Miloslav Jiřina; Jiří Nedoma

Minimaximální řešení výběrového přejímacího postupu

Aplikace matematiky, Vol. 1 (1956), No. 4, 296–314

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/102535

MINIMAXIMÁLNÍ ŘEŠENÍ VÝBĚROVÉHO PŘEJÍMACÍHO POSTUPU

MILOSLAV JIŘINA, JIŘÍ NEDOMA

(Došlo dne 6. ledna 1956.) DT: 519.271.3.004

V článku jest uveden výběrový přejímací postup analogický známému postupu Dodge a Romiga, od něhož se liší tím, že minimalisuje maximum průměrného počtu kontrolovaných výrobků vzhledem k systému všech distribučních funkcí zlomku vadných výrobků s daným průměrem.

1. Ve známých tabulkách Dodge a Romiga [1] je popsán tento výběrový přejímací postup: Z dodávky výrobků téhož druhu o rozsahu (t. j. počtu výrobků) N se provede náhodný výběr o rozsahu n a jestliže počet vadných výrobků v tomto výběru není větší než dané akceptační číslo c, dodávka se přijme, a jestliže je větší, provede se stoprocentní kontrola dodávky a vadné výrobky se vytřídí. Volba akceptačního čísla c a rozsahu výběru n se při daném N provádí následujícím způsobem: Předpokládá se, že je znám výrobní průměr zlomku vadných výrobků $\bar{p}$ a dále je předepsáno buď a) risiko spotřebitele nebo b) horní hranice pro průměrný zlomek vadných výrobků po kontrole. Podmínka a) znamená, pro dané dostatečně malé ε a vhodně volené p_t musí platit

$$H(p_t, c, n, N) = \varepsilon\,, \tag{1}$$

kde $H(p, c, n, N)$ jest pravděpodobnost přijetí dodávky o rozsahu N a se zlomkem p vadných výrobků při akceptačním čísle c a rozsahu výběru n. Funkce H jest dána známým výrazem pomocí hypergeometrického rozložení a může být, je-li $\frac{n}{N}$ dostatečně malé nebo provádí-li se nezávislý výběr nahrazena binomickým po případě Poissonovým rozložením. V [1] je specielně voleno $\varepsilon = 0,1$ Podmínka b) znamená, že se požaduje, aby pro dané p_L platilo

$$\max_{0 \leq p \leq 1} \frac{H(p, c, n, N)(N - n)\, p}{N} = p_L\,. \tag{2}$$

Každá z obou těchto podmínek přiřazuje při pevném N akceptačnímu číslu c jisté n. Ze všech takových dvojic (c, n) splňujících (1) resp. (2) se pak volí ta, pro niž je průměrný počet kontrolovaných výrobků minimální. Při tom pro průměrný počet kontrolovaných výrobků se užívá výrazu

$$N - (N - n)\, H(\bar{p}, c, n, N)\,. \qquad (3)$$

V [1] jsou pak přímo tabelovány dvojice (c, n) splňující (1) resp. (2) a minimalisující (3).

Vzhledem k předpokladu, že výrobní proces má známý konstantní průměr zlomku vadných výrobků, lze očekávat, že výrobní proces je nějakým způsobem regulován a pak bude mít patrně zlomek vadných výrobků p v jednotlivých dodávkách jisté pravděpodobnostní rozložení s distribuční funkcí F takovou, že[1])

$$\int_0^1 \mathrm{d}F(p) = 1\,, \qquad (4)$$

$$\int_0^1 p\, \mathrm{d}F(p) = \bar{p}\,. \qquad (5)$$

Průměrný rozsah kontrolovaných výrobků pak bude určen vztahem

$$I(c, n, N, F) = N - (N - n) \int_0^1 H(p, c, n, N)\, \mathrm{d}F(p) \qquad (6)$$

a nikoliv vztahem (3), který bude platit pouze tehdy, když $F(p)$ má skok 1 v bodě $\bar{p}$. Známe-li tedy pro daný výrobní proces distribuční funkci F, je lépe volit tu dvojici (c, n), která minimalisuje (6) a nikoliv (3). Tak na příklad bylo v některých případech zjištěno, že F je přibližně exponenciela. Pro takovou distribuční funkci jsou v [2] tabelovány dvojice (c, n) splňující podmínku (2) a minimalisující (6).

Jestliže nemáme o distribuční funkci F žádných jiných informací kromě toho, že splňuje (4) a (5), jest možno použít principu minimaximálního řešení, t. j. volit dvojici (c, n), která splňuje (1) resp. (2) a minimalisuje maximálně možný průměrný počet kontrolovaných výrobků, t. j. výraz

$$\max_{F \in \mathfrak{F}(\bar{p})} I(c, n, N, F) = N - (N - n) \min_{F \in \mathfrak{F}(\bar{p})} \int_0^1 H(p, c, n, N)\, \mathrm{d}F(p)\,, \qquad (7)$$

kde $\mathfrak{F}(\bar{p})$ znamená systém všech distribučních funkcí, splňujících (4) a (5). Autoři upozorňují, že podle jejich názoru neexistují v obecném rozhodovacím problému žádné rozumné důvody pro preferování minimaximálního řešení, jestliže s hodnotou maxima risikové funkce nijak nepočítáme. Specielně v našem případě, kdy risiková funkce má pouze charakter funkce nákladů (risiko jest určeno podmínkami (1) nebo (2) a jest zde nezávislé na apriorním rozložení) není podle názoru autorů žádný zvláštní důvod pro používání té dvojice (c, n), která minimalisuje (7), jestliže nás funkce I zajímá jen potud, že si přejeme, aby

[1]) V odst. 2 jest přesně definováno, v jakém smyslu jsou zde integrály míněny.

byla co nejmenší. Formulovat ovšem v takovém případě nejlepší výběrový postup je patrně nemožné. Často se však stává, obzvláště při mezioperační kontrole, kde se výběrové postupy se stoprocentní kontrolou zamítnutých partií nejčastěji vyskytují, že volba hodnoty p_t (po př. p_L) je do značné míry libovolná a vhodnost přejímky se spíše posuzuje podle průměrného počtu kontrolovaných výrobků. Zde je, nemáme-li žádné informace o distribuční funkci F, minimaximální řešení na místě a podmínky pro přejímací postup je lépe formulovat takto: Pro daný rozsah dodávky N, výrobní průměr vadných výrobků $\bar{p}$ a danou konstantu K volit takovou dvojici (c, n), pro níž jest $\max_{F \in \mathfrak{F}(\bar{p})} I(c, n, N, F) \leqq K$ a současně p_t v (1) resp. p_L v (2) minimální. Zřejmě jestliže pro některé p_t resp. p_L existuje dvojice (c, n) splňující (1) resp. (2) a současně $\max I \leqq K$ pak tomuto poslednímu vztahu vyhovuje i k p_t resp. k p_L příslušné minimaximální řešení. Stačí tedy omezit se v tomto případě na minimaximální dvojice (c, n). Avšak i tehdy, když jsme dvojici (c, n) nevolili podle minimaximálního principu, jest vhodné znát hodnotu výrazu (7). Výpočtem tohoto výrazu se také budeme nejdříve zabývat.

Jak již bylo řečeno dříve, lze ve všech v praxi přicházejících případech nahradit funkci H distribuční funkcí binomického rozložení, t. j. výrazem (nezávisejícím na N)

$$B(p, c, n) = \sum_{\nu=0}^{c} \binom{n}{\nu} p^\nu (1 - p)^{n-\nu} = 1 - \frac{\int_0^p x^c (1 - x)^{n-c-1}\, dx}{\int_0^1 x^c (1 - x)^{n-c-1}\, dx} . \tag{8}$$

(Viz na př. [3], odst. 5.7.) K výpočtu (7) stačí pak znát hodnotu $m(c, n) = \min_{F \in \mathfrak{F}(\bar{p})} \int_0^1 B(p, c, n)\, dF(p)$. Funkce B jest zřejmě pro každé c a n spojitá podle p v $\langle 0, 1 \rangle$ a její druhá derivace podle p je vzhledem k (8) dána výrazem $Cp^{c-1}(1 - p)^{n-c-2}[(n - 1)\, p - c]$, kde C je kladná konstanta nezávislá na p. Tento výraz se (kromě případu $c = 0$ a $n = 1$, který v praxi nepřichází v úvahu a který dále vylučujeme) v případě $c = 0$ neanuluje v žádném bodě otevřeného intervalu $(0, 1)$ a v případě $c > 0$ se anuluje v právě jednom bodě $(0, 1)$. Je tedy podle věty 4 odst. 2 $m(0, n) = \min \{1 - \bar{p}, B(\bar{p}, 0, n)\}$ a pro $c > 0$ jest $m(c, n) = \min \{A, B\}$, kde $A = \min_{\bar{p} \leqq p \leqq 1} \varphi(p)$, $B = \min_{0 \leqq p \leqq \bar{p}} \psi(p)$ a

$$\varphi(p) = 1 - \frac{\bar{p}}{p} [1 - B(p, c, n)] , \quad \psi(p) = \frac{1 - \bar{p}}{1 - p} B(p, c, n) . \tag{9}$$

Vždy jest $B(\bar{p}, 0, n) = (1 - \bar{p})^n \leqq (1 - \bar{p})$. Nechť pro $c > 0$ jest $p^*(c, n)$, značený dále také jen p^*, nulový bod funkce $\varphi'(p)$ v $(0, 1)$. Protože $\varphi'(p)$ má v $(0, 1)$ tytéž nulové body jako funkce

$$g(p) = B'(p, c, n)\, p + 1 - B(p, c, n)$$

a protože $g'(p) = B''(p, c, n)\, p$, existuje (pro $c > 0$) právě jeden bod p^*, jak lze z průběhu funkcí $g(p)$ a $g'(p)$ snadno zjistit. Dále $\varphi'(1) = \bar{p} > 0$ a tedy $A \leq \leq 1 - \bar{p}$ a zřejmě $A = \varphi(p^*) \leq \varphi(\bar{p})$ jestliže $p^* \geq \bar{p}$ a $A = \varphi(\bar{p}) = B(\bar{p}, c, n)$ jestliže $p^* \leq \bar{p}$. Obdobným způsobem lze zjistit, že $B = \min \{B(\bar{p}, c, n), 1 - \bar{p}\}$ a tedy celkem

$$m(0, n) = B(\bar{p}, 0, n)$$

a pro $c > 0$

$$\begin{aligned} m(c, n) &= B(\bar{p}, c, n) && \text{jestliže } \bar{p} \geq p^*(c, n)\,, \\ m(c, n) &= \varphi(p^*) = 1 - \bar{p}\, B'(p^*, c, n) && \text{jestliže } \bar{p} \leq p^*(c, n)\,. \end{aligned} \tag{10}$$

V případech přicházejících v praxi v úvahu je p i p^* malé, takže je možno nahradit binomické rozložení Poissonovým. Označíme-li z_c nenulový kořen rovnice

$$\sum_{\nu=c+1}^{\infty} \frac{z^\nu e^{-z}}{\nu!} - \frac{z^{c+1} e^{-z}}{c!} = 0\,,$$

pak z_c zřejmě odpovídá součinu np^*. Dále položme $w_c = \frac{z_c^c e^{-z_c}}{c!}$, $P(z, c) = \sum_{\nu=0}^{c} \frac{z^\nu e^{-z}}{\nu!}$.

Pak

$$m(0, n) = P(n\bar{p}, 0)$$

a pro $c > 0$

$$\begin{aligned} m(c, n) &= P(n\bar{p}, c) && \text{jestliže } n\bar{p} \geq z_c\,, \\ m(c, n) &= 1 - n\bar{p}w_c && \text{jestliže } n\bar{p} \leq z_c\,. \end{aligned} \tag{11}$$

Hodnoty z_c a w_c jsou uvedeny v následující tabulce:

c	z_c	w_c	c	z_c	w_c
1	1,7933	0,29843	11	15,6848	0,05461
2	3,3836	0,19420	12	16,9645	0,05088
3	4,8813	0,14708	13	18,2352	0,04766
4	6,3225	0,11954	14	19,4978	0,04483
5	7,7246	0,10126	15	20,7528	0,04235
6	9,0974	0,08815	16	22,0012	0,04013
7	10,4470	0,07824	17	23,2435	0,03815
8	11,7779	0,07046	18	24,4800	0,03637
9	13,0930	0,06418	19	25,7114	0,03475
10	14,3948	0,05898	20	26,9378	0,03328

Maximálně možný průměrný počet kontrolovaných výrobků vypočteme pomocí této tabulky, po př. pomocí tabulek Poissonova rozložení a vztahů (11), neboť podle (7) jest roven výrazu $N - (N - n)\, m(c, n)$. Dvojice (c, n), minimalisující tento výraz a splňující (1) resp. (2) jest možno určit pomocí grafů nebo tabulek v odst. 3, kde je také uveden návod k použití těchto grafů a tabulek.

Poznámka 1. Systém $\mathfrak{F}(\bar{p})$ obsahuje i nespojité distribuční funkce. Z praktického hlediska by bylo ovšem rozumnější omezit se pouze na spojité nebo absolutně spojité distribuční funkce z $\mathfrak{F}(\bar{p})$. Avšak výraz $I(c, n, N, F)$ nabývá (podle vztahu (22) v odst. 2) svého maxima vzhledem k $\mathfrak{F}(\bar{p})$ v jisté jednoduché distribuční funkci s nejvýše dvěma skoky a tu lze zřejmě aproximovat (ve smyslu konvergence v bodech spojitosti limitní funkce) absolutně spojitými funkcemi z $\mathfrak{F}(\bar{p})$. Z toho však plyne, že supremum, po př. maximum — existuje-li — výrazu $I(c, n, N, F)$ vzhledem k shora uvedeným menším systémům je rovno opět výrazu (7) a nedostali bychom tedy nic nového.

Poznámka 2. Přesnou hodnotu výrobního průměru $\bar{p}$ většinou neznáme. Spíše budeme znát pouze horní hranici $\bar{\bar{p}}$. Maximálně možný průměrný počet kontrolovaných výrobků je pak lépe definovat vztahem

$$\max_{0 \leqq \bar{p} \leqq \bar{\bar{p}}} \max_{F \in \mathfrak{F}(\bar{p})} I(c, n, N, F) . \tag{12}$$

Z předešlých úvah je zřejmé, že

$$\min_{0 \leqq \bar{p} \leqq \bar{\bar{p}}} \min_{F \in \mathfrak{F}(\bar{p})} \int_0^1 B(p, c, n)\, \mathrm{d}F(p) = \min_{0 \leqq \bar{p} \leqq \bar{\bar{p}}} \min_{\bar{p} \leqq p \leqq 1} \varphi(p, \bar{p}) , \tag{13}$$

kde funkce φ je definována stejně jako v (9), pouze je připsán také argument $\bar{p}$ na němž je závislá. V případě $c = 0$ jest podle (10) výraz (13) roven $\min\limits_{0 \leqq \bar{p} \leqq \bar{\bar{p}}} B(\bar{p}, 0, n) = B(\bar{\bar{p}}, 0, n)$, neboť B je klesající funkcí proměnné p. V případě $c > 0$ a $\bar{\bar{p}} \geqq p^*$ jest výraz (12) roven minimu z následujících dvou:

$$\min_{0 \leqq \bar{p} \leqq p^*} \min_{\bar{p} \leqq p \leqq 1} \varphi(p, \bar{p}) = \varphi(p^*, p^*) = B(p^*, c, n) ,$$

$$\min_{p^* \leqq \bar{p} \leqq \bar{\bar{p}}} \min_{\bar{p} \leqq p \leqq 1} \varphi(p, \bar{p}) = \min_{p^* \leqq \bar{p} \leqq \bar{\bar{p}}} B(\bar{p}, c, n) = B(\bar{\bar{p}}, c, n) .$$

Při tom $B(\bar{\bar{p}}, c, n) \leqq B(p^*, c, n)$. Jestliže konečně $c > 0$ a $\bar{\bar{p}} \leqq p^*$, pak výraz (13) je podle (10) roven $\min\limits_{0 \leqq \bar{p} \leqq \bar{\bar{p}}} \varphi(p^*, \bar{p})$, $= \varphi(p^*, \bar{\bar{p}})$, neboť φ je klesající v $\bar{p}$. Ve všech třech případech můžeme tedy opět použít (10) po příp. (11) s tím rozdílem, že číslo $\bar{p}$ nahradíme číslem $\bar{\bar{p}}$.

Poznámka 3. Tato poznámka se týká vztahu (2). Výraz $\dfrac{H(p)\, p(N - n)}{N}$ udává průměrnou výslednou kvalitu dodávky za předpokladu, že původní kvalita byla p; p_L pak jest maximální možná hodnota tohoto výrazu.

Na první pohled by se zdálo vhodnější definovat p_L jako

$$\max_F \int_0^1 \frac{H(p)\, p(N - n)}{N}\, \mathrm{d}F(p) , \tag{14}$$

kde F probíhá všechny distribuční funkce takové, že $\int\limits_0^1 \mathrm{d}F = 1$.

Lze však snadno zjistit (a plyne to též z obecné věty v [4]), že oba výrazy (2) a (14) jsou si rovny. Vzhledem k tomu, že výrobní průměr $\bar{p}$ pokládáme za známý, by bylo ovšem správnější nahradit výrazy (2) a (14) výrazem

$$\max_{F\in\mathfrak{F}(\bar{p})} \int_0^1 \frac{H(p)\,p(N-n)}{N}\,\mathrm{d}F(p) = p_{L,\bar{p}}\,. \tag{15}$$

Toto $p_{L,\bar{p}}$ již není rovno p_L v (2) a lze je snadno vypočítat. Za tím účelem opět nahradíme funkci H funkcí B. Druhá derivace funkce $B(p, c, n)\,p$ se anuluje v $(0, 1)$ právě v jednom bodě a je tedy opět podle věty 4 odst. 2

$$\max_{F\in\mathfrak{F}(\bar{p})} \int_0^1 B(p, c, n)\,p\,\mathrm{d}F(p) = \max\,\{C, D\}\,,$$

kde

$$C = \max_{\bar{p}\leq p\leq 1} \bar{p}\,B(p, c, n) \quad \text{a} \quad D = \max_{0\leq p\leq \bar{p}} B(p, c, n)\,p\,\frac{1-\bar{p}}{1-p}\,.$$

První z těchto funkcí je klesající a druhá rostoucí a tedy $C = D = \bar{p}\,B(\bar{p}, c, n)$. Z toho plyne

$$p_{L,\bar{p}} = \frac{N-n}{N}\,\bar{p}\,B(\bar{p}, c, n)\,. \tag{16}$$

Obdobně jako v poznámce 2 by bylo možno též předpokládat, že známe pouze horní hranici $\bar{\bar{p}}$ pro $\bar{p}$. Pak (15) jest nutno nahradit výrazem

$$\max_{0\leq\bar{p}\leq\bar{\bar{p}}}\ \max_{F\in\mathfrak{F}(\bar{p})} \int_0^1 \frac{H(p)\,p(N-n)}{N}\,\mathrm{d}F(p) = p_{L,\bar{\bar{p}}}\,. \tag{17}$$

Z (16) ihned plyne, že $p_{L,\bar{\bar{p}}} = \max\limits_{0\leq\bar{p}\leq\bar{\bar{p}}} \frac{N-n}{N}\,\bar{p}\,B(\bar{p}, c, n)$ a při nahrazení binomického rozložení Poissonovým obdržíme pro výpočet $p_{L,\bar{\bar{p}}}$ vztahy

$$p_{L,\bar{\bar{p}}} = \frac{N-n}{N}\,\bar{\bar{p}}\,P(n\bar{\bar{p}}, c) \ \text{ jestliže } n\bar{\bar{p}} \leq x_c\,,$$

$$p_{L,\bar{\bar{p}}} = p_L = \frac{N-n}{Nn}\,y_c \quad \text{jestliže } n\bar{\bar{p}} \geq x_c\,,$$

které plynou ihned z odvození vzorce pro p_L v [1] na str. 47—49. Hodnoty x^c a y_c jsou tabelovány v [1] na str. 49, tab. A.

Použití podmínky (16) nebo (17) by vedlo alespoň v některých případech k menšímu průměrnému počtu kontrolovaných výrobků. Přesto však je vhodnější použít podmínky (2) v tom případě, když jsme nuceni předepsanou výslednou kvalitu přesně dodržet a při tom správnost hodnot $\bar{p}$ resp. $\bar{\bar{p}}$ nemůžeme zaručit.

2. V tomto odstavci budou dokázány věty, kterých bylo použito v předcházejícím odstavci. Jestliže F je pravděpodobnostní distribuční funkce a f reálná funkce, a dále a, b konečná reálná čísla, pak

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}F(x)$$

bude značit Lebesgue-Stieltjesův integrál funkce f přes uzavřený interval $\langle a, b\rangle$ vzhledem k míře, indukované distribuční funkcí F. Dále budeme vždy předpokládat, že integrovaná funkce f je spojitá a distribuční funkce F zprava spojitá; pak lze psát

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}F(x) = (R)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}F(x) + f(a)[F(a) - F(a-0)]\,,$$

kde $(R)\int_a^b$ značí obyčejný Riemann-Stieltjesův integrál. Pro konečná reálná čísla a, b, $\bar{x}$ taková, že $a < \bar{x} < b$ bude $\mathfrak{F}(a, b, \bar{x})$ značit systém všech zprava spojitých distribučních funkcí takových, že $F(a-0) = 0$ a $F(b) = 1$ a splňujících vztah $\int_a^b x\,\mathrm{d}F(x) = \bar{x}$. Distribuční funkci, která nabývá pouze konečného počtu hodnot, t. j. mění se jen skoky, budeme nazývat jednoduchou a systém všech jednoduchých funkcí z $\mathfrak{F}(a, b, \bar{x})$ budeme značit $\mathfrak{F}^*(a, b, \bar{x})$. $\mathfrak{F}^{(2)}(a, b, \bar{x})$ bude značit systém všech distribučních funkcí z $\mathfrak{F}^*(a, b, \bar{x})$ s jedním nebo se dvěma skoky.

Věta 1. *Nechť $F \in \mathfrak{F}(a, b, \bar{x})$. Pak existuje posloupnost $F_n \in \mathfrak{F}^*(a, b, \bar{x})$ taková, že $F_n \underset{n}{\rightarrow} F$ stejnoměrně.*

Důkaz: Pro každé přirozené n nechť $F_{n,1}$ a $F_{n,2}$ jsou distribuční funkce, definované následujícím způsobem:

$$F_{n,1}(x) = F_{n,2}(x) = 0 \text{ jestliže } x < a\,,$$

$$F_{n,1}(x) = F_{n,2}(x) = 1 \text{ jestliže } x \geqq b\,.$$

$$F_{n,1}(x) = \frac{i}{n}\,,\ F_{n,2}(x) = \frac{i+1}{n} \text{ jestliže } a \leqq x < b \text{ a } \frac{i}{n} \leqq F(x) < \frac{i+1}{n}$$

$$(i = 0, 1, 2, \ldots, n-1)\,.$$

Zřejmě pro každé x a n jest $|F_{n,1}(x) - F(x)| < \frac{1}{n}$, $|F_{n,2}(x) - F(x)| \leqq \frac{1}{n}$, $F_{n,1}(x) \leqq F(x) \leqq F_{n,2}(x)$. Z předpokladu $a < \bar{x}$ dále plyne $F_{n,2}(a) > F(a)$, takže pro $\bar{x}_{n,k} = \int_a^b x\,\mathrm{d}F_{n,k}(x)$ plyne ze vztahu $\bar{x} = b - \int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x$ a obdobných vztahů pro $\bar{x}_{n,k}$ $(k = 1, 2)$ nerovnost $\bar{x}_{n,2} < \bar{x} \leqq \bar{x}_{n,1}$ pro všechna n. Lze tedy definovat

$$a_n = \frac{\bar{x} - x_{n,2}}{x_{n,1} - x_{n,2}}, \quad b_n = \frac{x_{n,1} - \bar{x}}{x_{n,1} - x_{n,2}} \text{ a } F_n(x) = a_n F_{n,1}(x) + b_n F_{n,2}(x).$$

Zřejmě $F_n \in \mathfrak{F}^*(a, b, \bar{x})$ a $|F_n(x) - F(x)| \leqq a_n|F_{n,1}(x) - F(x)| + b_n|F_{n,2}(x) - F(x)| < \frac{1}{n}(a_n + b_n) = \frac{1}{n}$.

Věta 2. *Nechť $F \in \mathfrak{F}^*(a, b, \bar{x})$. Pak existuje přirozené číslo n, kladná čísla a_i a distribuční funkce $F_i \in \mathfrak{F}^{(2)}(a, b, \bar{x})$ pro $i = 1, 2, \ldots, n$ tak, že $F(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i F_i(x)$.*

Důkaz: Nechť x_j ($j = 1, 2, \ldots, k$) jsou všechny body nespojitosti funkce F uspořádané tak, že $a \leqq x_1 < x_2 < \ldots < x_k \leqq b$ a nechť $p_j > 0$ je skok v bodě x_j. Stačí předpokládat $k > 2$. Pak $x_1 < \bar{x} < x_k$, takže $r_1 = \frac{x_k - \bar{x}}{x_k - x_1} > 0$, $r_k = \frac{\bar{x} - x_1}{x_k - x_1} > 0$ a $r_1 + r_k = 1 = \sum_{j=1}^{k} p_j > p_1 + p_k$, z čehož plyne, že

$$\text{buď } r_1 > p_1 \text{ nebo } r_k > p_k. \tag{18}$$

Je-li $p_1 r_k \geqq p_k r_1$, definujme

$$a_1 = 1 - \frac{p_k}{r_k}, \quad a_2 = \frac{p_k}{r_k}, \quad q_1 = 1 - \frac{1 - p_1 - p_k}{a_1},$$

$$q_j = \frac{p_j}{a_1} \text{ pro } 2 \leqq j \leqq k - 1, \quad q_k = 0.$$

Je-li $p_1 r_k < p_k r_1$, definujme

$$a_1 = 1 - \frac{p_1}{r_1}, \quad a_2 = \frac{p_1}{r_1}, \quad q_1 = 0, \quad q_j = \frac{p_j}{a_1} \text{ pro } 2 \leqq j \leqq k - 1,$$

$$q_k = 1 - \frac{1 - p_1 - p_k}{a_1}.$$

Z (18) plyne snadno, že v prvním případě jest vždy $r_k > p_k$ a v druhém vždy $r_1 > p_1$, takže v obou případech $0 < a_1 < 1$, $0 < a_2 < 1$, $q_j \geqq 0$ ($j = 1, 2, \ldots, k$), a $\sum_{j=1}^{k} q_j = 1$. Nechť G_1 je jednoduchá distribuční funkce se skoky q_j v bodech x_j, G_2 jednoduchá distribuční funkce se skoky r_1, r_k v bodech x_1, x_k. Pak $G_1 \in \mathfrak{F}^*(a, b, \bar{x})$ a má nejvýše $(k - 1)$ skoků, $G_2 \in \mathfrak{F}^{(2)}(a, b, \bar{x})$ a $F(x) = a_1 G_1(x) + a_2 G_2(x)$. Z toho plyne tvrzení věty úplnou indukcí.

Věta 3. *Nechť funkce f je spojitá na $\langle a, b\rangle$. Pak existuje $\min\limits_{F \in \mathfrak{F}(a, b, \bar{x})} \int_a^b f(x)\, \mathrm{d}F(x)$ a je rovno $\min\limits_{\substack{a \leqq x_1 \leqq \bar{x} \\ \bar{x} \leqq x_2 \leqq b}} g(x_1, x_2)$, kde*

$$g(x_1, x_2) = f(x_1) \frac{x_2 - \bar{x}}{x_2 - x_1} + f(x_2) \frac{\bar{x} - x_1}{x_2 - x_1} \quad \textit{pro } a \leqq x_1 \leqq \bar{x} \leqq x_2 \leqq b \ \textit{a} \ x_1 \neq x_2,$$

$$g(\bar{x}, \bar{x}) = f(\bar{x}).$$

Důkaz: Pišme pro jednoduchost $J(F) = \int_a^b f(x)\, \mathrm{d}F(x)$. Nechť $F \in \mathfrak{F}(a, b, \bar{x})$. Pak podle věty 1 existuje posloupnost $F_n \in \mathfrak{F}^*(a, b, \bar{x})$ taková, že $F_n \to F$ stejnoměrně, a tedy podle Hellyovy věty $J(F_n) \to J(F)$. Z toho plyne

$$\inf_{F \in \mathfrak{F}(a, b, \bar{x})} J(F) \geqq \inf_{F \in \mathfrak{F}^*(a, b, \bar{x})} J(F) . \tag{19}$$

Nechť nyní $F \in \mathfrak{F}^*(a, b, \bar{x})$. Podle věty 2 existují $a_i > 0$ $(i = 1, \ldots, n)$ a $F_i \in \mathfrak{F}^{(2)}(a, b, \bar{x})$ tak, že $F(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i F_i(x)$. Lze předpokládat, že F_i jsou očíslovány tak, že $J(F_1) \geqq J(F_2) \geqq \ldots \geqq J(F_n)$. Pak $J(F) = \sum_{i=1}^{n} a_i J(F_i) \geqq J(F_n)$. Z toho plyne

$$\inf_{F \in \mathfrak{F}^*(a, b, \bar{x})} J(F) \geqq \inf_{F \in \mathfrak{F}^{(2)}(a, b, \bar{x})} J(F) . \tag{20}$$

Konečně z inkluse $\mathfrak{F}(a, b, \bar{x}) \supset \mathfrak{F}^{(2)}(a, b, \bar{x})$ plyne

$$\inf_{F \in \mathfrak{F}(a, b, \bar{x})} J(F) \leqq \inf_{F \in \mathfrak{F}^{(2)}(a, b, \bar{x})} J(F) \tag{21}$$

a z (19) až (21)

$$\inf_{F \in \mathfrak{F}(a, b, \bar{x})} J(F) = \inf_{F \in \mathfrak{F}^{(2)}(a, b, \bar{x})} J(F) . \tag{22}$$

Pro každou $F \in \mathfrak{F}^{(2)}(a, b, \bar{x})$ existuje bod $(x_1, x_2) \in \langle a, \bar{x}\rangle \times \langle \bar{x}, b\rangle$ tak, že $J(F) = g(x_1, x_2)$ a naopak. Z (22) a spojitosti g na uzavřeném oboru pak plyne tvrzení věty.

Poznámka: Věty 1 a 2 a vztah (22) v důkaze věty 3 platí i v tom případě, když se interval $\langle a, b\rangle$ nahradí celou reálnou přímkou po případě intervalem $(-\infty, b\rangle$ nebo $\langle a, \infty)$. Ve všech označeních se pak čísla a, b nahradí symboly $-\infty$, ∞. Důkazy jsou úplně stejné kromě důkazu věty 1, kde je možno postupovat takto:
Je-li $F \in \mathfrak{F}(a, \infty, \bar{x})$ a neexistuje-li konečné x takové, že $F(x) = 1$, označme x_n nejmenší číslo pro které $F(x) \geqq \frac{n-1}{n}$ a $z_n = \int_{(x_n, \infty)} x\, \mathrm{d}F(x)$, $d_n = 1 - F(x_n)$. Nechť y_n je některý bod pro nějž $d_n y_n > z_n$. Definujme:

$F_{n,1}(x) = 0$ jestliže $a > -\infty$ a $x < a$,

$F_{n,1}(x) = \frac{i}{n}$ jestliže $a \leqq x < x_n$ a $\frac{i}{n} \leqq F(x) < \frac{i+1}{n}$ $(i = 1, \ldots, n-2)$,

$F_{n,1}(x) = F(x)$ jestliže $x_n \leqq x < y_n$,

$F_{n,1}(x) = 1$ jestliže $x \geqq y_n$.

Pak

$$\bar{x}_{n,1} - \bar{x} = \int_{(-\infty, x_n)} F(x)\, \mathrm{d}x - \int_{(-\infty, x_n)} F_{n,1}(x)\, \mathrm{d}x + z_n - d_n y_n > 0$$

a

$$|F(x) - F_{n,1}(x)| < \frac{1}{n}\,.$$

Je-li $F \in \mathfrak{F}(-\infty, b, x)$ a neexistuje-li konečné x takové, že $F(x) = 0$, označme x_n nejmenší číslo, pro které $F(x) \geqq \frac{1}{n}$ a $z_n = \int\limits_{(-\infty, x_n)} x \, \mathrm{d}F(x), d_n = F(x_n - 0)$. Nechť y_n je některý bod pro nějž $d_n y_n < z_n$ a definujme:

$F_{n,2}(x) = 0$ jestliže $x < y_n$,

$F_{n,2}(x) = d_n$ jestliže $y_n \leqq x < x_n$,

$F_{n,2}(x) = \frac{i+1}{n}$ jestliže $x_n \leqq x$ a $\frac{i}{n} \leqq F(x) < \frac{i+1}{n}$ $(i = 1, \ldots, n-1)$,

$F_{n,2}(x) = 1$ jestliže $F(x) = 1$.

Zde obdobně $\bar{x} - \bar{x}_{n,2} > 0$. Vše ostatní zůstává v důkaze stejné.

V další větě jsou a, b opět konečná, funkce g jako ve větě 3.

Věta 4. *Nechť f je spojitá v $\langle a, b\rangle$ a nechť v celém otevřeném intervalu (a, b) existuje druhá derivace f''. Jestliže f'' se anuluje nejvýše v jednom bodě (a, b), pak* $\min\limits_{F \in \mathfrak{F}(a, b, \bar{x})} \int\limits_a f(x) \, \mathrm{d}F(x) = \min \{A, B\}$, *kde* $A = \min\limits_{\bar{x} \leqq x_2 \leqq b} g(a, x_2)$, $B = \min\limits_{a \leqq x_1 \leqq \bar{x}} g(x_1, b)$. *Jestliže f'' se neanuluje v řádném bodě (a, b), pak* $\min\limits_{F \in \mathfrak{F}(a, b, \bar{x})} \int\limits_a^b f(x) \, \mathrm{d}F(x) = \min \{g(a, b), f(\bar{x})\}$.

Důkaz: Nechť $\mathfrak{D} = \langle a, \bar{x}\rangle \times \langle \bar{x}, b\rangle$. Hledané minimum jest podle věty 3 rovno $\min\limits_{(x, x_2) \in \mathfrak{D}} g(x_1, x_2)$. Předpokládejme, že g nabývá minima ve vnitřním bodě (y_1, y_2) obdélníka $\mathfrak{D}$. Pak $y_1 < y_2$ a dále $\frac{\partial}{\partial x_1} g(y_1, y_2) = \frac{\partial}{\partial x_2} g(y_1, y_2) = 0$ a z toho

$$f'(y_1)(y_2 - y_1) + f(y_1) - f(y_2) = 0\,. \quad f'(y_2)(y_2 - y_1) + f(y_1) - f(y_2) = 0 \quad (23)$$

Z toho plyne $f'(y_1) = f'(y_2)$ a protože existuje bod y_0 tak, že $y_1 < y_0 < y_2$ a $f(y_2) - f(y_1) = f'(y_0)(y_2 - y_1)$, jest vzhledem k (23) $f'(y_1) = f'(y_0) = f'(y_2)$. Pak existují alespoň dva různé body uvnitř (a, b), v nichž se anuluje f''. Jestliže tedy f'' se anuluje nejvýše v jednom bodě (a, b), pak g nabývá minima na okraji obdélníka $\mathfrak{D}$. První část tvrzení pak plyne z toho, že na dvou okrajových úsečkách $\mathfrak{D}$ jest g konstantně rovna $f(\bar{x})$. Jestliže se f'' neanuluje v žádném bodě (a, b), pak lze obdobně dokázat, že $\frac{\partial}{\partial x_1} g(x_1, b)$ se neanuluje uvnitř $(a, \bar{x})$ a stejně $\frac{\partial}{\partial x_2} g(a, x_2)$ se neanuluje uvnitř $(\bar{x}, b)$, z čehož plyne druhá část tvrzení.

3. Tento odstavec obsahuje grafy a tabulky, pomocí kterých lze určit akceptanční číslo c a rozsah výběru n pro výběrový přejímací postup, popsaný v odstavci 1, a to pro následující případy:

a) Jest dán rozsah dodávky N, známá horní hranice pro výrobní průměr zlomku vadných výrobků $\bar{p}$ a požadovaná horní hranice pro průměrný zlomek vadných výrobků po kontrole p_L (AOQL — definovaná vzorcem (2)) a má se určit výběrový přejímací postup, který při těchto podmínkách minimalisuje maximálně možný průměrný počet kontrolovaných výrobků. V tomto případě přichází v úvahu pro běžné hodnoty N, $\bar{p}$, p_L, pouze akceptanční čísla $c = 0$ a $c = 1$. Volíme jedno z nich podle toho, zda v obr. 2 padne bod $\left(p_L N, \frac{\bar{p}}{p_L}\right)$ do pole označeného $c = 0$ nebo $c = 1$. Příslušný rozsah výběru se pak určí ze vzorce

$$n = \frac{N \cdot 0{,}36788}{p_L N + 0{,}36788} \text{ jestliže } c = 0$$

a

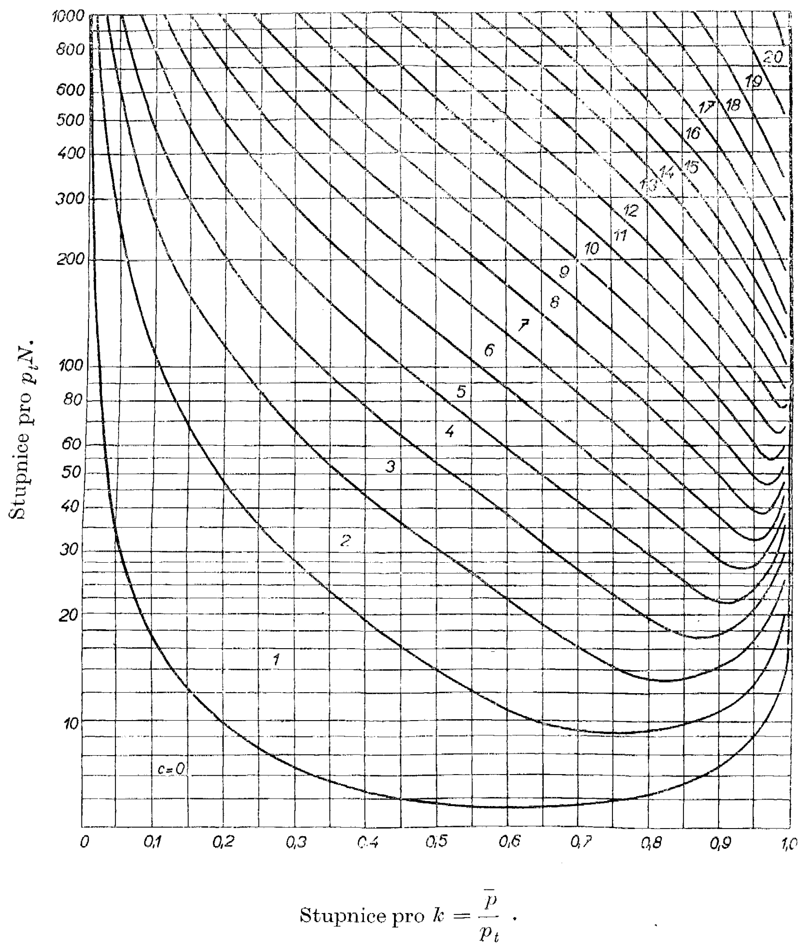
$$n = \frac{N \cdot 0{,}83996}{p_L N + 0{,}83996} \text{ jestliže } c = 1 .$$

(Viz [1], vzorec (22) na str. 49.)

b) Jest dán rozsah dodávky N, horní hranice pro výrobní průměr zlomku vadných výrobků $\bar{p}$ a požadovaná hodnota zlomku vadných výrobků p_t, odpovídající risiku spotřebitele 0,1 (p_t je definováno vztahem (1) s $\varepsilon = 0{,}1$). Akceptanční číslo c přejímacího postupu, který při těchto podmínkách minimalisuje maximálně možný průměrný počet kontrolovaných výrobků určíme podle obr. 1 tak, že za c volíme to číslo, kterým je v obr. 1 označeno pole, do něhož padne bod $\left(\frac{\bar{p}}{p_t}, p_t N\right)$. Příslušný rozsah výběru pak lze určit na př. pomocí grafu, uvedeného v [1], fig. 3. Pro některé hodnoty N, $\bar{p}$, p_t jsou dvojice (c, n) přímo tabelovány v tomto článku na konci odst. 3. První tři z nich začínají až od té hodnoty N, pro kterou již může přijíti také akceptanční číslo $c > 0$. Je-li tedy dané N menší než tabelované hodnoty, volíme $c = 0$ a příslušný rozsah výběru najdeme pomocí prvních dvou řádků v tabulce. Horní hranici pro průměrný počet kontrolovaných výrobků lze určit pomocí obr. 3.

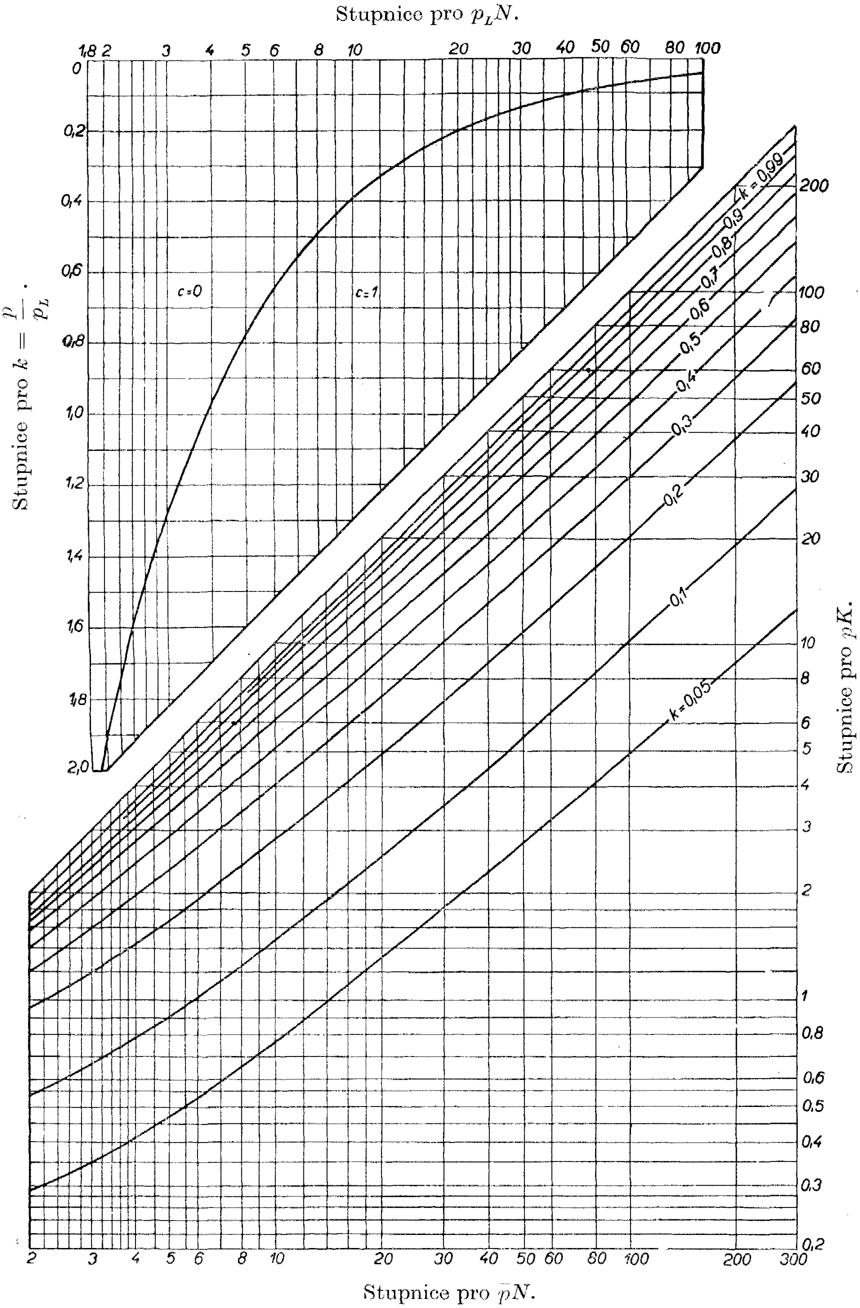
c) Jest dán rozsah dodávky N, známá horní hranice pro výrobní průměr zlomku vadných výrobků $\bar{p}$ a požadovaná horní hranice K pro průměrný počet kontrolovaných výrobků. (K jest určeno vzorcem (7).) Výběrový postup, který při těchto podmínkách minimalisuje hodnotu p_t (definovanou stejným způsobem jako ad b)), lze určit pomocí obr. 1 a 3 takto: Vypočtou se hodnoty $\bar{p}N$ a $\bar{p}K$ a čára procházející v obr. 3 bodem $(\bar{p}N, \bar{p}K)$ určuje příslušnou hodnotu $k = \frac{\bar{p}}{p_t}$. Pak se vypočte hodnota $\frac{\bar{p}N}{k}$, která je rovna $p_t N$ a z obr. 1 se pomocí tohoto $p_t N$ a $k = \frac{\bar{p}}{p_t}$ určí akceptanční číslo jako ad b).

Theoretická část této práce byla vypracována autory článku v matematickém oddělení býv. n. p. Tesla-Elektronik. Návrh řešit tento problém pomocí minimaxového principu pochází od A. Špačka. Numerické výpočty pro sestavení nomogramů a tabulek provedla E. Šetinová v matematickém ústavu ČSAV. Tyto numerické výpočty byly provedeny obdobným způsobem jako v citované práci [1]. Hypergeometrické rozložení ve vzorci (1) bylo rovněž aproximováno vzorcem (2'), uvedeným v [1] na str. 22.



Obr. 1. Nomogram pro určení c, je-li dáno N, $\bar{p}$, p_t (viz odst. 3b).

Obr. 2. Nomogram pro určení c, je-li dáno N, $\bar{p}$, p_L (viz odst. 3a).



Obr. 3. Nomogram pro stanovení hodnoty K (viz odst. 3b, c).

Tabulky pro stanovení výběrového přejímacího postupu při daných hodnotách $N, \bar{p}$ a p_t.
(Viz odst. 3b.)

$p_t = 0,005$

$c = 0$												
	N	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000	1200
	n	99	180	235	273	301	321	337	350	360	369	382

N	$\bar{p}=0,001$		$\bar{p}=0,0015$		$\bar{p}=0,002$		$\bar{p}=0,0025$		$\bar{p}=0,003$		$\bar{p}=0,0035$		$\bar{p}=0,004$		$\bar{p}=0,0045$	
	c	n	c	n	c	n	c	n	c	n	c	n	c	n	c	n
1500	0	397	1	642	1	642	1	642	1	642	1	642	1	642	0	397
2000	1	674	1	674	1	674	1	674	1	674	2	900	2	900	1	674
3000	1	707	1	707	1	707	2	951	2	951	2	951	3	1180	3	1180
4000	1	724	1	724	2	980	2	980	2	980	3	1215	4	1445	4	1445
5000	1	735	1	735	2	995	2	995	3	1240	3	1240	4	1475	5	1700
6000	1	744	2	1010	2	1010	3	1255	3	1255	4	1495	5	1730	6	1950
8000	1	750	2	1020	2	1020	3	1275	4	1520	4	1520	5	1760	7	2215
10000	2	1030	2	1030	3	1290	3	1290	4	1540	5	1780	6	2010	8	2470
20000	2	1045	3	1310	4	1565	5	1815	6	2060	7	2300	8	2535	10	2995
30000	3	1320	4	1575	5	1830	6	2075	7	2315	8	2555	10	3025	12	3485
50000	4	1585	5	1839	6	2085	8	2570	9	2810	10	3050	12	3515	14	3975
70000	5	1845	6	2095	7	2340	9	2820	10	3060	12	3530	13	3760	16	4450
100000	6	2095	7	2343	9	2825	10	3065	11	3225	13	3770	15	4235	17	4690

$p_t = 0,01$

$c = 0$													
	N	50	100	150	200	250	300	350	400	450	500	700	900
	n	49	90	118	137	156	161	169	175	180	185	196	203

N	$\bar{p}=0,001$		$\bar{p}=0,003$		$\bar{p}=0,004$		$\bar{p}=0,005$		$\bar{p}=0,006$		$\bar{p}=0,007$		$\bar{p}=0,008$		$\bar{p}=0,009$	
	c	n	c	n	c	n	c	n	c	n	c	n	c	n	c	n
600	0	191	0	191	0	191	1	306	1	306	1	306	0	191	0	191
800	0	200	1	325	1	325	1	325	1	325	1	325	1	325	1	325
1000	0	206	1	337	1	337	1	337	1	337	2	450	2	450	1	337
1500	0	213	1	353	1	353	2	476	2	476	2	476	3	590	3	590
2000	1	362	1	362	2	490	2	490	2	490	3	608	4	722	4	722
3000	1	371	2	504	2	504	3	627	3	627	4	747	5	864	6	975
4000	1	375	2	512	2	512	3	636	4	760	4	760	5	880	7	1110
6000	1	380	2	518	3	648	4	774	5	894	6	1015	7	1130	8	1255
8000	1	382	3	653	4	779	4	779	5	900	6	1025	8	1255	10	1485
10000	1	383	3	656	4	783	5	904	6	1030	7	1150	9	1380	11	1615
15000	2	526	4	789	5	914	6	1040	7	1160	8	1280	10	1515	12	1745
20000	2	528	5	918	6	1040	7	1165	8	1285	10	1520	11	1635	13	1865
30000	3	664	6	1045	7	1290	8	1290	10	1530	11	1645	13	1875	15	2110
50000	4	796	7	1170	9	1415	10	1530	11	1650	13	1885	15	2115	17	2345
70000	4	797	8	1295	10	1535	11	1655	13	1890	15	2120	16	2235	18	2465
100000	5	926	10	1535	11	1655	13	1890	14	2010	16	2240	17	2350	19	2585

Tabulky pro stanovení výběrového přejímacího postupu při daných hodnotách N, $\bar{p}$ a p_t.
(Viz odst. 3b.)

$p_t = 0{,}02$

$c = 0$					
N	50	100	150	200	250
n	45	68	81	88	92

N	$\bar{p}=0{,}001$		$\bar{p}=0{,}003$		$\bar{p}=0{,}006$		$\bar{p}=0{,}01$		$\bar{p}=0{,}012$		$\bar{p}=0{,}014$		$\bar{p}=0{,}016$		$\bar{p}=0{,}018$	
	c	n	c	n	c	n	c	n	c	n	c	n	c	n	c	n
300	0	96	0	96	0	96	1	153	1	153	1	153	0	96	0	96
400	0	100	0	100	1	162	1	162	1	162	1	162	1	162	1	162
600	0	105	0	105	1	173	1	173	2	232	2	232	2	232	2	232
800	0	107	0	107	1	178	2	240	2	240	3	237	3	237	2	240
1000	0	109	0	109	1	181	2	245	2	245	3	304	4	361	4	361
1500	0	111	0	111	2	252	3	313	3	313	4	373	5	432	6	488
2000	0	112	0	112	2	256	3	318	4	380	4	380	5	440	7	554
3000	0	113	1	190	2	259	4	387	5	447	6	507	7	564	8	627
4000	1	191	1	191	3	326	4	390	5	452	6	512	8	628	10	742
6000	1	192	2	262	4	393	5	455	6	517	8	636	9	696	11	810
8000	1	193	3	330	4	394	6	518	7	580	9	699	10	757	12	872
10000	1	193	3	331	5	458	7	581	8	642	10	759	11	818	13	933
15000	1	193	4	397	6	523	8	644	10	763	11	822	13	938	15	1055
20000	1	194	4	398	7	585	9	705	11	824	12	882	14	1000	16	1115
30000	2	265	5	462	8	647	11	826	13	943	14	1000	16	1115	18	1230
50000	2	266	7	587	10	768	13	945	14	1005	16	1120	17	1175	19	1290

$p_t = 0{,}03$

N	$\bar{p}=0{,}001$		$\bar{p}=0{,}005$		$\bar{p}=0{,}01$		$\bar{p}=0{,}015$		$\bar{p}=0{,}018$		$\bar{p}=0{,}021$		$\bar{p}=0{,}024$		$\bar{p}=0{,}027$	
	c	n	c	n	c	n	c	n	c	n	c	n	c	n	c	n
50	0	39	0	39	0	39	0	39	0	39	0	39	0	39	0	39
100	0	54	0	54	0	54	0	54	0	54	0	54	0	54	0	54
150	0	60	0	60	0	60	0	60	0	60	0	60	0	60	0	60
200	0	64	0	64	0	64	1	102	1	102	1	102	0	64	0	64
300	0	68	0	68	1	110	1	110	1	110	1	110	1	110	1	110
400	0	70	1	115	1	115	1	115	2	154	2	154	2	154	2	154
600	0	72	1	119	1	119	2	161	2	161	3	200	3	200	4	238
800	0	73	1	122	1	122	2	166	3	206	3	206	4	245	5	282
1000	0	74	1	124	2	168	3	209	3	209	4	249	5	288	6	325
1500	0	75	1	126	2	171	3	213	4	255	5	294	6	333	7	372
2000	1	127	2	173	3	216	4	258	5	298	6	338	7	376	8	418
3000	1	128	2	174	3	218	5	303	6	342	7	381	8	420	10	490
4000	1	128	2	175	4	262	5	304	6	344	8	424	9	464	11	540
6000	1	129	3	222	5	305	7	387	8	427	9	467	11	544	13	622
8000	1	129	3	222	5	306	7	388	9	468	10	508	12	585	14	662
10000	1	129	4	265	6	348	8	429	10	509	11	548	13	625	15	703
15000	2	177	5	308	7	390	10	511	11	550	13	626	15	705	17	781
20000	2	177	6	349	8	431	11	550	12	590	14	666	16	745	18	821
30000	3	222	7	391	10	512	12	590	14	669	16	746	17	784	19	860

Tabulky pro stanovení výběrového přejímacího postupu při daných hodnotách N, $\bar{p}$ a p_t.
(Viz odst. 3b.)

$p_t = 0{,}04$

N	$\bar{p}=0{,}001$		$\bar{p}=0{,}01$		$\bar{p}=0{,}016$		$\bar{p}=0{,}02$		$\bar{p}=0{,}024$		$\bar{p}=0{,}028$		$\bar{p}=0{,}032$		$\bar{p}=0{,}036$	
	c	n	c	n	c	n	c	n	c	n	c	n	c	n	c	n
50	0	34	0	34	0	34	0	34	0	34	0	34	0	34	0	34
100	0	44	0	44	0	44	0	44	0	44	0	44	0	44	0	44
200	0	50	0	50	1	81	1	81	1	81	1	81	1	81	1	81
300	0	52	1	86	1	86	1	86	2	116	2	116	2	116	2	116
400	0	54	1	89	1	89	2	120	2	120	3	148	3	148	3	148
600	0	55	1	92	2	124	2	124	3	155	3	155	4	184	5	211
800	0	56	1	93	2	126	3	158	3	158	4	187	5	217	6	245
1000	0	56	2	128	2	128	3	159	4	190	4	190	5	220	7	277
1500	1	95	2	129	3	162	4	193	5	223	6	253	7	282	8	313
2000	1	96	2	130	4	195	4	195	5	226	6	256	8	314	10	372
3000	1	96	3	164	4	196	5	228	6	258	8	318	9	348	11	404
5000	1	97	4	198	6	260	7	291	8	321	10	380	11	409	13	467
7000	1	97	5	230	7	292	8	321	9	352	11	411	12	440	15	526
10000	1	97	6	262	8	323	9	352	11	411	12	441	14	499	16	558
15000	2	133	7	293	9	354	11	413	12	442	14	501	16	558	18	615
20000	2	133	8	324	10	384	12	443	13	472	15	530	17	588	19	645
25000	2	133	9	354	11	414	13	472	14	502	16	560	17	588	19	645

$p_t = 0{,}05$

N	$\bar{p}=0{,}001$		$\bar{p}=0{,}01$		$\bar{p}=0{,}02$		$\bar{p}=0{,}025$		$\bar{p}=0{,}03$		$\bar{p}=0{,}035$		$\bar{p}=0{,}04$		$\bar{p}=0{,}045$	
	c	n	c	n	c	n	c	n	c	n	c	n	c	n	c	n
50	0	31	0	31	0	31	0	31	0	31	0	31	0	31	0	31
100	0	37	0	37	0	37	0	37	0	37	0	37	0	37	0	37
150	0	40	0	40	1	64	1	64	1	64	1	64	1	64	0	40
200	0	41	1	67	1	67	1	67	1	67	2	90	2	90	1	67
300	0	43	1	71	1	71	2	95	2	95	2	95	3	118	3	118
400	0	44	1	72	2	98	2	98	2	98	3	122	4	144	4	144
600	0	44	1	74	2	101	3	125	3	125	4	149	5	173	6	195
800	0	45	1	75	2	102	3	127	4	152	4	152	5	176	7	222
1000	0	45	2	103	3	130	3	130	4	154	5	178	6	201	8	248
1500	1	76	2	104	3	130	4	156	5	180	6	204	7	228	9	274
2000	1	77	2	105	4	157	5	182	6	206	7	230	8	254	10	300
3000	1	77	3	134	5	185	6	208	7	232	8	256	10	302	12	348
5000	1	77	4	159	6	208	8	257	9	281	10	304	12	351	14	398
7000	1	77	5	184	7	234	9	282	10	306	12	353	14	400	16	445
10000	1	78	6	210	9	283	10	306	11	330	13	377	15	423	17	469
15000	2	106	7	235	10	307	12	354	13	377	16	447	17	470	18	493
20000	2	106	8	259	11	331	13	378	14	402	15	425	17	471	19	516

Tabulky pro stanovení výběrového přejímacího postupu při daných hodnotách N, $\overline{p}$ a p_t.
(Viz odst. 3b.)

$p_t = 0{,}07$																
N	$\overline{p}=0{,}001$		$\overline{p}=0{,}01$		$\overline{p}=0{,}02$		$\overline{p}=0{,}035$		$\overline{p}=0{,}042$		$\overline{p}=0{,}049$		$\overline{p}=0{,}056$		$\overline{p}=0{,}063$	
	c	n	c	n	c	n	c	n	c	n	c	n	c	n	c	n
50	0	24	0	24	0	24	0	24	0	24	0	24	0	24	0	24
100	0	28	0	28	0	28	1	45	1	45	1	45	1	45	1	45
150	0	30	0	30	1	48	1	48	1	48	2	65	2	65	1	48
200	0	30	1	50	1	50	2	67	2	67	2	67	3	83	2	67
300	0	31	1	52	1	52	2	70	2	70	3	87	4	103	4	103
500	0	32	1	54	2	73	3	90	3	90	4	108	5	124	6	141
700	0	32	1	54	2	73	3	92	4	110	5	127	6	144	8	176
1000	0	32	2	74	3	93	4	111	5	128	6	146	7	162	9	195
1500	1	55	2	75	3	94	5	130	6	147	7	165	9	198	11	230
2000	1	55	2	75	4	113	6	148	7	165	8	182	10	216	12	249
3000	1	55	3	95	5	131	7	166	8	183	10	217	11	234	14	284
5000	1	55	4	114	6	149	9	201	10	218	12	252	13	269	16	318
7000	1	55	5	132	7	167	10	219	11	236	13	269	15	303	17	335
10000	1	55	5	132	8	185	11	236	13	270	14	287	16	320	18	353
15000	2	76	6	150	9	202	13	270	14	287	16	320	18	353	19	369

$p_t = 0{,}1$																
N	$\overline{p}=0{,}001$		$\overline{p}=0{,}01$		$\overline{p}=0{,}03$		$\overline{p}=0{,}04$		$\overline{p}=0{,}05$		$\overline{p}=0{,}06$		$\overline{p}=0{,}07$		$\overline{p}=0{,}09$	
	c	n	c	n	c	n	c	n	c	n	c	n	c	n	c	n
50	0	18	0	18	0	18	0	18	0	18	0	18	0	18	0	18
100	0	21	0	21	1	34	1	34	1	34	1	34	2	45	1	34
150	0	21	0	21	1	35	1	35	2	48	2	48	2	48	3	59
200	0	22	1	36	1	36	2	49	2	49	2	49	3	61	4	72
300	0	22	1	37	2	50	2	50	3	63	3	63	4	75	6	97
500	0	23	1	38	2	52	3	65	3	65	4	77	5	89	8	124
700	0	23	1	38	3	65	3	65	4	78	5	90	6	102	9	136
1000	0	23	1	38	3	66	4	78	5	91	6	103	7	115	10	150
1500	1	39	2	53	4	79	5	92	6	104	7	116	8	128	12	174
2000	1	39	2	53	5	92	6	104	7	116	8	128	10	152	13	187
3000	1	39	3	66	6	105	7	117	8	129	10	153	11	164	15	211
5000	1	39	4	80	7	117	9	141	10	153	11	165	13	188	17	235
7000	1	39	4	80	8	129	10	153	11	165	13	188	15	212	18	246
10000	1	39	5	92	10	154	11	165	13	189	14	201	16	224	19	258

LITERATURA

[1] *H. F. Dodge-H. G. Romig:* Sampling inspection tables, New York 1944.
[2] *L. Prouza:* Praktické základy statistické kontroly jakosti, Praha 1952.
[3] *M. G. Kendall:* The advanced theory of statistic, Vol. I, London 1945.
[4] *A. Špaček:* Note on minimax solution of statistical decision problems, Colloquium mathematicum II, 3—4 (1951).

Резюме

МИНИМАКСИМАЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ ВЫБОРОЧНОГО ПРИЕМОЧНОГО ПЛАНА

МИЛОСЛАВ ИРЖИНА, ИРЖИ НЕДОМА (Miloslav Jiřina, Jiří Nedoma)

(Поступило в редакцию 6/I 1956 г.)

В статье приводится план выборочного приемочного контроля со сплошным контролем непринятых партий, отличающийся от известного плана Доджа и Ромига [1] тем, что он при данной средней доле брака производства $\bar{p}$, при данном объеме партии N и при данных условиях (1) или (2) делает минимальным не выражение (3), которое Додж и Ромиг ошибочно принимают за среднее количество проверенных изделий, а выражение (7). При этом $\mathfrak{F}(\bar{p})$ означает систему всех функций распределения F, удовлетворяющих условиям (4) и (5), а выражение $I(c,n,N,F)$, определенное соотношением (6), соответствует среднему количеству проверенных изделий, если доля брака в партиях имеет F в качестве функции распределения. В отделе 3 содержатся графики и таблицы, при помощи которых можно определить объем выбора n и приемочное число c для указанного выборочного плана.

Таблицы были составлены на основании теорем, доказанных в отделе 2. Главный результат этого отдела можно сформулировать следующим образом: Пусть $\mathfrak{F}(a,b,\bar{x})$ при заданных $a,b,\bar{x}$ таких, что $a < \bar{x} < b$ означает систему всех функций распределения, которые справа непрерывны и для которых $F(a-0) = 0$, $F(b) = 1$ и $\int_a^b x \,\mathrm{d}F(x) = \bar{x}$, и пусть $f(x)$ — функция, непрерывная на $\langle a,b \rangle$. Тогда выражение $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}F(x)$ достигает своего минимума по отношению к системе $\mathfrak{F}(a,b,\bar{x})$ при определенной ступенчатой функции из системы $\mathfrak{F}(a,b;\bar{x})$ с одним или двумя скачками. Из теорем отдела 2 затем легко вытекает, что $\max\limits_{F \in \mathfrak{F}(\bar{p})} I(c,n,N,F) = N - (N-n)\, m(c,n)$, где значения $m(c,n)$ определены соотношениями (10) или (11), если биномиальное распределение заменить распределением Пуассона.

Summary

MINIMAX SOLUTION OF SAMPLING INSPECTION PLAN

MILOSLAV JIŘINA, JIŘÍ NEDOMA

(Received January 6, 1956.)

A sampling inspection plan with complete inspection of rejected lots, minimizing (for given lot size N, process average fraction defective $\bar{p}$ and conditions (1) or (2)) the expression $\max\limits_{F \in \mathfrak{F}(\bar{p})} I(c, n, N, F)$ is presented. The symbol $\mathfrak{F}(\bar{p})$ used above denotes the system of all distribution functions satisfying (4) and (5) and the value $I(c, n, N, F)$ defined by (6) corresponds to the average number of pieces inspected per lot if the lot fraction defective p is distributed according to the distribution function F. In this point our plan differs from the well known Dodge and Romig plan [1] which minimizes the expression (3) (the authors Dodge and Romig take (3) erroneously for the average number of pieces inspected per lot).

The section 3 contains charts and tables by means of which the sample size n and the acceptance number c for the plan just described can be found. The construction of these tables is based on theorems proved in section 2. The main result of this section can be stated as folows: Given a, b, $\bar{x}$ such that $a < \bar{x} < b$, let $\mathfrak{F}(a, b, \bar{x})$ denote the system of all distribution function continuous from the right and such that $F(a - 0) = 0$, $F(b) = 1$, $\int_a^b x \, \mathrm{d}F(\bar{x}) = x$. Further let $f(x)$ be a continuous function on $\langle a, b \rangle$. Then the expression $\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}F(x)$ takes its minimum with respect to the system $\mathfrak{F}(a, b, \bar{x})$ for a step function from $\mathfrak{F}(a, b, \bar{x})$ with one or two jumps. From these theorems it follows easily that $I(c, n, N, F) = N - (N - n)\, m(c, n)$ where the values $m(c, n)$ are given by (10) or (11) if the binomial distribution is replaced by the Poisson distribution.