x) \notin v$ ist. Ist nämlich $(a, x) \in v$, dann existieren eine natürliche Zahl n und echte $\mathscr{V}$-konvexe Mengen $A_0, \ldots, A_{n+1}$ so dass $a \in A_0$, $x \in A_{n+1}$ und $A_i \cap A_{i+1} \neq \emptyset$ für alle $i = 0, \ldots, n$ ist. Nach der Definition von B als der $\subseteq$-grössten echten $\mathscr{V}$-konvexen Menge beweist man dann induktionsweise nach n die Inklusionen $A_0, \ldots, A_{n+1} \subseteq B$, d. h. $x \in B$, dieses widerspricht aber der Wahl des Elementes x. Es ist also $(a, x) \notin v$, d. h. es ist $v \neq A \times A$.

Von der soeben durchgeführten Erläuterung folgt auch die Beziehung $A/v \Subset A/\mathscr{V}^*$ (s. [7], Abs. 1); die inverse Relation $A/\mathscr{V}^* \Subset A/v$ folgt sofort von der Definition der Relation v, nachdem für eine e-Charakteristik $\mathscr{V}$, $B \in A/\mathscr{V}^*$ und $a, b \in B$ nach dem Satz 37 sogar $(a, b) \in v_1 \subseteq v$ gilt. Also ist $A/\mathscr{V}^* = A/v$, oder auf eine andere Schreibart: es gilt $\mathscr{V}^* = v$ (s. [7], Abs. 10).

Sei umgekehrt $\mathscr{V}$ nicht eine e-Charakteristik. Dem Satz 37 zufolge existiert dann eine echte $\mathscr{V}$-konvexe Menge B derart, dass keine echte $\mathscr{V}$-konvexe Menge C, für welche $B \subseteq C$ ist, im Sinne der Inklusion eine grösste ist; das System solcher Mengen C bezeichnen wir mit $\mathscr{C}$. Es ist $B \in \mathscr{C}$ und also ist $\mathscr{C} \neq \emptyset$. Nach dem Lemma 33 ist $D =_{\mathrm{Df}} \bigcup \mathscr{C}$ eine $\mathscr{V}$-konvexe Menge, welche nach der Voraussetzung nicht echte sein kann; nachdem $\emptyset \subset B \subseteq D$ gilt, ist $D = A$. Wählen wir beliebig $a \in B$ und $x \in A$. Dann existiert $C(x) \in \mathscr{C}$ so dass $B \subseteq C(x)$ und $x \in C(x)$ ist, wobei $C(x)$ nach der Definition des Systemes $\mathscr{C}$ eine echte $\mathscr{V}$-konvexe Menge ist. Also ist $(a, x) \in v_1 \subseteq v$ und demzufolge auch $v = A \times A$.

42. Bemerkung. Sei $\mathscr{V} \subseteq \mathscr{U}'(A)$. Dann kann man die Untersuchung ob $\mathscr{V}$ eine e-Charakteristik ist, nach dem Satz 41 und der Definition 39 auf die Untersuchung der Relation v_1 überführen. Dabei können uns die Lemmas 43 und 45 behilflich sein.

43. Lemma. *Es sei $\mathscr{V} \subseteq \mathscr{U}'(A)$ und $a, b \in A$. Mit dem Symbol $\mathscr{E}(a, b)$ bezeichnen wir die Menge aller $\mathscr{V}$-konvexen Mengen, welche die Elemente a, b enthalten. Dann ist $(a, b) \in v_1$ genau dann, wenn $E(a, b) =_{\mathrm{Df}} \bigcap \mathscr{E}(a, b)$ eine echte Teilmenge in A ist.*

Beweis. Nach dem Lemma 33 ist $E(a, b)$ eine $\mathscr{V}$-konvexe Menge und die Relationen $a, b \in E(a, b)$ bringen die Nichtleerheit von $E(a, b)$ mit sich $(A \in \mathscr{E}(a, b))$. Die Menge $E(a, b)$ ist also im Sinne der Inklusion die kleinste $\mathscr{V}$-konvexe Menge, die Elemente a, b enthält. Daher ist der Beweis der Behauptung schon klar.

44. Definitionen und Bezeichnungen. Für $x, y \in A$, $u \in \mathscr{U}'(A)$ und $(x, y) \in u$ definieren wir im Fall $x \neq y$

$$\langle x, y\rangle_u =_{\mathrm{Df}} \{z \in A \mid (x, z) \in u,\ (y, z) \in u^{-1}\}\,, \quad \langle y, x\rangle_u =_{\mathrm{Df}} \emptyset\,,$$
$$(x, y)_u =_{\mathrm{Df}} \{z \in A \mid (x, z) \in u,\ (y, z) \in u^{-1},\ x \neq z,\ y \neq z\}\,, \quad (y, x)_u =_{\mathrm{Df}} \emptyset\,;$$

im Fall $x = y$ legen wir $\langle x, y\rangle_u =_{\mathrm{Df}} \{x\}$, $(x, y)_u =_{\mathrm{Df}} \emptyset$.

Es sei X eine Teilmenge in A, $a \in A$ und $\mathscr{V} \subseteq \mathscr{U}'(A)$. Dann definieren wir

$$E_1(a, X, \mathscr{V}) =_{\mathrm{Df}} \bigcup_{\substack{x \in X \\ u \in \mathscr{V}}} (\langle a, x\rangle_u \cup \langle x, a\rangle_u)\,.$$

Wenn für die natürliche Zahl n, $n \neq 0$ die Menge $E_n(a, X, \mathscr{V})$ definiert ist, dann legen wir

$$E_{n+1}(a, X, \mathscr{V}) =_{\mathrm{Df}} E_1(a, E_n(a, X, \mathscr{V}), \mathscr{V})\,, \quad E(a, X, \mathscr{V}) =_{\mathrm{Df}} \bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n(a, X, \mathscr{V})\,.$$

Wenn bei irgendeiner Erläuterung die Menge $\mathscr{V}$ gegeben ist, dann lassen wir bei den Bezeichnungen das Symbol $\mathscr{V}$ einfach weg und bezeichnen kürzer nur ($n \in N$, $n \neq 0$) $E_n(a, X) =_{\mathrm{Df}} E_n(a, X, \mathscr{V})$, $E(a, X) =_{\mathrm{Df}} E(a, X, \mathscr{V})$.

45. Lemma. *Es sei $\mathscr{V} \subseteq \mathscr{U}'(A)$, $a \in A$, $X \subseteq A$ und seien die Mengen $\mathscr{V}$ und X nicht leer. Dann gilt*

$$E_n(a, X) \subseteq E_{n+1}(a, X) \subseteq E(a, X) \subseteq A\,, \tag{7}$$

$$a \in E_n(a, X)\,, \quad (x \in X) \Rightarrow (x \in E_n(a, X)) \tag{8}$$

für alle natürliche Zahlen n, $n \neq 0$ und die Menge $E(a, X)$ ist im Sinne der Inklusion die kleinste $\mathscr{V}$-konvexe Menge, welche den Beziehungen $a \in E(a, X)$, $X \subseteq \subseteq E(a, X)$ genügt.

Beweis. Die Behauptungen (7) und (8) sind unmittelbare Folgerungen der Definitionen vom Abs. 44 und der Nichtleerheit von $\mathscr{V}$ und X; von (7) und (8) folgen dann die Beziehungen $a \in E(a, X)$, $X \subseteq E(a, X)$.

Wir beweisen zuerst, dass $E(a, X)$ eine $\mathscr{V}$-konvexe Menge ist. Wir wählen $x, y \in \in E(a, X)$. Dann gibt es natürliche Zahlen $n(x)$ und $n(y)$ so dass $x \in E_{n(x)}(a, X)$, $y \in E_{n(y)}(a, X)$ sein wird. Für $n = \max\{n(x), n(y)\}$ ist nach (7) $x, y \in E_n(a, X)$. Dann gilt nach der Definition von $E_{n+1}(a, X)$ für eine beliebige Ordnung $u \in \mathscr{V}$ die Inklusion

$$\langle x, y\rangle_u \cup \langle y, x\rangle_u \subseteq E_{n+1}(a, X) \subseteq E(a, X)$$

und also ist $E(a, X)$ offenbar eine $\mathscr{V}$-konvexe Menge.

Es sei $B \subseteq A$ eine $\mathscr{V}$-konvexe Menge, für welche $a \in B$, $X \subseteq B$ ist. Dann ist $E_1(a, X) \subseteq B$ nach der Definition von E_1 im Abs. 44 und daher, dass B eine $\mathscr{V}$-konvexe Menge ist. Mittels Induktion nach dem natürlichen Index n zeigen wir dann schon leicht, dass für alle $n \in N$, $n \neq 0$ $E_n(a, X) \subseteq B$ ist; der Definition 44 der Menge $E(a, X)$ nach gilt aber dann auch die Inklusion $E(a, X) \subseteq B$.

46. Bemerkung. In dem folgenden Schlussteil suchen wir für die gegebene Äquivalenz ϱ auf A eine Abschätzung der Zahl $m(\varrho)$ (s. Definition 47). Dabei hilft uns im Falle card $A/\varrho \geqq \aleph_0$ die Behauptung vom Abs. 50, welche selber einen bemerkenswerten Satz darstellt.

47. Definition. Es sei ϱ, $\varrho \neq A \times A$ eine Äquivalenz auf A. Mit dem Symbol $m(\varrho)$ bezeichnen wir die kleinste aller Mächtigkeiten von e-Charakteristiken der Äquivalenz ϱ.

48. Lemma. *Es sei* card $A > 2$ *und ϱ, $\varrho \neq A \times A$ sei eine Äquivalenz auf A. Dann ist $m(\varrho) > 1$.*

Beweis. Wenn $\mathscr{V} = \emptyset$ ist, dann ist $e(\mathscr{V}) = E(A)$. Der Voraussetzung nach ist card $A > 2$ und darum ist

$$\sup_{(E(A), \subseteq)} (E(A) - \{A \times A\}) = A \times A\,;$$

also ist $\emptyset$ keine e-Charakteristik und daher ist $m(\varrho) \neq 0$. Es sei $u \in \mathcal{U}'(A)$ und $\mathcal{V} = \{u\}$, d. h. (A, u) ist eine Kette. Von der Voraussetzung card $A > 2$ folgt dann $v = A \times A$ für die Relation v und also ist $\mathcal{V}$ nach dem Satz 41 nicht eine e-Charakteristik, d. h. es ist auch $m(\varrho) \neq 1$. Dieses beweist die Abschätzung $m(\varrho) > 1$.

49. Lemma. *Es sei $\emptyset \subset \mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}'(A)$, $\varrho \in E(A)$ und sei B eine $\mathcal{V}$-konvexe Menge. Bezeichnen wir $\mathcal{B} =_{\mathrm{Df}} \{X \mid X \in A/\varrho,\ X \cap B \neq \emptyset\}$. Dann ist $\mathcal{B}$ für alle $u \in \mathcal{V}$ eine $u_{A/\varrho}$-konvexe Menge in $(A/\varrho, u_{A/\varrho})$ und jedes Element von $\mathcal{B}$ mit Ausnahme von höchstens zweien ist eine Teilmenge von B.*

Beweis. Die Terminologie und Bezeichnungen sind in [7], Abs. 16 und 35 angegeben. Wir wählen $u \in \mathcal{V}$, $C, D \in \mathcal{B}$ und setzen voraus, dass $(C, D) \in u_{A/\varrho}$ ist. Wenn $C = D$ ist, dann ist jedes Element des abgeschlossenen Intervalles $\langle C, D\rangle_{u_{A/\varrho}}$ in $(A/\varrho, u_{A/\varrho})$ dem Element C gleich und gehört also zu $\mathcal{B}$. Es sei also $C \neq D$ und wählen wir $c \in B \cap C$, $d \in B \cap D$. Dann ist $c \neq d$, $(c, d) \in u$ (nachdem u eine lineare Ordnung auf A ist) und daher, dass die Menge B $\mathcal{V}$-konvexe ist folgt $\langle c, d\rangle_u \subseteq B$. Es sei $E \in (C, D)_{u_{A/\varrho}}$ (s. Abs. 44; die dort angeführte Bezeichnung für (A, u) übertragen wir auf den Fall der Kette $(A/\varrho, u_{A/\varrho})$); dann erfüllt jedes Element e, $e \in E$ die Beziehungen $(C, \{e\}) \in \dot{u}$, $(\{e\}, D) \in \dot{u}$. Daher folgt die Relation $e \in \langle c, d\rangle_u$ und dadurch auch die Inklusion $E \subseteq \langle c, d\rangle_u \subseteq B$. Die Menge $\mathcal{B}$ ist also in $(A/\varrho, u_{A/\varrho})$ eine $u_{A/\varrho}$-konvexe Menge.

Es seien $C, D, E \in \mathcal{B}$ drei paarweise verschiedene Elemente, für welche $C \subseteq B$, $D \subseteq B$, $E \subseteq B$ nicht gilt. Wähleman $u \in \mathcal{V}$. Dann ist u eine lineare Ordnung auf A und darum ist $(A/\varrho, u_{A/\varrho})$ eine Kette. Man kann also voraussetzen, dass $E \in (C, D)_{u_{A/\varrho}}$ ist. Nach dem ersten Teil des Beweises ist dann $E \subseteq B$; dieser Widerspruch beweist die übrigen Behauptungen des Lemmas.

50. Lemma. *Es sei M eine unendliche Menge. Dann existiert eine Relation σ so dass (M, σ) eine Kette ohne kleinstes und gröstes Element ist und dass jede nichtleere offene σ-konvexe Teilmenge in M die gleiche Mächtigkeit wie M hat.*

Beweis. Wir erinnern zuerst an einige Definitionen und Ergebnisse der Theorie der geordneten Mengen; diese sind in einem engen Zusammenhang mit der Ordinalpotenz 2^{ω_α} (s. [5], Kap. VI und VII, insbesondere § 5 vom Kap. VI und der Satz 6 im § 7, Kap. VII, S. 261 der russischen Übersetzung).

Wenn ξ eine Ordinalzahl ist, dann definieren wir $W(\xi)$ als die Menge aller Ordinalzahlen η, $\eta < \xi$. Wenn $f : W(\xi) \to \{0, 1\}$ ist, dann legen wir $N(f) =_{\mathrm{Df}} \{\eta \mid \eta \in W(\xi),\ f(\eta) \neq 0\}$. Für die Ordinalzahl α bezeichnen wir (nur für den Gebrauch in diesem Beweis)

$$W(2)^{W(\omega_\alpha)} =_{\mathrm{Df}} \{f \mid f : W(\omega_\alpha) \to \{0, 1\},\ 0 < \operatorname{card} N(f) < \aleph_\alpha\}\,.$$

Auf $W(2)^{W(\omega_\alpha)}$ definieren wir die übliche lexikographische Ordnung $\prec_\alpha$; für $f, g \in W(2)^{W(\omega_\alpha)}$ definieren wir also $(f, g) \in \prec_\alpha$ genau dann, wenn $\xi \in W(\omega_\alpha)$ so existiert, dass $f(\xi) = 0$, $g(\xi) = 1$ ist und $f(\eta) = g(\eta)$ für alle $\eta, \eta < \xi$ ist oder wenn $f = g$ gilt.

Die geordnete Menge $(W(2)^{W(\omega_\alpha)}, \prec_\alpha)$ ist eine Kette ohne dem kleinsten und grössten Element, welche soeben wie jede deren nichtleere offene konvexe Teilmenge die Mächtigkeit $\aleph_\alpha$ hat.

Wenn M eine unendliche Menge ist, dann existiert genau eine Ordinalzahl α so dass card $M = \aleph_\alpha$ ist. Es existiert dann auch eine bijektive Abbildung $f : W(2)^{W(\omega_\alpha)} \to$ $\to M$; als σ wählen wir diejenige lineare Ordnung auf M, für welche f ein monotoner Isomorphismus von der Kette $(W(2)^{W(\omega_\alpha)}, \prec_\alpha)$ auf die Kette (M, σ) ist. Die Kette (M, σ) hat offenbar die verlangten Eigenschaften.

51. Satz. *Es sei ϱ eine Äquivalenz auf A und sei* card $A/\varrho \geqq \aleph_0$. *Dann ist* $m(\varrho) = 2$.

Beweis. Bezeichnen wir $\aleph_\alpha =_{\mathrm{Df}}$ card (A/ϱ). Es ist card $A \geqq \aleph_\alpha =$ card $(A/\varrho) \geqq$ $\geqq \aleph_0 > 2 > 1$; es ist daher also card $A > 2$ und $\varrho \neq A \times A$. Nach dem Lemma 48 gilt die Abschätzung $1 < m(\varrho)$.

Bezeichnen wir $\mathscr{A} =_{\mathrm{Df}} A/\varrho$. Sei u_1 diejenige Wohlordnung auf $\mathscr{A}$, für welche die Kette $(\mathscr{A}, u_1)$ die Ordinalzahl ω_α hat. Ferner wählen wir u_2 als diejenige lineare Ordnung auf $\mathscr{A}$, für welche die Kette $(\mathscr{A}, u_2)$ den Behauptungen des Lemmas 50 genügt. Für jedes Element $X \in \mathscr{A}$ wählen wir eine lineare Ordnung v_X auf A und für $i = 1, 2$ sei w_i die Ordnung der lexikographischen Summe $\sum_{X \in (\mathscr{A}, u_i)} (X, v_X)$; der Konstruktion von w_i nach folgt, dass (A, w_i) Ketten sind. Wenn wir $\mathscr{V} =_{\mathrm{Df}} \{w_1, w_2\}$ bezeichnen, dann ist jedes Element X, $X \in \mathscr{A}$ eine echte $\mathscr{V}$-konvexe Menge. Wir zeigen durch einen Widerspruch, dass alle $X \in \mathscr{A}$ im Sinne der Inklusion maximale echte $\mathscr{V}$-konvexe Mengen sind.

Es sei B eine echte $\mathscr{V}$-konvexe Menge; wir definieren $\mathscr{B} =_{\mathrm{Df}} \{X \mid X \in \mathscr{A}, X \cap B \neq$ $\neq \emptyset\}$ und setzen voraus, dass card $\mathscr{B} \geqq 2$ ist. Sei C das erste Element in $(\mathscr{A}, u_1)$, welches zu $\mathscr{B}$ gehört ($\mathscr{B}$ ist offenbar ein nichtleeres System). Nachdem Lemma 49 ist $\mathscr{B}$ eine $(w_2)_{A/\varrho}$-konvexe Menge in $(\mathscr{A}, (w_2)_{A/\varrho})$ und diese ist daher also auch eine u_2-konvexe Menge in $(\mathscr{A}, u_2)$; nach dem Lemma 11 ist nämlich $(w_2)_{A/\varrho} = u_2$. Daher folgt die Beziehung card $\mathscr{B} = \aleph_\alpha$; nach der Definition von w_1 und der Wahl von u_1 muss dann $\mathscr{B} = \{X \mid X \in \mathscr{A}, (C, X) \in u_1\}$ sein, nachdem auch eine $(w_1)_{A/\varrho} =$ $= u_1$-konvexe Menge in $(\mathscr{A}, u_1)$ und die Ordinalzahl der wohlgeordneten Kette $(\mathscr{A}, u_1)$ gleich ω_α ist. Dabei ist jedes Element von $\mathscr{B}$ mit der zufälligen Ausnahme von C eine Teilmenge in B. Es sei D das erste Element in $(\mathscr{A}, u_1)$; dann ist $\mathscr{A} - \mathscr{B} =$ $= \langle D, C)_{u_1}$ eine u_1-konvexe Menge (ein Intervall) in $(\mathscr{A}, u_1)$ und deren Mächtigkeit ist offenbar kleiner als $\aleph_\alpha$. Die Kette $(\mathscr{A}, u_2)$ genügt den Behauptungen vom Lemma 50 und so ist $\mathscr{A} = \mathscr{B}$. Dadurch ist zugleich auch gezeigt, dass für jedes Element X, $X \in \mathscr{A}$ mit der möglichen Ausnahme von C die Inklusion $X \subseteq B$ gilt. Das Element C ist aber nach der Voraussetzung über die Kette $(\mathscr{A}, u_2)$ auch nicht das letzte Element in dieser Kette und die Voraussetzung $C - B \neq \emptyset$ bringt so einen Widerspruch mit sich, nachdem B eine $\mathscr{V}$-konvexe Menge sein soll. Es gilt also $C \subseteq B$, womit die Gleichung $A = B$ bewiesen wurde, welche aber der Voraussetzung, dass die $\mathscr{V}$-konvexe Menge B eine echte ist, widerspruch. Das System $\mathscr{B}$ enthält also nur ein Element, d. h. jedes Element $X \in \mathscr{A}$ ist im Sinne der Inklusion eine maximale echte $\mathscr{V}$-konvexe Menge. Nach der Folgerung 38 und nach dem Satz 37 ist dann $\mathscr{V}$ eine e-Charakteristik der Äquivalenz ϱ und daher ist dann auch $m(\varrho) \leqq 2$. Also ist $m(\varrho) = 2$.

52. Satz. *Es sei* card $A > 2$, $\varrho \in E(A)$, n *eine natürliche Zahl,* $n > 1$ *und* card $A/\varrho = n$. *Dann ist* $1 < m(\varrho) \leqq n$.

Beweis. Bezeichnen wir $I =_{\mathrm{Df}} \{1, 2, \ldots, n\}$, $\mathscr{A} =_{\mathrm{Df}} A/\varrho$, $\mathscr{A} = \{A_1, \ldots, A_n\}$ und für $X \in \mathscr{A}$ sei u_X eine lineare Ordnung auf X. Es sei $\leqq$ die lineare Ordnung auf der Menge der natürlichen Zahlen und für $i \in I$ sei v_i' die lineare Ordnung auf I, welche der Ordinalsumme $\langle i, n\rangle_{\leqq} \oplus \langle 1, i - 1\rangle_{\leqq}$ zugehört (s. [1], § 8, Kap. I). Für $i \in I$ sei v_i diejenige lineare Ordnung auf $\mathscr{A}$, mit Rücksicht auf welche die Abbildung $j \to A_j$ $(j \in I)$ ein monotoner Isomorphismus der Ketten (I, v_i') und $(\mathscr{A}, v_i)$ ist. Für $j \in I$ sei w_j die zu dei lexikographischen Summe $\sum_{X \in (\mathscr{A}, v_j)} (X, u_X)$ gehörende Ordnung auf A; der Wahl von u_X und v_j $(X \in \mathscr{A}, j \in I)$ ist die geordnete Menge (A, w_j) eine Kette. Wir definieren noch $\mathscr{V} =_{\mathrm{Df}} \{w_i \mid i \in I\}$; die Elemente der Zerlegung $\mathscr{A}$ auf A sind dann der Konstruktion von $\mathscr{V}$ zu Folge echte $\mathscr{V}$-konvexe Mengen. Wir zeigen mittels eines Widerspruches, dass $\mathscr{V}$ eine e-Charakteristik ist.

Wir wählen $a \in A_i$, $b \in A_j$ $(i, j \in I,\ i < j)$ und es existiere eine die Elemente a, b enthaltende $\mathscr{V}$-konvexe Menge B. Dann gelten die Beziehungen

$$\{x \mid x \in A_i,\ (a, x) \in u_{A_i}\} \cup \bigcup_{k=i+1}^{j-1} A_k \cup \{x \mid x \in A_j,\ (x, b) \in u_{A_j}\} = \langle a, b\rangle_{w_{j+1}} \subseteq B\,,$$

$$\{x \mid x \in A_i,\ (x, a) \in u_{A_i}\} \cup \bigcup_{k=j+1}^{n} A_k \cup \bigcup_{k=1}^{i-1} A_k \cup \{x \mid x \in A_j,\ (b, x) \in u_{A_j}\} =$$

$$= \langle b, a\rangle_{w_{i+1}} \subseteq B$$

(in $(\mathscr{A}, v_{j+1})$ ist A_j das grösste Element und in $(\mathscr{A}, v_{i+1})$ ist A_i das grösste Element; für $j = n$ legen wir $w_{n+1} =_{\mathrm{Df}} w_1$), nachdem B eine $\mathscr{V}$-konvexe Menge ist. Es ist $\langle a, b\rangle_{w_{j+1}} \cup \langle b, a\rangle_{w_{i+1}} = A$ und daher ist $A = B$. B ist also nicht eine echte $\mathscr{V}$-konvexe Menge und daher ist nach dem Satz 41 leicht zu sehen, dass $\mathscr{V}$ die e-Charakteristik der Äquivalenz ϱ ist, woher die zu beweisende Beziehung $m(\varrho) \leqq \operatorname{card} \mathscr{V} = n$ folgt. Die Abschätzung $1 < m(\varrho)$ gilt nach dem Lemma 48, da von card $(A/\varrho) = n > 1$, $\varrho \neq A \times A$ folgt.

53. Vermutung. *Es sei* card $A > 2$, $\varrho \in E(A)$, $1 < \operatorname{card}(A/\varrho) < \aleph_0$. *Dann ist* $m(\varrho) = \operatorname{card}(A/\varrho)$.

54. Bemerkung. Viele oben angeführte Ergebnisse kann man nach geringen Änderungen auch auf den Fall übertragen, wo nur solche e-Charakteristiken von Äquivalenzen auf A erwägt, deren Elemente Wohlordnungen auf A sind.

Bei der Korektur: Das ist ausgeführt in einer vorbereiteten Arbeit *Zur Äquivalenz- und Ordnungsrelationen*, wo die Funktion m (s. Abs. 47) voll charakterisiert ist, und u. a. ist belichtet die Unrichtigheit der Vermutung 53.

Literatur

[1] *Birkhoff, G.:* Lattice Theory. New York 1948.

[2] *Borůvka, O.:* Grundlagen der Gruppoid- und Gruppentheorie. Berlin, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1960.

[3] *Cohn, P. M.:* Universal Algebra. New York—London, Harper & Row., 1965.

[4] *Čulík, K.:* O lexikografickém součtu částečně uspořádaných množin. Čas. pro pěst. mat. *84* (1959), 16—30.

[5] *Kuratowski, K. - Mostowski, A.:* Set Theory. Amsterdam, North-Holland Pub. Co., 1967.

[6] *Курош А. Г.:* Лекции по общей алгебре. Москва, Физматгиз 1962.

[7] *Sturm, T.:* Verbände von Kernen isotoner Abbildungen. Czech. Math. J. *22* (*97*), 1972, 126 bis 144.

[8] *Szpilrajn, E.:* Sur l'extension de l'ordre partiel. Fund. Math. *16* (1930), 386—389.

Anschrift des Verfassers: Praha 6 - Dejvice, Suchbátarova 1902, ČSSR (České vysoké učení technické).