Václav Doležal; Josef Prokop; Zdeněk Vorel

Úloha teorie grafů pří řešení elektrických sítí

Aplikace matematiky, Vol. 7 (1962), No. 5, 331–337,338–339,340–343

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/102816`

ÚLOHA TEORIE GRAFŮ PŘI ŘEŠENÍ ELEKTRICKÝCH SÍTÍ

VÁCLAV DOLEŽAL, JOSEF PROKOP, ZDENĚK VOREL

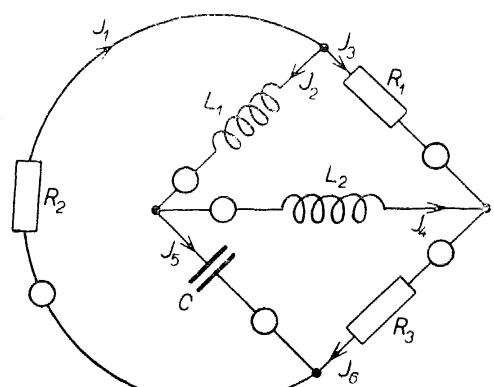
(Došlo dne 29. srpna 1961.)

Úkolem tohoto článku je podat čtenáři stručný přehled těch metod řešení elektrických obvodů se soustředěnými prvky, které podstatně využívají topologických vlastností obvodů, tj. vlastností struktury zapojení.

V prvé části bude nejprve formulován problém pasivní elektrické sítě (Kirchhoffovy) a uvedena klasická Kirchhoffova pravidla; ve druhé části budou uvedeny některé modernější metody, které se hodí i k řešení sítí s aktivními prvky. Budiž poznamenáno hned úvodem, že mnohé z těchto moderních metod, ač jsou ze stanoviska numerického vyhodnocení velmi účinné, nejsou vždy zcela spolehlivě matematicky fundovány; proto si článek klade i ten úkol, ukázat matematikům pracujícím v oboru teorie grafů tu problematiku, jejíž zpřesnění a prohloubení by přineslo technické praxi cenné výsledky.

ČÁST I

Sítí se soustředěnými prvky rozumíme obvykle soustavu, kterou obdržíme vzájemným pospojováním základních prvků – odporů, cívek a kondensátorů. (Přesnou formulaci uvedeme později.) Povězme si nejdříve, co představují pojmy „odpor, cívka, kondensátor" matematicky. Odporem nazýváme takový fysikální prvek, který je popsán rovnicí $e = Ri$, kde e značí napětí na prvku, i protékající proud a R je reálná konstanta. Možno tedy odpor charakterisovat číslem R. Cívka je definována jako takový prvek, pro který platí $e = L\, di/dt$ (L je opět reálné číslo a nazývá se indukčnost). Konečně kondensátor je prvek, pro který $i = C\, de/dt$ (C je opět reálné a nazývá se kapacita).



Obr. 1.

Na obr. 1 je uveden příklad sítě; odpory, cívky a kondensátory jsou tam vyznačeny způsobem známým z fysiky, jehož smysl je jistě zřejmý.

Vyšetřováním sítě rozumíme obvykle nalezení proudů, které protékají jednotlivými prvky (v obr. 1 jsou označeny $i_1, \ldots, i_6$), jsou-li do některých nebo obecně do všech vodičů sítě vloženy zdroje elektromotorické síly e_i (v obr. 1 jsou zdroje vyznačeny kroužky). Proudy spolu s elektromotorickými silami musí splňovat jistou soustavu rovnic, které se nazývají „Kirchhoffovy zákony".

Obvykle se uvažují následující dva případy: Buď 1. e_i jsou obecně funkcemi času t (časová oblast), nebo 2. e_i mají speciální tvar $e_i = E_i \cos(\omega t + \varphi_i)$ (E_i, φ_i, ω jsou reálná čísla, ω se nazývá kruhový kmitočet). My si zde pro jednoduchost všimneme pouze případu 2. Předpokládejme, že hledané proudy i_k mají opět tvar $i_k = J_k \,.$ $. \cos(\omega t + \varphi_k)$. Potom zřejmě možno psát $e_i = \operatorname{Re} \tilde{E}_i \exp(i\omega t)$, $i_k = \operatorname{Re} \tilde{J}_k \exp(i\omega t)$, kde $\tilde{E}_i$, $\tilde{J}_k$ jsou obecně komplexní čísla.

Uvažme nyní případ, že takové napětí e panuje na cívce o indukčnosti L a protékající proud i je téhož typu. Pak rovnice $e = L\,\mathrm{d}i/\mathrm{d}t$ dá $\operatorname{Re} \tilde{E} \exp(i\omega t) = L\{\operatorname{Re} \tilde{J} \,.$ $. \exp(i\omega t)\}' = L \operatorname{Re} i\omega\tilde{J} \exp(i\omega t)$. Ježto L je reálné, možno psát $\tilde{E} = i\omega L\tilde{J}$. Číslo $i\omega L$ nazývá se impedance cívky L při daném kruhovém kmitočtu ω.

Zcela stejně dostaneme pro kondensátor rovnici $\tilde{J} = i\omega C\tilde{E}$ a pro odpor $E = R\tilde{J}$. Čísla R, $1/i\omega C$ nazývají se impedance odporu resp. kondensátoru. Odtud je lehko vidět, že tímto způsobem je chování jednotlivých prvků popsáno jednoduchými lineárními rovnicemi v komplexních číslech.

Jak již bylo shora řečeno, musí hledané proudy i_k splňovat spolu se zdroji e_i jistou soustavu lineárních rovnic, která je jistým způsobem utvořena pomocí struktury (topologie) sítě a hodnot jejích prvků R, L, C. Lze snadno ukázat, že v námi uvažovaném případě 2 je celý problém popsán soustavou algebraických rovnic pro neznámé $\tilde{J}_k$, jejíž koeficienty jsou komplexní čísla. (Blíže o tom viz např. v [1].)

Formulujme nyní naznačený intuitivní popis přesně. Buď G konečný orientovaný graf, který má hrany $h_1, h_2, \ldots, h_r$ a uzly $u_1, u_2, \ldots, u_s$. Přitom předpokládejme, že G neobsahuje žádnou hranu, která začíná a končí v tomtéž uzlu, a že G neobsahuje isolované uzly. (Připouští se možnost, že více hran spojuje některé dva uzly.)

Obvodem nazveme podgraf G', který má tuto vlastnost: hrany G' lze přeorientovat tak, že tyto lze srovnati v takovou posloupnost $h_{i_1}, h_{i_2}, \ldots, h_{i_n}$, $h_{i_k} \neq h_{i_m}$, $h_{i_k} \neq -h_{i_m}$ pro $k \neq m$, že koncový uzel hrany h_{i_k} je začátečním uzlem hrany $h_{i_{k+1}}$, $k = 1, \ldots,$ $n-1$, a koncový uzel hrany h_{i_n} je začátečním uzlem hrany h_{i_1}.[1]) Formálně budeme obvod zapisovat symbolem $\sum_{i=1}^{r} c_i h_i$. (Čísla c_i mohou tedy nabývat pouze hodnot $1, -1, 0$.)

Definujme dále incidenční matici $a = [a_{ik}]$ typu (r, s) předpisem:

$$
\begin{aligned}
(1) \qquad a_{ik} &= 1, \text{ jestliže } u_k \text{ je koncový uzel hrany } h_i\,, \\
&= -1, \text{ jestliže } u_k \text{ je začáteční uzel hrany } h_i\,, \\
&= 0, \text{ jestliže } u_k \text{ není incidentní s hranou } h_i\,.
\end{aligned}
$$

[1]) Obvod tedy může mít tvar „osmičky".

Buď Z funkce (obecně komplexní), definovaná na kartézském součinu $H \times H$, kde $H = \{h_1, h_2, \ldots, h_r\}$. Pak řekneme, že je dána síť N, je-li dán graf G a funkce Z.

Problém řešení sítě zavedeme nyní takto: Buď N síť, a nechť E je funkce (obecně komplexní), definovaná na H; řekneme, že pro dané E má N řešení, existuje-li funkce J (obecně komplexní), definovaná na H tak, že jsou splněny následující podmínky:

K1: Pro každý obvod $\sum_{i=1}^{r} c_i h_i$ je

$$\sum_{i=1}^{r} c_i\, E(h_i) = \sum_{i=1}^{r} c_i \sum_{k=1}^{r} Z(h_i, h_k)\, J(h_k)\,.$$

K2: Pro $k = 1, 2, \ldots, s$ je

$$\sum_{i=1}^{r} a_{ik}\, J(h_i) = 0\,.$$

Zmiňme se o fysikálním významu zavedených věcí; funkcí E representujeme vložení elektromotorických sil do sítě, J pak representuje hledané proudy. (Je tedy $E(h_i)$, $J(h_i)$ elektromotorická síla, resp. proud v i-té hraně.) Čísla $Z(h_i, h_k)$ representují vzájemné fysikální působení mezi hranami h_i, h_k pro $i \neq k$, $Z(h_i, h_i)$ potom působení prvku v hraně h_i. Tak například, je-li v hraně h_i odpor R, je $Z(h_i, h_i) = R$, je-li tam cívka o indukčnosti L, je $Z(h_i, h_i) = i\omega L$, a je-li tam konečně kondensátor o kapacitě C, je $Z(h_i, h_i) = 1/i\omega C$.

Podmínky K1, K2 nazývají se „Kirchhoffovy zákony". Prvá z nich požaduje, aby součet elektromotorických sil v každém obvodu byl roven součtu „napěťových úbytků" $\sum_{i=1}^{r} Z(h_i, h_k)\, J(h_k)$ v témže obvodu; druhá žádá, aby součet proudů (s ohledem na orientaci, srv. s definicí čísel a_{ik}) v každém uzlu sítě byl roven nule.

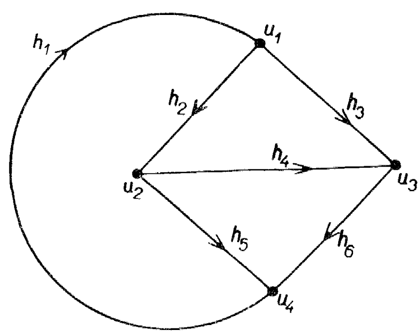
Tak v příkladě, uvedeném na obr. 1, přísluší síti graf, zobrazený na obr. 2. Zde podle definice je

$$a = \begin{bmatrix} 1, & 0, & 0, & -1 \\ -1, & 1, & 0, & 0 \\ -1, & 0, & 1, & 0 \\ 0, & -1, & 1, & 0 \\ 0, & -1, & 0, & 1 \\ 0, & 0, & -1, & 1 \end{bmatrix}.$$

Dále je lehko vidět, že např. $h_2 - h_3 + h_4$ je obvodem. Má tedy platit

$$i\omega L_1 J_2 - R_1 J_3 + i\omega L_2 J_4 = E_2 - E_3 + E_4\,.$$

Podobně pro uzel u_2 má platit $J_2 - J_4 - J_5 = 0$.



Obr. 2.

Fundamentálním problémem řešení sítě je otázka existence a unicity. Tato byla částečně zodpovězena v práci [1]. Označíme-li pro stručnost $E(h_i) = E_i$, $J(h_i) = J_i$, $Z(h_i, h_k) = Z_{ik}$, $1 \leq i, k \leq r$, lze vyslovit toto tvrzení:

Věta 1. *Jestliže pro každý nenulový systém čísel* $\{x_1, x_2, \ldots, x_r\}$ *platí*

$$\sum_{i,k} Z_{ik} x_i \bar{x}_k \neq 0\,, \tag{2}$$

pak pro každou funkci E má N jediné řešení.

Nadto platí: Podmínka (2) *je splněna, jestliže* $Z_{ik} = Z_{ki}$ *pro každé* $1 \leqq i, k \leqq r$ *a je-li* $\operatorname{Re} Z_{ii} > 0$ *pro* $i = 1, 2, \ldots, r$, $\operatorname{Re} Z_{ik} = 0$ *pro* $i \neq k$.

Poslední tvrzení značí fysikálně to, že je-li v každé hraně sítě zařazen ohmický odpor, že pak síť má pro libovolné vložené elektromotorické síly E_i jediné řešení, tj. proudy J_i naběhnou na některé jednoznačně stanovené hodnoty. Zajímavé je to, že poslední podmínka nepřihlíží k topologii sítě, tj. každá síť N s takovou funkcí Z ale jinak s libovolným grafem G má pro každé E jediné řešení.

Na druhé straně však žádá tato podmínka poměrně mnoho; je-li totiž $\operatorname{Re} Z_{ii} = 0$ pro některé i, nedovoluje vynést rozhodnutí. Lze však dokázat, že ji lze poměrně dosti oslabit. Platí totiž následující tvrzení (srv. [3]):

Věta 2. *Jestliže je* $Z_{ik} = Z_{ki}$ *pro* $1 \leqq i, k \leqq r$, $\operatorname{Re} Z_{ii} \geqq 0$ *pro* $i = 1, 2, \ldots, r$ $\operatorname{Re} Z_{ik} = 0$ *pro* $i \neq k$, *a je-li*

$$\sum_{i=1}^{r} |c_i| \operatorname{Re} Z_{ii} > 0 \tag{3}$$

pro každý obvod $\sum_{i=1}^{r} c_i h_i$, *pak pro každé E má síť N jediné řešení J.*

Dále vzniká otázka: Jak poznáme, že podmínka (3) je splněna? (U složitých sítí může být totiž obtížné najít všechny obvody.) Dá se ukázat, že podmínka (3) je splněna právě tehdy, existuje-li kostra K[2]) grafu G taková, že pro každou hranu h_i grafu G, která nepatří do K, platí $\operatorname{Re} Z_{ii} > 0$, jinými slovy, že v každé hraně komplementu kostry K je zapojen kladný ohmický odpor (srv. [3]).

Tak v příkladě sítě z obr. 1 taková kostra existuje, a její hrany jsou h_2, h_4, h_5.

Poznamenejme ještě, že právě uvedená formulace řešení sítě rovnicemi K1, K2 není jediná možná; než uvedeme další, ekvivalentní formulaci, zmíníme se stručně o jednom zobecnění pojmu „jednoznačnosti" řešení, který má význam pro studium vlastností tzv. $2n$-pólů.

Buď N síť, a buď $m \leqq r$ pevně zvolené přirozené číslo; řekneme, že N má slabě jednoznačné řešení, jestliže pro každou funkci E definovanou na H, pro kterou je $E_{m+1} = E_{m+2} = \ldots = E_r = 0$, existuje funkce J definovaná na H tak, že jsou splněny podmínky K1, K2, přičemž čísla $J_1, J_2, \ldots, J_m$ jsou určena jednoznačně. Jinými slovy, nežádáme, aby funkce J byla určena jednoznačně, ale jen jejích prvních m hodnot.

Naznačme ještě, jaký je vztah právě zavedeného pojmu k $2n$-pólu. Vezměme pro jednoduchost případ $n = 1$, tj. dvojpólu. Dvojpólem budeme rozumět síť N danou grafem G a funkcí Z, na jejímž grafu G jsou vyznačeny dva různé uzly u_α, u_β, které

[2]) Kostrou K grafu G nazýváme takový podgraf, který neobsahuje žádný obvod a obsahuje všechny uzly G.

nazveme svorkami. Pomocí těchto svorek můžeme pak daný dvojpól vřadit do nějaké další soustavy (sítě), takže z hlediska teorie grafů se daný dvojpól jeví jako jakási „zobecněná hrana“. Přitom nás obvykle nezajímá, co se děje uvnitř dvojpólu, ale jen to, kterak se dvojpól chová navenek. Vyjádříme-li to přesněji, můžeme říci zhruba toto: Na základě sítě N daného dvojpólu sestrojíme síť N^*, danou grafem G^* a funkcí Z^*, kde G^* dostaneme doplněním G hranou h^*, která má u_α za začáteční, u_β za koncový uzel, a kde Z^* definujeme na $H^* \times H^*$ $(H^* = H \cup \{h^*\})$ předpisem

$$Z^*(h_i, h_k) = Z(h_i, h_k), \quad 1 \leq i, k \leq r\,; \quad Z^*(h^*, h^*) = Z(h^*, h_i) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, r\,.$$

Pak nás přirozeně zajímá existence slabě jednoznačného řešení pro $m = 1$, tj. zda pro každou funkci E^*, definovanou na H^*, tvaru $E(h^*) = E^*$, $E(h_i) = 0$ pro $i = 1, 2, \ldots, r$, existuje J na H^* tak, že J^* (tj. $J(h^*)$) je určeno jednoznačně. Fysikálně to zřejmě značí, že přiložením elektromotorické síly E^* na svorky u_α, u_β je jednoznačně určen proud J^*, který těmito svorkami protéká.

Poznamenejme ještě, že podmínky slabé jednoznačnosti nebyly dosud obecně zkoumány.

Uveďme nyní další formulaci problému řešení sítě. Buď tedy N nějaká síť a zaveďme označení: buď Z čtvercová matice r-tého řádu sestavená z čísel Z_{ik}, a buďte J a E r-dimensionální vektory o složkách $J_1, \ldots, J_r$ atd., a konečně V buď s-dimensionální vektor.

Sestrojme soustavu

$$\begin{aligned} ZJ + aV &= E\,, \\ a'J &= 0\,, \end{aligned} \tag{4}$$

kde a' značí matici transponovanou k a.

Pak lze dokázat, že platí následující tvrzení (srv. [1]):

Věta 3. a) *Ke každému řešení J rovnic* K1, K2 *(čísla $J_1, J_2, \ldots, J_r$ interpretujeme jako vektor J a stejně u E) existuje vektor V tak, že platí* (4).

b) *Splňují-li vektory J, V soustavu* (4), *pak J vyhovuje rovnicím* K1, K2.

Jsou tedy formulace K1, K2 a (4) ekvivalentní; zejména tedy platí, že je-li splněna podmínka (2), že soustava (4) má podle vektoru J jediné řešení pro každé E. Snadno lze dále ukázat, že vektor V není obecně určen jednoznačně; ze (4) přímo plyne, že splňují-li vektory $V, \tilde{V}$ soustavu (4), (při pevných J, E), že pak splňují rovnici $a(V - \tilde{V}) = 0$.

Věnujme ještě několik slov fysikálnímu významu rovnic (4). Druhá rovnice soustavy (4) je zřejmě K2. Rozepíšeme-li první rovnici (4) do složek, platí pro i-tou složku

$$\sum_{k=1}^{r} Z_{ik} J_k + \sum_{k=1}^{s} a_{ik} V_k = E_i\,. \tag{5}$$

Podle (1) však je $\sum_{k=1}^{s} a_{ik} V_k = V_p - V_q$, přičemž u_p je koncový, u_q začáteční uzel hrany h_i.

Čísla V_i se nazývají potenciály v uzlech, a rozdíl $V_p - V_q$ má význam napětí, které naměříme mezi uzly u_p, u_q. Nepředstavuje tedy (5) nic jiného, než napěťovou bilanci hrany h_i, tj. vztah mezi napěťovými úbytky, rozdílem potenciálů a vloženou elektromotorickou silou v hraně h_i

Přistupme nyní k výkladu dalších skutečností, spjatých s vyloženou problematikou, které mají úzký vztah k teorii grafů. Buď tedy opět N nějaká síť daná grafem G a funkcí Z, a předpokládejme, že a) G je souvislý,[3]) b) N má jediné řešení pro každé E. Snadno lze pak ukázat, že budeme-li klást $V_s = 0$ (s-tá komponenta vektoru V), že potom pro každé E má soustava (4) v ostatních neznámých $J_1, \ldots, J_r, V_1, \ldots, V_{s-1}$ jediné řešení. Ježto poslední rovnice soustavy $a'J = 0$ je lineární kombinací předešlých (srv. s (1)), plyne odtud, že (4) je ekvivalentní soustavě rovnic s maticí koeficientů

$$Q = \left[\begin{array}{c|c} Z & d \\ \hline d' & 0 \end{array}\right] \tag{6}$$

typu $(r + s - 1, r + s - 1)$, kde d značí matici vzniklou z a vypuštěním posledního sloupce. Z věty 3 pak plyne, že $\det Q \neq 0$.

Je zřejmé, že chceme-li v konkrétních případech stanovit složky vektoru J, je nutné určit determinant matice $Q = [q_{ik}]$ a její subdeterminanty. Bez újmy obecnosti hledejme jen algebraický doplněk D_{11} k prvku q_{11}, a doplněk D_{12} k prvku q_{12}; současně označme $D = \det Q$.

Jestliže budeme nyní navíc předpokládat, že matice Z je diagonální, což fysikálně odpovídá tomu případu, kdy mezi jednotlivými prvky sítě nejsou induktivní vazby, potom lze odvodit jednoduché vzorce pro D, D_{11}, D_{12}. Poznamenejme, že tyto vzorce, zvané „Kirchhoffova pravidla", byly odvozeny pro případ stejnosměrného proudu již Kirchhoffem v r. 1847.

Tato tvrzení zní (srv. [2]):

Věta 4. *Buď N síť daná grafem G a funkcí Z, přičemž graf G je souvislý, je $Z_{ik} = 0$ pro $i \neq k$ a je splněna podmínka* (2). *Pak platí:*

1. *Je-li $t_i = \{h_{i_1}, h_{i_2}, \ldots, h_{i_n}\}$ kostra grafu G, buď t'_i její komplement (t'_i obsahuje všechny hrany G, které nepatří k t_i). Buď dále $Z(t'_i)$ součin všech čísel Z_{ii}, pro která $i \neq i_1, \ldots, i_n$ (přísluší tedy součin komplementu t'_i). Pak platí*

$$D = (-1)^{s-1} \sum_{t_i} Z(t'_i)\,, \tag{7}$$

kde se sčítá přes všechny kostry t_i grafu G.

2. *Buď G^* podgraf G, který vznikne z G vypuštěním hrany h_1. Buď t_i^* kostra G^*,*

[3]) Graf G nazývá se souvislý, když pro každé dva uzly u_j, u_k grafu G existuje posloupnost $\{h_{l_i}\}$, $i = 1, \ldots, m$ hran grafu G (eventuálně vhodně přeorientovaných) taková, že koncový uzel hrany h_{l_i} je počátečním uzlem hrany $h_{l_{i+1}}$ pro $i = 1, \ldots, m - 1$, a u_j, (u_k) je počátečním (koncovým) uzlem hrany h_{l_1}, (h_{l_m}).

$t_i^{*'}$ *její komplement v* G^*, *a* $Z(t_i^{*'})$ *mějž analogický význam jako prve. Pak platí*

(8) $$D_{11} = (-1)^{s-1} \sum_{t_1^*} Z(t_i^{*'}),$$

kde se sčítá přes všechny kostry t_i^* *grafu* G^*.

3. *Buď* $\mathfrak{S}$ *systém všech podgrafů* G_v *grafu* G, *které mají tyto vlastnosti:*

a) *každý* G_v *obsahuje právě jeden obvod* $\sum_{i=1}^{r} c_i h_i$, *který obsahuje hrany* h_1, h_2 (*je tedy* $c_1 c_2 \neq 0$),

b) *odstraněním* h_1 *z* G_v *vznikne kostra* G, *a rovněž odstraněním* h_2 *z* G_v *vznikne kostra* G.

Buď dále $p(G_v) = c_1 c_2$, *a* G'_v *komplement* G_v *v* G. *Označíme-li* $Z(G'_v)$ *součin všech čísel* Z_{ii} *příslušných hranám* G'_v, *potom platí*

(9) $$D_{12} = (-1)^{s-1} \sum_{G_v \in \mathfrak{S}} p(G_v)\, Z(G'_v),$$

kde se sčítá přes všechny grafy G_v *systému* $\mathfrak{S}$.

Není bez zajímavosti ta okolnost, že klademe-li v matici Q specielně $Z_{ii} = 1$, $i = 1, 2, \ldots, r$, dostáváme tak ze (7), že $|\det Q|$ je rovno počtu všech koster grafu G.

Pro větší názornost vypočtěme ještě hodnoty D, D_{11} pro síť z obr. 1. Označíme-li $Z_1, \ldots, Z_6$ impedance prvků v hranách $h_1, \ldots, h_6$, je $Z_1 = R_2$, $Z_2 = i\omega L_1$, $Z_3 = R_1$, $Z_4 = i\omega L_2$, $Z_5 = 1/i\omega C_1$, $Z_6 = R_3$. Z obr. 2 je patrno, že $\{h_2, h_4, h_6\}$, $\{h_3, h_4, h_5\}$, $\{h_1, h_2, h_4\}$, $\{h_1, h_3, h_4\}$, $\{h_1, h_4, h_5\}$, $\{h_1, h_4, h_6\}$, $\{h_2, h_4, h_5\}$, $\{h_3, h_4, h_6\}$, $\{h_1, h_5, h_6\}$, $\{h_1, h_2, h_3\}$ jsou všechny kostry grafu G. Podle věty 4 tedy platí $D = -(Z_1Z_3Z_5 + Z_1Z_2Z_6 + Z_3Z_5Z_6 + Z_2Z_5Z_6 + Z_2Z_3Z_6 + Z_2Z_3Z_5 + Z_1Z_3Z_6 + Z_1Z_2Z_5 + Z_2Z_3Z_4 + Z_4Z_5Z_6)$. Analogicky plyne $D_{11} = -(Z_3Z_5 + Z_2Z_6 + Z_3Z_6 + Z_2Z_5)$

Zmiňme se ještě o metodě „uzlových napětí“. Stane-li se, že graf G nějaké sítě N má poměrně málo uzlů ve srovnání s počtem hran, potom pro praktický výpočet je výhodnější nevycházet přímo z rovnic K1 a K2, ale ze soustavy, kterou za okamžik odvodíme. Tato metoda nazývá se metodou uzlových napětí, a mimo uvedený význam je ještě pozoruhodná tím, že většina novějších metod řešení, spočívajících na teorii grafů, z ní vychází. Tuto metodu vyložíme zde pro případ, kdy graf sítě N je souvislý. (Poznamenejme, že zobecnění na nesouvislé grafy nečiní potíží.)

V soustavě (4) zvolme $V_s = 0$ a označme vektor $V'_* = [V_1, V_2, \ldots, V_{s-1}, 0]$. Lze dokázat, že má-li síť N jediné řešení v J, pak soustava (4) má jediné řešení v neznámých $J_1, J_2, \ldots, J_r, V_1, V_2, \ldots, V_{s-1}$. Vypusťme z matice a v soustavě (4) poslední sloupec; tím dostaneme matici d typu $(r, s-1)$. Protože poslední z rovnic (4) je zřejmě lineární kombinací ostatních, můžeme ji rovněž vypustit. Označme $U' = [V_1, V_2, \ldots, V_{s-1}]$; potom soustavu (4) můžeme psát ve tvaru

(10) $$ZJ + dU = E, \quad d'J = 0.$$

Jestliže nyní matice Z je regulární, můžeme soustavu (10) řešit tak, že z první vektorové rovnice vyjádříme J a dosadíme do druhé, tj.

$$d'YdU = d'J_v \,, \tag{11}$$

kde jsme označili $Y = Z^{-1}$, $J_v = YE$. Odtud již můžeme jednoznačně určit U a pak J. Čtenář nechť si povšimne, že matice $d'Yd$, jejíž inversi musíme při výpočtu U provést, je typu $(s - 1, s - 1)$, a tedy poměrně malého řádu, je-li počet uzlů malý.

Fyzikálně vyjadřuje vektor U potenciály jednotlivých uzlů sítě. Odtud název „metoda uzlových napětí".

Poznamenejme ještě, že pro právě vyloženou teorii není podstatné to, že jsme operovali jen s komplexními čísly (což mělo svůj původ v tom, že jsme se omezili na vyšetřování „ustáleného stavu" v síti, tj. kdy průběhy proudů i napětí měly tvar $\operatorname{Re} A$ . . $\exp(i\omega t)$). Vhodným zobecněním, kdy prvky vektorů E, J patří do nějakého modulu, lze dosáhnout toho, že pokryjeme jak „ustálený stav", tak i „časovou oblast", tj. kdy proudy i napětí mohou být libovolné funkce nebo obecněji distribuce. Mimo to lze pak vyslovit některé obecné věty o existenci a jednoznačnosti řešení. Bližší poučení o tom nalezne čtenář v práci [3].

ČÁST II

Vraťme se znovu k metodě uzlových napětí. Jak jsme viděli (srv. s rov. (11)), je tam nutno provést inversi matice

$$\tilde{Y} = d'Yd \,, \tag{12}$$

kde d je strukturální matice dané sítě s vypuštěným posledním sloupcem, a kde $Y = Z^{-1}$. Z hlediska numerického výpočtu bude tedy důležitá otázka, kterak je možno jednoduše stanovit $\det \tilde{Y}$ a subdeterminanty $\tilde{Y}$. Zde platí

Věta 5. *Buď N síť, daná grafem G a maticí Y; nechť G je souvislý a nechť Y je diagonální. Je-li t_i nějaká kostra G, označme $Y(t_i)$ součin všech čísel Y_{kk}, pro která hrana h_k je obsažena v kostře t_i. Pak platí*

$$\det \tilde{Y} = \sum_{t_i} Y(t_i) \,, \tag{13}$$

kde se sčítá přes všechny kostry t_i grafu G.

Tato věta, která byla poprvé v poněkud odlišné formě odvozena již Maxwellem (srv. [4]), je základem většiny grafových metod analysy elektrických obvodů. Je lehko vidět, že tvrzení věty 5 je „duální" k tvrzení věty 4a.

Z praktického hlediska má však věta tu nevýhodu, že je obtížné vyhledat všechny kostry grafu, je-li graf složitější.

Výhodnější metoda, o které se nyní zmíníme, byla popsána v práci [5], a spočívá v zavedení jistého algoritmu. Buď tedy síť N dána souvislým grafem G a diagonální jmaticí Y. Sestrojme matici $B = [b_{ik}]$ typu $(s - 1, s - 1)$ tímto předpisem (s je počet uzlů grafu G): je-li $i \leqq k$, buď b_{ik} rovno součtu všech čísel Y_{jj}, pro která hrana h_j spojuje uzly u_i, u_{k+1} (neexistují-li takové hrany, klademe $b_{ik} = 0$), je-li $i > k$, buď $b_{ik} = 0$. Zřejmě B je horní trojúhelníková matice.

Je-li nyní C nějaká horní trojúhelníková matice, definujme číslo $\rceil C \lfloor$, zvané foldant matice C, rekurentním předpisem

$$\rceil C \lfloor = \left\rceil \begin{matrix} c_{11}, & c_{12}, & c_{13}, & \dots, & c_{1n} \\ 0, & c_{22}, & c_{23}, & \dots, & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0, & 0, & & \dots, & c_{nn} \end{matrix} \right\lfloor =$$

$$= c_{1n} \left\rceil \begin{matrix} c_{11} + c_{2n}, & c_{12} + c_{3n}, & \dots, & c_{1,n-1} + c_{n,n} \\ 0, & c_{22}, & \dots, & c_{2,n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0, & 0, & \dots, & c_{n-1,n-1} \end{matrix} \right\lfloor +$$

$$+ c_{2n} \left\rceil \begin{matrix} c_{11}, & c_{12}, & \dots, & c_{1,n-1} \\ 0, & c_{22} + c_{3n}, & \dots, & c_{2,n-1} + c_{n,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0, & 0, & \dots, & c_{n-1,n-1} \end{matrix} \right\lfloor + \dots +$$

$$+ c_{nn} \left\rceil \begin{matrix} c_{11}, & c_{12}, & \dots, & c_{1,n-1} \\ 0, & c_{22}, & \dots, & c_{2,n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0, & 0, & \dots, & c_{n-1,n-1} \end{matrix} \right\lfloor ,$$

$\rceil c \lfloor = c$ (c je číslo).

Pak platí následující věta:

Věta 6. *Nechť matice B je utvořena z matice Y pomocí grafu G shora popsaným způsobem; pak platí* $\rceil B \lfloor = \det d'Yd$.

Poznamenejme, že důkaz této věty lze provésti způsobem, který podstatně používá vlastností grafu sítě N. Čtenář jej nalezne v práci [5], [6].

Podobnými metodami lze dokázat obdobná tvrzení o doplňcích matice $\tilde{Y}$. Zde uveďme opět jen výsledky. K tomu cíli zavedeme nový pojem, a to pojem dvojstromu. Bez újmy obecnosti předpokládejme, že sloupec matice a, který jsme vypustili abychom dostali matici d, odpovídá uzlu u_s, který v dalším nazývejme referenčním uzlem. Buď nyní t_v nějaká kostra souvislého grafu G sítě N; odstraníme-li z t_v některou hranu, dostaneme tak podgraf, který nazýváme dvojstromem. Zřejmě každý dvojstrom je grafem o dvou komponentách. (Za komponentu grafu pokládáme též isolovaný uzel.)

Je-li nyní τ nějaký dvojstrom, buď $Y(\tau)$ součin všech čísel Y_{ii}, pro která hrana $h_i \in \tau$.

Buď nyní (i, k) dvojice indexů, $i, k \leqq s - 1$ (může být $i = k$); dvojstrom τ_{ik}^{α} nazveme dvojstromem příslušným dvojici (i, k), jestliže oba uzly u_i, u_k patří do jedné a téže komponenty τ^α_{ik} a uzel u_s do druhé. Pak lze dokázat, že platí následující tvrzení:

Věta 7. *Buď $\tilde{Y}$ matice, definovaná rovnicí* (12). (*O Y předpokládáme, že je diagonální, a že graf G sítě N je souvislý.*) *Nechť Δ_{ik}, $i, k \leqq s - 1$ je algebraický doplněk matice $\tilde{Y}$, příslušný prvku $\tilde{Y}_{ik}$; pak platí*

$$\Delta_{ik} = \sum_{\tau^\alpha{}_{ik}} Y(\tau^\alpha_{ik}), \tag{14}$$

kde se sčítá přes všechny dvojstromy grafu G, příslušné dvojici (i, k).

(Důkaz věty nalezne čtenář v [7].)

Poznamenejme zároveň, že existuje úzká souvislost mezi systémem dvojstromů příslušných dvojicí (i, i) a systémem koster grafu, který dostaneme z grafu G tak, že vypustíme všechny hrany, které spojují uzly u_i, u_s, a tyto uzly pak ztotožníme (srv. [8], [9], [10]).

Dále lze ukázat, že vyhledání sumy $\sum_{\tau^\alpha{}_{ik}} Y(\tau^\alpha_{ik})$ lze převést na problém čistě kombinatorického charakteru; stačí totiž sestavit z daného grafu G systém všech podgrafů jistého typu o dvou komponentách, v každé komponentě vyhledat soustavu všech koster a stanovit číslo, dané obdobným předpisem jako (14). Přitom má tento způsob tu výhodu, že všechny operace lze uskutečnit v podstatě tak, že se tvoří jisté kombinace přirozených čísel; tato okolnost umožňuje to, že celý postup lze naprogramovat na počítacím stroji (srv. [6]). Mimo to přináší tato metoda podstatná zjednodušení v tom případě, kdy je nutno stanovit rozdíl algebraických doplňků $\Delta_{ik} - \Delta_{im}$. Tam totiž přímo z povahy grafu vyplývá, které členy rozvoje determinantů lze vypustit již během výpočtu, protože se ve výsledku zruší.

Další příbuzné problémy tohoto charakteru jsou popsány v práci [11] a [12].

Metodě uzlových napětí je obdobná tzv. „metoda smyčkových proudů". Zde stanovují se nejprve pomocné veličiny, zvané „smyčkové proudy", pomocí kterých se pak počítají proudy v jednotlivých větvích. Pro uskutečnění výpočtu nutno zde určit determinant matice $X'ZX$, kde X značí matici, jejíž sloupce tvoří úplnou soustavu lineárně nezávislých řešení rovnice $a'x = 0$ (a je strukturální matice sítě). Lze snadno ukázat, že jednotlivé sloupce matice X jsou v úzkém vztahu k obvodům grafu dané sítě. Je tedy metoda smyčkových proudů výhodná zejména tehdy, kdy graf dané sítě má poměrně málo lineárně nezávislých obvodů ve srovnání s počtem uzlů. Zároveň lze ukázat, že existuje úzká souvislost mezi det $X'ZX$ a det $d'Yd$ (srv. [13]).

Rovněž metoda smyčkových proudů je východiskem některých způsobů grafové analysy (srv. [12], [7]); tyto způsoby nejsou však z praktického hlediska příliš výhodné, ježto narážejí na potíže, spojené s vyhledáním soustavy lineárně nezávislých obvodů daného grafu. Z tohoto důvodu jsou tyto metody téměř nepoužitelné, jedná-li se o složitější sítě, jejichž grafy nejsou planární.

Učiňme na tomto místě ještě jednu důležitou poznámku. Dá se dokázat, že v případě, kdy matice Z je diagonální, nezávisí řešení sítě (tj. čísla $J(h_i)$, srv. s rov. K1, K2) v podstatě na orientaci, jakou má graf G (viz též [3]). Tato okolnost se odráží, jak si čtenář jistě všiml, v tom faktu, že pojmy kostry a dvojstromu, se kterými se operuje ve vzorcích (13), (14), nevyužívají orientace grafu G, tj. že v podstatě se pracuje s neorientovanými grafy. Poznamenejme ještě, že v případě kdy, matice Z není diagonální, hraje orientace podstatnou roli.

Přistupme nyní k otázkám grafové analysy tzv. aktivních sítí. V úvodu článku formulovali jsme problém pro klasické Kirchhoffovy sítě. Tam jsme předpokládali, že v síti existují pouze nezávislé zdroje, tj. matematicky řečeno, že čísla $E(h_i)$ jsou pevná a nezávisí od $J(h_i)$. Budeme-li zkoumat sítě aktivní, shledáme, že potom je ve většině případů možno jejich chování popsat soustavou rovnic tvaru K1, K2, kde ovšem $E(h_i)$ již závisí lineárně na $J(h_i)$. Poznamenejme, že takovými aktivními sítěmi jsou fysikální soustavy, utvořené z odporů, kondensátorů a cívek, které nadto obsahují elektronky, transistory apod. (srv. [14]).

Klasicky řešíme aktivní sítě tak, že zavedeme náhradní schemata aktivních prvků (elektronek, transistorů) a takto odvozenou síť řešíme pak metodou uzlových napětí nebo smyčkových proudů (srv. [14], [15]). Nevýhodou teoretického rázu tohoto způsobu je to, že nedovoluje popsat obecně každou aktivní síť pomocí odvozené sítě Kirchhoffovy. Kořen věci tkví v tom, že klasické prvky, tj. odpor, kondensátor a cívka mají, zhruba řečeno, tvar dvojpólu, kdežto aktivní prvky mají obyčejně tvar k-pólu, kde $k > 2$.

Podívejme se nyní na to, jaké jsou důsledky těchto faktů pro grafové metody analysy. Předně je zřejmé, že orientace jednotlivých vodičů takové aktivní sítě bude patrně hrát podstatnou roli, takže lze očekávat, že metody se tím zkomplikují. Jiný, důležitější problém, tkví v tom, kterak popsat takovou aktivní síť pomocí pojmů teorie grafů tak, aby se s tímto popisem dalo pohodlně pracovat. Zdá se, že nejschůdnější cestou, které se přidržuje řada autorů (srv. [16], [17], [18]), je popis aktivní sítě pomocí dvou grafů G_p, G_n, které se ve shodě s jejich fysikálním významem nazývají proudový a napěťový graf. Jiný způsob (srv. [11]) spočívá v tom, že se síť popisuje jedním grafem, kde se ovšem každému fysikálnímu prvku přiřazuje více hran, které jsou případně ještě vhodným způsobem ohodnoceny.

Všimněme si nyní poněkud blíže první formulace. Nebudeme se zde zdržovat detailním popisem konstrukce takových grafů podle dané aktivní sítě, ježto je to spíše záležitost technického charakteru, a všimněme si raději již některých výsledků. Tak jako v případě klasických sítí, jde i zde o to, stanovit determinant jisté matice. Zde se definuje „zobecněná matice soustavy rovnic uzlových napětí" H; předně se dá dokázat (srv. [16]), že pro tuto matici platí vztah $H = a'_p Y_z a_n$, kde a_p je incidentní matice proudového grafu sítě, a_n je incidentní matice napěťového grafu sítě a Y_z je zobecněná matice admitancí. (Tato matice charakterisuje fysikální vlastnosti jednotlivých elementů aktivní sítě, a tedy nezávisí od struktury sítě, tj. od způsobu vzájemného pospojování elementů.) Důležitou vlastností matice H je to, že všechny její algebraické doplňky řádu o jednotku nižšího než řád H jsou si rovny, přičemž jejich hodnota D je rozhodující pro výpočet řešení dané sítě. Lze rovněž dokázat tvrzení obdobné větě 5, a to: Číslo D je rovno součtu součinů admitancí těch koster grafů G_p, G_n, které jsou oběma grafům společné. (Prosíme čtenáře, aby pojmy „admitance kostry" a „kostry společné oběma grafům" chápal pokud možno intuitivně, ježto přesná definice těchto pojmů by se vymykala z rámce tohoto článku. Bližší poučení o tom lze nalézti v pracích [16], [18].) Poznamenejme ještě, že pravidla pro stanovení čísla „admitance kostry", pokud jde o stanovení jeho znaménka, jsou dosti složitá; existuje jich celá řada (srv. [10], [16], [18]), ale žádné z nich není natolik jednoduché, aby bylo snadno použitelné pro běžné výpočty. Rovněž tak není dosud znám nějaký algoritmus pro stanovení „společných koster grafů G_p, G_n". To jsou dosud otevřené otázky, které čekají jednak na přesné matematické fundování, a jednak na konstrukci prakticky účinných metod. Rozřešení těchto otázek mělo by význam nejen pro sítě samé, ale i pro studium tzv. n-pólů, které je možno velmi jednoduše popsat maticemi, obdobnými výše uvažované matici H.

Závěrem článku připomeňme ještě, že existuje též metoda, zvaná „metoda signálových toků", která používá popisu sítě pomocí grafů, která však nevychází ze struktury sítě, ale ze soustavy algebraických rovnic, kterou je uvažovaná síť popsána, takže postrádá některé výhody metod, vycházejících přímo z topologie sítě.

Literatura

[1] *Knichal V.*: O Kirchhoffových zákonech, Matem. fysikálny sborník SAV, 1952, č. 2.

[2] *Cauer W.*: Theorie der linearen Wechselstromschaltungen, Akademie Verlag, Berlin 1954.

[3] *Doležal V., Vorel Z.*: Theory of Kirchhoff's Networks, Čas. pro pěst. matem., 1962, č. 4.

[4] *Maxwell W.*: Treatise on Electricity and Magnetism, Oxford 1892.

[5] *Nakagawa N.*: On Evaluation of the Graph Trees and the Driving Point Admittance, Trans. IRE CT, June 1958, str. 122—128.

[6] *Prokop J.*: Některé aplikace teorie grafů v teorii lineárních obvodů, Aspirantská zpráva VÚT, 1961.

[7] *Mayeda W., Seshu S.*: Topological Formulae for Network Functions, Bull. Univ. of Illinois, Vol. 55, No 23, November 1957.

[8] *Mayeda W., Van Valkenburg M. E.*: Network Analysis and Synthesis by Digital Computer, IRE Convention Record, 1957.

[9] *Prokop J.*: Topologické metody analysy lineárních elektrických obvodů. Výzkumná zpráva VÚT, č. 4C 049 L 004, část 2.

[10] *Prokop J., Vlček M.*: Topologické metody analysy obvodů, Sborník VÚT, 1960.

[11] *Coates C. L.*: General Topological Formulae for Linear Network Function, Trans. IRE CT, March 1958, str. 42.

[12] *Галямичев Й. П.*: Топологический метод анализа линейных электрических схем, Научно-технический сборник, вып. 2, 1958, Но 391, стр. 66—76.

[13] *Tsang N. F.*: On Electrical Network Determinants, Journal Math. Phys., Vol. 33, No 2, July 1954, str. 185—193.

[14] *Bode H. W.*: Network Analysis and Feedback Amplifier Design, Van Nostrand, 1945.

[15] *Zadeh L. A.*: Multipole Analysis of Active Networks, Trans. IRE CT-4, 1957, No 3, str. 97—105.

[16] *Kim W. H.*: Application of Graph Theory to the Analysis of Active and Mutually Coupled Networks, Journ. Frankl. Inst. 271, 1961, No 3, str. 200—221.

[17] *Percival W. S.*: Improved Matrix and Determinant Methods for Solving Networks, Proc. IEE, Monograph No 96 R, April 1954.
[18] *Percival W. S.*: The Graphs of Active Network, Proc. IEE, Monograph No 129 R, April, 1955.

Резюме

РОЛЬ ТЕОРИИ ГРАФОВ В АНАЛИЗЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ЦЕПЕЙ

ВАЦЛАВ ДОЛЕЖАЛ, ИОСЕФ ПРОКОП, ЗДЕНЕК ВОРЕЛ
(Václav Doležal, Josef Prokop, Zdeněk Vorel)

В статье дается обзор известных до сих пор методов анализа линейных электрических цепей, основанных на методах теопии графов. В первой части формулируется задача решения цепи Кирхгоффа, показано одно ее обобщение, и приведены классические правила Кирхгоффа.

Во второй части назначены некоторые современные методы, которые пригодны и для решения цепей с активными элемнентами; одновременно отмечены их выгоды и невыгоды, равно как и те направления дальнейшего развития методов теории графов, от которых можно ожидать дальнейшие эффективные средства для решения цепей.

Статья дополнена многими ссылками на литературу.

Summary

THE THEORY OF GRAPHS IN THE ANALYSIS OF ELECTRICAL NETWORKS

VÁCLAV DOLEŽAL, JOSEF PROKOP, ZDENĚK VOREL

This paper is a survey of methods of analysing linear electrical networks by methods of graph theory. In the first part, the problem of solution of a Kirchhoff network is formulated, and a generalisation pointed out; the classical Kirchhoff laws are stated.

In the second part of the paper, some modern methods are described, which may also be applied to networks containing active elements; and also their advantages and disadvantages. The authors draw attention to those directions of graph-theoretical methods, whose development may be expected to result in further effective methods of solving networks.

Extensive references are given.

Adresy autorů: Ing. *Václav Doležal* C. Sc., Matematický ústav ČSAV, Žitná 25, Praha 1. *Josef Prokop*, Výzkumný ústav telekomunikací, Třebohostická, Praha 10 — Strašnice. Ing. *Zdeněk Vorel* C. Sc., Matematický ústav ČSAV, Žitná 25, Praha 1.