Aplikace matematiky

Ludvík Prouza

O spektru „vzorkovaného" stacionárního náhodného procesu

Aplikace matematiky, Vol. 5 (1960), No. 5, 394–397

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/102725`

O SPEKTRU „VZORKOVANÉHO“ STACIONÁRNÍHO NÁHODNÉHO PROCESU

LUDVÍK PROUZA

(Došlo dne 10. září 1959.)

V článku se vyšetřuje souvislost spektra stacionárního náhodného procesu a příslušné „vzorkované“ („vybrané“) náhodné posloupnosti.

1. ÚVOD

Nechť t je reálné. Nechť $\xi(t)$ je komplexní náhodný proces stacionární v širším smyslu s korelační funkcí $R(t)$ a spektrální funkcí $F(\lambda)$, definovanou známou CHINČINOVOU formulí

$$R(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} \, \mathrm{d}F(\lambda) \tag{1}$$

a normovanou vztahy

1) $F(\lambda)$ je spojitá zprava,

2) $F(-\infty) = 0$.

Nechť $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Nechť $\{\xi(n)\}$ je posloupnost „vzorkovaná“ („vybraná“) z procesu $\xi(t)$. Jak známo, tato náhodná posloupnost je stacionární v širším smyslu a má korelační posloupnost $\{R(n)\}$ a spektrální funkci $V(\lambda)$, definovanou pro $\lambda \in \langle -\pi, \pi \rangle$ známou WOLDOVOU formulí

$$R(n) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{in\lambda} \, \mathrm{d}V(\lambda) \tag{2}$$

a normovanou vztahy

1*) $V(\lambda)$ je spojitá zprava,

2*) $V(-\pi) = 0$.

V dalším se budeme zabývat relací mezi $F(\lambda)$ a $V(\lambda)$.

2. VZTAH MEZI $F(\lambda)$ a $V(\lambda)$

Věta. *A. Nechť $k = 0, 1, 2, \ldots$ Nechť $\lambda \in \langle -\pi, \pi\rangle$. Nechť je dána posloupnost funkcí $\{V_k(\lambda)\}$, kde*

$$V_k(\lambda) = \sum_{m=-k}^{k} \{F[\lambda + 2m\pi] - F[(2m - 1)\pi]\}\,. \tag{3}$$

Potom

$$V(\lambda) = \lim_{k\to\infty} V_k(\lambda)\,, \tag{4}$$

přičemž konvergence je stejnoměrná pro $\lambda \in \langle -\pi, \pi\rangle$.

B. Nechť proces $\xi(t)$ je reálný. Pak platí též

$$V(\lambda) = F(\lambda) + \sum_{m=1}^{\infty} \{F[2m\pi + \lambda] - F[2m\pi - \lambda - 0]\} - \tag{5}$$
$$- \sum_{m=0}^{\infty} \{F[(2m + 1)\pi] - F[(2m + 1)\pi - 0]\}\,.$$

C. Nechť existuje spektrální hustota $f(\lambda) = F'(\lambda)$. Pak existuje spektrální hustota $v(\lambda) = V'(\lambda)$ a platí

$$v(\lambda) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f(\lambda + 2m\pi)\,. \tag{6}$$

Důkaz: A. Následující vlastnosti $\{V_k(\lambda)\}$ jsou skoro samozřejmé:

a) $V_k(-\pi) = 0$ pro každé k,
b) $V_k(\lambda)$ je neklesající v λ pro každé k,
c) $V_k(\lambda)$ je zprava spojitá v λ pro každé k,
d) $V_k(\lambda) \leqq F(\infty)$ pro každé k,
e) $V_k(\lambda) \leqq V_{k+1}(\lambda)$ pro každé k a λ,
f) $\lim\limits_{k\to\infty} V_k(\pi) = F(\infty)$.

Z d), e) plyne ihned existence funkce $V^*(\lambda) = \lim\limits_{k\to\infty} V_k(\lambda)$ pro každé $\lambda \in \langle -\pi, \pi\rangle$. Z b) je patrno, že $V^*(\lambda)$ je neklesající v λ. Protože pro $l > k$ a každé $\lambda \in \langle -\pi, \pi\rangle$ platí

$$V_l(\lambda) - V_k(\lambda) \leqq F(\infty) - F[(2k - 1)\pi] + F[-(2k + 1)\pi], \tag{7}$$

je zřejmé, že konvergence $\{V_k(\lambda)\}$ k $V^*(\lambda)$ je stejnoměrná pro $\lambda \in \langle -\pi, \pi\rangle$. Z c) je patrno, že $V^*(\lambda)$ je spojitá zprava, z a) plyne, že $V^*(-\pi) = 0$.

Dále platí

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{in\lambda}\, dV_k(\lambda) = \int_{-(2k+1)\pi}^{(2k+1)\pi} e^{in\lambda}\, dF(\lambda)\,, \tag{8}$$

tedy z (1)

$$\lim_{k\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} e^{in\lambda}\, dV_k(\lambda) = R(n)\,. \tag{9}$$

Avšak ze shora uvedených vlastností $V^*(\lambda)$ je zřejmé, že na posloupnost $\{V_k(\lambda)\}$ a $V^*(\lambda)$ lze použít HELLYOVY věty (viz [2], s. 206), proto

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{in\lambda} \, \mathrm{d}V^*(\lambda) = R(n) \tag{10}$$

s týmiž normovacími vztahy na $V^*(\lambda)$ jako v 1*) a 2*). Tedy

$$V^*(\lambda) = V(\lambda) \, .$$

B. Pro reálný proces $\xi(t)$ platí, jak známo,

$$F(\lambda - 2k\pi) = F(\infty) - F(2k\pi - \lambda - 0) \, . \tag{11}$$

S použitím tohoto vztahu plyne snadno (5) z (3).

Vzorec (5) uvádí s jiným normováním WOLD ve své základní práci [1] (viz [1], s. 70).

C. Z (3) máme pro $\Lambda \in \langle -\pi, \pi \rangle$

$$V_k(\Lambda) = \int_{-\pi}^{\Lambda} \mathrm{d}V_k(\lambda) = \int_{-\pi}^{\Lambda} \sum_{m=-k}^{k} f(\lambda + 2m\pi) \, \mathrm{d}\lambda \, . \tag{12}$$

Definujme

$$v_k(\lambda) = \sum_{m=-k}^{k} f(\lambda + 2m\pi) \, . \tag{13}$$

Potom zřejmě

$$0 \leqq v_k(\lambda) \leqq v_{k+1}(\lambda) \tag{14}$$

pro každé k, λ. S připuštěním hodnoty ∞ existuje tedy funkce $v^*(\lambda) = \lim_{k \to \infty} v_k(\lambda)$. Ježto pro každé k a $\Lambda \in \langle -\pi, \pi \rangle$ platí

$$\int_{-\pi}^{\Lambda} v_k(\lambda) \, \mathrm{d}\lambda \leqq F(\infty) \, , \tag{15}$$

existuje $\lim_{k \to \infty} \int_{-\pi}^{\Lambda} v_k(\lambda) \, \mathrm{d}\lambda$. Tedy z jedné známé věty (viz [3], s. 387—388) plyne, že $v^*(\lambda)$ je v $\langle -\pi, \pi \rangle$ skoro všude konečná a integrovatelná a

$$V(\Lambda) = \int_{-\pi}^{\Lambda} v^*(\lambda) \, \mathrm{d}\lambda \, . \tag{16}$$

Můžeme tedy definovat

$$v(\lambda) = v^*(\lambda) \tag{17}$$

(viz též [4], s. 57).

Literatura

[1] *Wold H.:* A Study in the Analysis of Stationary Time Series. Almqvist & Wiksell, Uppsala 1938.

[2] *Натансон И. П.:* Теория функций вещественной переменной. ГИТТЛ, Москва 1950.

[3] *Титчмарш Э.:* Теория функций. ГИТТЛ, Москва 1951.
[4] *Grenander U., Rosenblatt M.:* Statistical Analysis of Stationary Time Series. Almqvist & Wiksell, Stockholm 1956.
[5] *Prouza L.:* Poznámka o přenosové funkci lineárního impulsního filtru. Vyjde ve sborníku „Souhrn prací o automatisaci 1959".
[6] *Blackmann R. B., Tukey J. W.:* The measurement of power spectra from the point of communication engineering — Part II. The Bell System Technical Journal, vol. XXXVII, 1958, 485—570.

Резюме

О СПЕКТРЕ "ВЫБРАННОГО" СТАЦИОНАРНОГО СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА

ЛЮДОВИК ПРОУЗА (Ludvík Prouza)

В статье исследуется соотношение между спектром $F(\lambda)$ стационарного случайного процесса и спектром $V(\lambda)$ соответствующей „выбранной" случайной последовательности. Доказывается формула

$$V(\lambda) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \{F[\lambda + 2m\pi] - F[(2m - 1)\pi]\},$$

и показывается ее связь с одной формулой Вольда и формулой для спектральных плотностей.

Summary

ON THE SPECTRUM OF „SAMPLED" STATIONARY RANDOM PROCESSES

LUDVÍK PROUZA

In this article the relation between the spectrum $F(\lambda)$ of a stationary random process and the spectrum $V(\lambda)$ of the related „sampled" random sequence is investigated. The formula

$$V(\lambda) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \{F[\lambda + 2m\pi] - F[(2m - 1)\pi]\}$$

is proved and its relation to a formula of Wold and the formula for spectral densities, is shown.