Renata Babušková

Statistické metody v numerické praxi

Aplikace matematiky, Vol. 4 (1959), No. 2, 153–155

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/102656`

STATISTICKÉ METODY V NUMERICKÉ PRAXI

Diskusní příspěvek

RENATA BABUŠKOVÁ

Ve svém diskusním příspěvku bych se chtěla zmínit o problémech aplikace statistických metod v numerickém počítání. Aplikace, i když se intuitivně zdají být názorné, jsou při bližším rozboru dosti složité a mohou vyvolávat řadu pochyb apod. Přesto jsem toho názoru, že je v tomto směru mnoho možností.

Nejprve bych chtěla názorně ukázat některé obtíže, které vznikají při aplikaci. Typickým případem je zde problém zaokrouhlování (viz [1]). Zaokrouhlování vlastně není náhodným procesem, přesto však ve většině případů přinášejí aplikace metod náhodného procesu velmi dobré výsledky. Je to velmi příbuzný problém s problémem tvorby náhodných čísel získaných nějakou matematickou metodou. Tohoto způsobu se dnes skoro výhradně užívá, avšak někteří statistikové mají k němu značné výhrady (viz např. [2]); přece však dávají tyto metody velmi dobré výsledky.

Zde je řada problémů dosud naprosto neřešených, které mohou někdy vést k nesprávným výsledkům, což opět může mít za následek zavrhování této metody. Připomeňme si zde historii Diracovy funkce, Heavisidova počtu apod. Tyto metody dávaly velmi dlouhou dobu v převážném počtu případů správné výsledky; byly tedy i přesto, že se docházelo někdy i k nesprávným výsledkům, metodami velmi užitečnými. Teprve dlouho potom se podařilo vybudovat matematické základy tak, že je dnes jasné, kdy je možné tyto metody oprávněně aplikovat a kdy užití vede k chybným výsledkům. Není někdy i zavrhování statistických metod při studiu zaokrouhlovacích chyb podobné? Je zřejmé, že z hlediska čisté matematické obecnosti zatím nejsou aplikace statistických metod zcela oprávněny. Dodnes nevíme zcela přesně, ve kterých případech jsou a ve kterých nejsou tyto aplikace oprávněny. Je to však důvodem k zavrhování této cesty, která má nesporně správný intuitivní základ? Domnívám se, i když samozřejmě je třeba míti stále na mysli, že případně může dojít k nesprávným výsledkům, že to důvod není.

Tato skutečnost je příčinou, že jsme zatím z hlediska matematického na půdě velmi labilní, přičemž se lze někdy opírat v podstatě jen o zkušenosti. Tato okolnost asi způsobuje, že se této otázce věnuje méně pozornosti než by bylo třeba.

Uvedu zde některé možnosti aplikací statistických metod v otázkách numerického řešení.

Problémy 1. skupiny: Jako příklad zde uvedu integrál z náhodové funkce. Otázkou, která se zde vyskytuje, je náhrada integrálu mechanickou kvadraturou. Pro názornost uvedu příklad.[1]) Měříme kubaturu dřeva. Tvar kmenů považujeme za náhodovou funkci, kubatura bude integrál z této náhodové funkce. Problém nyní je, najít jako náhradu integrálu nejvhodnější mechanickou kvadraturu (pravidlo lichoběžníkové, Simpsonovo apod.). Vzhledem k tomu, že dochází k řadě měření, je metoda celkem jasná a snadno proveditelná. Ze znalosti korelační funkce určíme dispersi chyby způsobené záměnou integrálu sumací a zvolíme tu mechanickou kvadraturu, která nám dává chyby jakožto náhodové veličiny ve správném poměru k hodnotám integrálu jako náhodové veličiny. Zde tedy dochází k aplikaci statistických metod při odhadu chyby způsobené záměnou integrálu sumací. Podobných případů lze najít celou řadu, např. v hydrologii apod., v jednodušším nebo složitějším tvaru, od nejjednodušších tak jak jsme uvedli až po případy velmi složité.

Problémy 2. skupiny: Tyto případy jsou již mnohem složitější a nejasnější. Přesto však se domnívám, že za některých předpokladů jde o správnou cestu k řešení problému. Uvedu to opět na jednom jednoduchém případě. Řešme obyčejnou lineární diferenciální rovnici

$$y'(t) - a(t)\, y(t) = 0$$

numericky interpolační metodou. Řešení spočívá v následujícím. Budeme hledat neznámou funkci $y(t)$ v bodech $t_i = i$, $i = 0, 1, \ldots$; vyjádříme

$$y(t_p) = y(t_l) + \int_{t_l}^{t_p} a(t)\, y(t)\, \mathrm{d}t\,, \quad p > l\,.$$

Integrál ve vzorci nahradíme mechanickou kvadraturou

$$\int_{t_l}^{t_p} a(t)\, y(t)\, \mathrm{d}t = \sum_{s=0}^{p-l} a(t_{l+s})\, y(t_{l+s})\, \beta_s$$

a tedy

$$y(t_p) = \frac{1}{1 - a(t_p)\, \beta_{p-l}} \left[y(t_l) + \sum_{s=0}^{p-l-1} a(t_{l+s})\, y(t_{l+s})\, \beta_s\right].$$

I při stejném počtu pořadnic (tj. rozdílu $p - l$) lze užitím různých metod mechanické kvadratury dojít k různým výsledkům. Vzniká nyní otázka,

[1]) Je to do jisté míry školský ilustrativní příklad.

kterou z kvadratur užít (tj. jaké koeficienty β_s zvolit). Tato otázka je tím závažnější, že volba koeficientů β_s nemá žádný vliv na pracnost výpočtu, resp. složitost instrukční sítě pro samočinné počítače. Uvážíme-li ještě, že v případě samočinného počítače není tisíc kroků výjimkou vyniká důležitost problému. Na první pohled se jedná o značný počet integrálů, resp. jejich záměnu mechanickou kvadraturou. Jde tedy do jisté míry o podobný problém tomu, který jsme popsali v 1. skupině. I když se zdá tato intuitivní základna celkem správnou, dochází k celé řadě obtíží způsobených tím, že hodnoty $y(t)$ jsou počítány rekurentně atd. Mimo této obtíže vzniká další. Představme si, že bychom znali funkci $y(t)\, a(t)$. Potom jde o to, zda funkci

$$\Phi(t) = \int\limits_{t}^{t+\Delta(p-l)} y(t)\, a(t)\, \mathrm{d}t - \sum_{s=0}^{p-l} y(t + s\Delta)\, a(t + s\Delta)\, \beta_s$$

můžeme považovat za realisaci stacionárního stochastického procesu alespoň v některých úsecích. I když to obecně zřejmě nelze předpokládat (protipříklad lze snadno zkonstruovat), přece jen můžeme při některých předpokladech užít s dostatečnou přesností metod stochastických procesů. Tak je-li např. $a(t) = \sin t + \frac{1}{3}\sin 3t + \frac{1}{9}\sin 9t$, lze očekávat, že při dostatečně hustém dělení (Δ dosti malé) bude při stejném $(p - l)$ ta metoda integrace nejvhodnější $\left(\text{v intervalu } t \leq \frac{\pi}{2}\right)$, pro kterou $\Phi(t)$ má minimální dispersi.

Zde se však vyskytuje řada problémů, které by bylo třeba řešit, ale které na tomto místě nelze rozebírat. Zdá se mi však, že jedině takový přístup k věci tohoto charakteru může vyřešit otázky tohoto druhu jak bylo uvedeno, otázky nejvhodnějších a nejúčinnějších algoritmů atp.

Problémy 3. skupiny: Sem patří problém statistického chápání zaokrouhlovacích chyb, které již jsou do jisté míry studovány. Přece však se mi zdá toto studium ještě naprosto nedostatečné, zejména při sledování otázky propagace chyby při algoritmech.

Ve svém diskusním příspěvku jsem pouze chtěla stručně upozornit na některé zcela speciální problémy z široké třídy otázek v souvislosti s aplikacemi numerických metod v numerickém počítání.

Literatura

[1] *R. Mikulaschková:* Zaokrouhlovací chyba při numerickém počítání z hlediska statistického. Pokroky matematiky, fysiky a astronomie, II, 1957, str. 697—707.

[2] *V. Fabian:* Odhad chyby zaokrouhlování při lineárních iteračních procesech, zejména při Seidlově řešení Dirichletova problému pro čtverec 10 × 10. Aplikace matematiky, 3, 1958, str. 22—43.