

# Aplikace matematiky

---

Vladimír Panc

Drehsymmetrische Spannungszustände der schubweichen Kreisplatte

*Aplikace matematiky*, Vol. 10 (1965), No. 5, 399–422

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/102980>

## Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1965

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

## DREHSYMMETRISCHE SPANNUNGSZUSTÄNDE DER SCHUBWEICHEN KREISPLATTE

VLADIMÍR PANC

(Eingegangen am 4. August 1964.)

Unter Berücksichtigung von Querschubverzerrungen wird eine Verfeinerung der klassischen Plattentheorie für den Fall der dünnen elastischen, durch drehsymmetrische Belastung beanspruchten Kreis- und Kreisringplatte entwickelt.

### 1. EINLEITUNG

In der vorliegenden Abhandlung wird die verallgemeinerte Iterationsmethode auf die Ermittlung des Einflusses von Querschubverzerrungen in dünnen elastischen Kreisplatten mit kleinen Durchbiegungen angewandt. Befindet sich die untersuchte Platte unter dem Angriff einer drehsymmetrischen Belastung, dann wird ihr Spannungs- und Verformungszustand ähnlich wie in der Theorie der dünnwandigen Stäbe [1] durch das Integrationsproblem vierter Ordnung gekennzeichnet. Der Grund dieser Tatsache liegt allerdings im Umstande, dass bei einem drehsymmetrischen Spannungszustande keine Drillungsmomente hervortreten. Man kann sich leicht davon überzeugen, dass erst für eine beliebige Belastung die Ordnung des entsprechenden Integrationsproblems auf die sechste erhöht werden muss, womit eine allgemeine verschärfte Theorie entsteht ([2]–[7]).

Im Fall einer drehsymmetrisch belasteten Kreisplatte kann der Einfluss von Querschubverzerrungen ganz unabhängig vom hervorgerufenen Spannungszustande ermittelt werden und die entwickelten Beziehungen stellen dann gewisse Korrekturen der klassischen, auf der Kirchhoffschen Annahme beruhenden Plattentheorie dar. In der Theorie der an beiden Rändern gestützten Kreisringplatte ist jedoch die vom Spannungszustande unabhängige Ermittlung des Schubeinflusses unmöglich. Eine solche schubweiche Kreisringplatte muss dann als eine auf zusammengesetzte Biegung und Abscherung beanspruchte Konstruktion untersucht werden.

## 2. GRUNDGLEICHUNGEN

Führen wir die Zylinderkoordinaten  $r, \varphi, z$  gemäss Abb. 1a ein und vernachlässigen wir den geringen Einfluss der Quersuzammendrückung, dann wird der gesuchte drehsymmetrische Spannungs- und Verformungszustand der Kreisplatte durch die Spannungskomponenten  $\sigma_r(r, z), \sigma_\varphi(r, z), \tau_{rz}(r, z)$  und durch die Verschiebungskomponenten  $u(r, z), w(r)$  definiert. Alle diesen Funktionen sind also von der Variablen  $\varphi$  unabhängig.

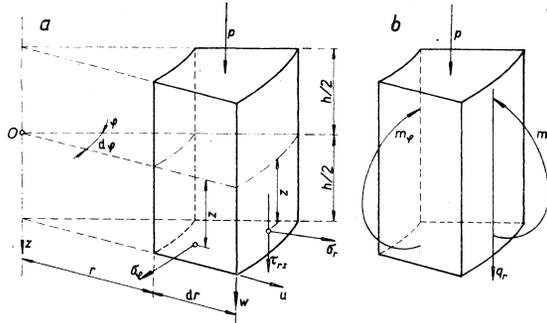


Abb. 1. Die Belastung des abgetrennten Plattenelements bei einem drehsymmetrischen Spannungszustande.

Die Gleichgewichtsbedingung eines abgetrennten Plattenelements  $dz \cdot dr \cdot r \cdot d\varphi$  in  $r$ -Richtung lautet dann nach [8]

$$(1) \quad \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{r} = 0.$$

Die geometrischen Beziehungen zwischen den von Null verschiedenen Verzerrungskomponenten  $\varepsilon_r(r, z), \varepsilon_\varphi(r, z), \gamma_{rz}(r, z)$  und den Verschiebungskomponenten  $u, w$  nehmen die Form

$$(2) \quad \varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}, \quad \varepsilon_\varphi = \frac{u}{r}, \quad \gamma_{rz} = \frac{dw}{dr} + \frac{\partial u}{\partial z}$$

an, während die Spannungs-Dehnungs-Gleichungen unmittelbar aus dem Hooke'schen Elastizitätsgesetz hervorgehen

$$(3) \quad \sigma_r = \frac{E}{1 - \mu^2} (\varepsilon_r + \mu \varepsilon_\varphi), \quad \sigma_\varphi = \frac{E}{1 - \mu^2} (\mu \varepsilon_r + \varepsilon_\varphi),$$

$$\tau_{rz} = G \gamma_{rz} = \frac{E}{2(1 + \mu)} \gamma_{rz}.$$

Die Spannungskomponenten setzen sich allerdings je Einheit der Schnittlänge zu den Schnittgrößen  $m_r(r)$ ,  $m_\varphi(r)$  und  $q_r(r)$  (Abb. 1b) zusammen

$$(4) \quad m_r = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_{rz} dz, \quad m_\varphi = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_{\varphi z} dz, \quad q_r = \int_{-h/2}^{+h/2} \tau_{rz} dz,$$

während nach Abb. 1b die Gleichgewichtsbedingungen eines abgetrennten Plattenelements  $hr \cdot dr \cdot d\varphi$  bei Vernachlässigung der Volumskräfte lauten

$$(5) \quad q_r = \frac{dm_r}{dr} + \frac{m_r - m_\varphi}{r}, \quad \frac{dq_r}{dr} + \frac{q_r}{r} + p = 0.$$

In der ersten Annäherung wollen wir die Kirchhoffsche Annahme einführen, nach der die Punkte einer Normalen zur Plattenmittelebene auch nach der Formänderung auf einer Geraden verbleiben, die senkrecht zur verformten Mittelfläche steht. Damit wird allerdings die Verzerrungskomponente  $\gamma_{rz}$  identisch gleich Null gesetzt. Ferner wollen wir mit dem Zeiger  $\sigma$  die Größen bezeichnen, die der Kirchhoffschen Annahme entsprechen, während die Größen mit dem Zeiger  $\tau$  den Einfluss von Querschubverzerrungen ausdrücken werden. Die Normalenverdrehung  $\omega_r$  ist also gleich der Plattenneigung der ersten Annäherung

$$(6) \quad \omega_r = \frac{dw_\sigma}{dr} = w'_\sigma,$$

während die Normalenverdrehung  $\omega_\varphi$  in  $\varphi$ -Richtung bei drehsymmetrischen Spannungszuständen identisch gleich Null ist. Die Verschiebungskomponenten  $u_\sigma$  und  $w_\sigma$  der ersten Annäherung werden dann durch die bekannte Beziehung

$$(7) \quad u_\sigma = -z\omega_r = -zw'_\sigma$$

verbunden, vorausgesetzt, dass die Koordinatenebene  $z = 0$  in der Plattenmittelebene liegt.

Setzen wir die Funktion (7) in die zwei ersten Formeln (2) ein, so entsteht für die Verzerrungskomponenten  $\varepsilon_{r\sigma}$  und  $\varepsilon_{\varphi\sigma}$

$$(8) \quad \varepsilon_{r\sigma} = -zw''_\sigma, \quad \varepsilon_{\varphi\sigma} = -\frac{z}{r} w'_\sigma$$

und mit Hilfe der Formeln (3) erhalten wir die Ausdrücke für die durch reine Plattenbiegung hervorgerufenen Normalspannungen  $\sigma_{r\sigma}$  und  $\sigma_{\varphi\sigma}$

$$(9) \quad \sigma_{r\sigma} = -\frac{E}{1-\mu^2} z \left( w''_\sigma + \frac{\mu}{r} w'_\sigma \right),$$

$$\sigma_{\varphi\sigma} = -\frac{E}{1-\mu^2} z \left( \mu w''_\sigma + \frac{1}{r} w'_\sigma \right).$$

Wollen wir die klassische Plattentheorie als die erste Annäherung des gestellten Problems betrachten, dann müssen sich diese Spannungen nach den Beziehungen (4) zu den resultierenden Schnittmomenten

$$(10) \quad m_r = -K \left( w''_\sigma + \frac{\mu}{r} w'_\sigma \right), \quad m_\varphi = -K \left( \mu w''_\sigma + \frac{1}{r} w'_\sigma \right)$$

zusammensetzen, wobei mit  $K$  die Plattensteifigkeit

$$(11) \quad K = \frac{Eh^3}{12(1 - \mu^2)}$$

bezeichnet wird. Man kann sehen, dass die Formeln (9) mit Hilfe der Beziehungen (10) auch in der Form

$$(12) \quad \sigma_{r\sigma} = \frac{12m_r}{h^3} z, \quad \sigma_{\varphi\sigma} = \frac{12m_\varphi}{h^3} z$$

geschrieben werden können.

Setzen wir die zugehörigen Ausdrücke nach (10) in die erste Gleichung (5) ein, so entsteht für die resultierende Scherkraft

$$(13) \quad q_r = -K \left( w'''_\sigma + \frac{1}{r} w''_\sigma - \frac{1}{r^2} w'_\sigma \right) \equiv -K \left[ \frac{1}{r} (r w'_\sigma)' \right]'$$

und nach Einsetzen in die zweite Bedingung (5) ergibt sich die Grundgleichung der ersten Annäherung in der Form

$$(14) \quad w_\sigma^{IV} + \frac{2}{r} w_\sigma''' - \frac{1}{r^2} w_\sigma'' + \frac{1}{r^3} w_\sigma' \equiv \frac{1}{r} \left\{ r \left[ \frac{1}{r} (r w'_\sigma)' \right]' \right\}' = \frac{p}{K}.$$

Man kann sich leicht davon überzeugen, dass alle Beziehungen (6) bis (14) mit der klassischen Plattentheorie genau übereinstimmen.

Befindet sich die Platte in dem der Kirchhoffschen Annahme entsprechenden Zustande der reinen Biegung, so ist allerdings die Schubspannung  $\tau_{rz}$  und zugleich die bezogene Scherkraft  $q_r$  identisch gleich Null. Wollen wir jetzt die abgeleiteten Beziehungen als die erste Annäherung der zusammengesetzten Biegung und Abscherung der Platte betrachten, so müssen die Schubspannungen  $\tau_{rz}$ , denen bei der Kirchhoffschen Annahme keine Verzerrung entspricht, aus der Gleichgewichtsbedingung (1) ermittelt werden. Nach Einsetzen der Funktionen (12) ergibt sich unter Berücksichtigung von (5)

$$(15) \quad \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} = -\frac{12}{h^3} \left( \frac{dm_r}{dr} + \frac{m_r - m_\varphi}{r} \right) z = -\frac{12}{h^3} q_{rz} z.$$

Führen wir die Integration durch, so entsteht unter Beachtung der Randbedingungen  $\tau_{rz} = 0$  für die Plattenleibungen  $z = \pm h/2$

$$(16) \quad \tau_{rz} = \frac{3}{2h} q_r \left[ 1 - \left( \frac{2z}{h} \right)^2 \right].$$

In der zweiten Annäherung können jetzt die durch die Schubspannungen (16) hervorgerufenen Schubverzerrungen ermittelt werden. Nach den letzten Beziehungen (2) und (3) entsprechen den Spannungen (16) die folgenden Schubverzerrungen

$$(17) \quad \gamma_{rz} \equiv \frac{dw_r}{dr} + \frac{\partial u_r}{\partial z} = \frac{3}{2Gh} q_r \left[ 1 - \left( \frac{2z}{h} \right)^2 \right],$$

infolge deren die Kirchhoffsche Annahme, dass die Normalen zur Plattenmittelebene auch nach der Verformung der Platte senkrecht zur verformten Mittelfläche stehen, fallen muss.

Benutzen wir die Bedingung  $u_r = 0$  für  $z = 0$ , die einerseits den vorausgesetzten kleinen Durchbiegungen und andererseits der Vernachlässigung von Quersamendrücke entspricht, so folgt aus der Gleichung (17) nach Integration

$$(18) \quad u_r = \frac{1}{2G} q_r \frac{z}{h} \left[ 3 - \left( \frac{2z}{h} \right)^2 \right] - zw'_r.$$

Setzen wir jetzt die zugehörigen Ausdrücke nach (18) in die zwei ersten Formeln (2) ein, so entsteht für die zusätzlichen Verzerrungskomponenten  $\varepsilon_{r\tau}$  und  $\varepsilon_{\varphi\tau}$

$$(19) \quad \varepsilon_{r\tau} = \frac{1}{2G} q'_r \frac{z}{h} \left[ 3 - \left( \frac{2z}{h} \right)^2 \right] - zw''_r,$$

$$\varepsilon_{\varphi\tau} = \frac{1}{2Gr} q_r \frac{z}{h} \left[ 3 - \left( \frac{2z}{h} \right)^2 \right] - \frac{z}{r} w'_r$$

und für die zusätzlichen Normalspannungen  $\sigma_{r\tau}$ ,  $\sigma_{\varphi\tau}$  ergibt sich dann nach den Formeln (3)

$$(20) \quad \sigma_{r\tau} = \frac{1}{1-\mu} \left( q'_r + \frac{\mu}{r} q_r \right) \frac{z}{h} \left[ 3 - \left( \frac{2z}{h} \right)^2 \right] - \frac{E}{1-\mu^2} z \left( w''_r + \frac{\mu}{r} w'_r \right),$$

$$\sigma_{\varphi\tau} = \frac{1}{1-\mu} \left( \mu q'_r + \frac{1}{r} q_r \right) \frac{z}{h} \left[ 3 - \left( \frac{2z}{h} \right)^2 \right] - \frac{E}{1-\mu^2} z \left( \mu w''_r + \frac{1}{r} w'_r \right).$$

Soll die resultierende Durchbiegung  $w$  der Platte durch Zusammensetzung der Funktionen  $w_\sigma$  und  $w_\tau$

$$(21) \quad w = w_\sigma + w_\tau$$

gekennzeichnet werden, dann müssen die resultierenden Schnittmomente der durch

die Beziehungen (20) definierten Zusatzspannungen identisch verschwinden. Würde das Gegenteil angenommen, dann würden die zusätzlichen Schnittmomente durch eine homogene Differentialgleichung dritter Ordnung von der Form (13) definiert. Eine solche Gleichung hätte jedoch bei den homogenen Randbedingungen nur eine triviale Lösung. Die erwähnten Bedingungen führen dann zum Gleichungssystem

$$(22) \quad \begin{aligned} \frac{h^2}{5(1-\mu)} \left( q_r' + \frac{\mu}{r} q_r \right) - K \left( w_\tau'' + \frac{\mu}{r} w_\tau' \right) &= 0, \\ \frac{h^2}{5(1-\mu)} \left( \mu q_r' + \frac{1}{r} q_r \right) - K \left( \mu w_\tau'' + \frac{1}{r} w_\tau' \right) &= 0, \end{aligned}$$

dessen Lösung ergibt sich in der Form

$$(23) \quad w_\tau' = \frac{6}{5Gh} q_r.$$

Setzen wir den Ausdruck (23) in die letzte Gleichgewichtsbedingung (5) ein, so entsteht die Grundgleichung für die Schubverformung der Platte

$$(24) \quad w_\tau'' + \frac{1}{r} w_\tau' \equiv \frac{1}{r} (r w_\tau')' = - \frac{6}{5Gh} p.$$

Aus Vergleichung der Beziehungen (13) und (23) folgt der notwendige differentiale Zusammenhang zwischen den Funktionen  $w_\sigma$  und  $w_\tau$

$$(25) \quad w_\sigma''' + \frac{1}{r} w_\sigma'' - \frac{1}{r^2} w_\sigma' + \frac{5(1-\mu)}{h^2} w_\tau' = 0.$$

Nach Einsetzen der Gleichung (23) nehmen dann die Formeln (20) für die zusätzlichen Normalspannungen die folgende Form an

$$(26) \quad \begin{aligned} \sigma_{rz} &= - \frac{1}{1-\mu} \left( q_r' + \frac{\mu}{r} q_r \right) \frac{z}{h} \left[ \left( \frac{2z}{h} \right)^2 - \frac{3}{5} \right], \\ \sigma_{\varphi z} &= - \frac{1}{1-\mu} \left( \mu q_r' + \frac{1}{r} q_r \right) \frac{z}{h} \left[ \left( \frac{2z}{h} \right)^2 - \frac{3}{5} \right]. \end{aligned}$$

Gemäss den Beziehungen (12) und (26) richten sich also die resultierenden Normalspannungen  $\sigma_r$  und  $\sigma_\varphi$  nach dem Gesetz der kubischen Parabel, wobei ihre Grösstwerte in den Plattenleibungen  $z = \pm h/2$  auftreten

$$(27) \quad \begin{aligned} \text{extr } \sigma_r &= \pm \left[ \frac{6}{h^2} m_r - \frac{1}{5(1-\mu)} \left( q_r' + \frac{\mu}{r} q_r \right) \right], \\ \text{extr } \sigma_\varphi &= \pm \left[ \frac{6}{h^2} m_\varphi - \frac{1}{5(1-\mu)} \left( \mu q_r' + \frac{1}{r} q_r \right) \right]. \end{aligned}$$

### 3. ALLGEMEINE LÖSUNG DER GRUNDGLEICHUNGEN

Bezeichnen wir mit  $M$  die Momentensumme

$$(28) \quad M = \frac{m_r + m_\sigma}{1 + \mu},$$

so folgt aus den Beziehungen (10)

$$(29) \quad M = -K \left( w_\sigma'' + \frac{1}{r} w_\sigma' \right) \equiv -\frac{K}{r} (r w_\sigma')'$$

und die Grundgleichung (14) kann dann auch in der Form

$$(30) \quad \frac{1}{r} (rM)' = -p$$

geschrieben werden. Nach  $r$  integriert, entsteht

$$(31) \quad rM' = \bar{c}_1 - \int p r \, dr$$

und die weitere Integration nach  $r$  ergibt

$$(32) \quad M = \bar{c}_2 + \bar{c}_1 \lg r - \int \frac{dr}{r} \int p r \, dr,$$

wobei mit  $\bar{c}_1$  und  $\bar{c}_2$  die Integrationskonstanten bezeichnet sind. Setzt man die Funktion (32) in die Gleichung (29) ein, so folgt nach Integration

$$(33) \quad r w_\sigma' = -\frac{1}{K} \left[ \bar{c}_3 + \frac{1}{2} \bar{c}_2 r^2 + \frac{1}{2} \bar{c}_1 (r^2 \lg r - \frac{1}{2} r^2) - \int r \, dr \int \frac{dr}{r} \int p r \, dr \right],$$

$$w_\sigma = -\frac{1}{K} \left[ \bar{c}_4 + \bar{c}_3 \lg r + \frac{1}{4} \bar{c}_2 r^2 + \frac{1}{4} \bar{c}_1 r^2 (\lg r - 1) - \int \frac{dr}{r} \int r \, dr \int \frac{dr}{r} \int p r \, dr \right].$$

Hierbei bedeuten  $\bar{c}_3$  und  $\bar{c}_4$  die weiteren Integrationskonstanten. Nach der letzten Beziehung (33) muss also der Gleichung (14) die folgende Funktion

$$(34) \quad w_\sigma = c_1 + c_2 r^2 + c_3 \lg \frac{r}{a} + c_4 r^2 \lg \frac{r}{a} + w_{\sigma 0}$$

genügen, wobei mit  $c_1$  bis  $c_4$  die neuen Integrationskonstanten bezeichnet sind,  $a$  bedeutet eine beliebige konstante Länge (z. B. den grössten Halbmesser der Platte) und  $w_{\sigma 0}$  stellt ein partikuläres Integral

$$(35) \quad w_{\sigma 0} = \frac{1}{K} \int \frac{dr}{r} \int r \, dr \int \frac{dr}{r} \int p r \, dr$$

der vollständigen Plattengleichung (14) dar.

Nach Einsetzen der zugehörigen Ableitungen der Funktion (34) in die Formeln (6), (10) und (13) ergibt sich

$$(36) \quad \omega_r = 2c_2 r + \frac{c_3}{r} + c_4 r \left( 2 \lg \frac{r}{a} + 1 \right) + w'_{\sigma 0},$$

$$m_r = -K \left[ 2(1 + \mu) \left( c_2 + c_4 \lg \frac{r}{a} \right) - (1 - \mu) \frac{c_3}{r^2} + (3 + \mu) c_4 + w''_{\sigma 0} + \frac{\mu}{r} w'_{\sigma 0} \right],$$

$$m_\varphi = -K \left[ 2(1 + \mu) \left( c_2 + c_4 \lg \frac{r}{a} \right) + (1 - \mu) \frac{c_3}{r^2} + (1 + 3\mu) c_4 + \mu w''_{\sigma 0} + \frac{1}{r} w'_{\sigma 0} \right],$$

$$q_r = -K \left\{ 4 \frac{c_4}{r} + \left[ \frac{1}{r} (r w'_{\sigma 0})' \right] \right\}.$$

Gemäss der Gleichung (23) also gilt

$$(37) \quad w'_r = -\frac{h^2}{5(1 - \mu)} \left\{ 4 \frac{c_4}{r} + \left[ \frac{1}{r} (r w'_{\sigma 0})' \right] \right\}$$

und die Integration liefert für die Funktion  $w_r$

$$(38) \quad w_r = -\frac{h^2}{5(1 - \mu)} \left[ c_5 + 4c_4 \lg r + \frac{1}{r} (r w'_{\sigma 0})' \right],$$

wobei  $c_5$  eine weitere Integrationskonstante bedeutet. Da aus der Formel (35) folgt

$$(39) \quad w'_{\sigma 0} = \frac{1}{Kr} \int r \, dr \int \frac{dr}{r} \int pr \, dr, \quad \frac{1}{r} (r w'_{\sigma 0})' = \frac{1}{K} \int \frac{dr}{r} \int pr \, dr,$$

$$\left[ \frac{1}{r} (r w'_{\sigma 0})' \right]' = \frac{1}{Kr} \int pr \, dr, \quad \left[ \frac{1}{r} (r w'_{\sigma 0})' \right]'' = \frac{p}{K} - \frac{1}{Kr^2} \int pr \, dr,$$

man kann sich leicht davon überzeugen, dass die Funktion (38) der Grundgleichung (24) genügt. Für die resultierende Durchbiegung der schubweichen Kreisplatte können wir dann nach den Beziehungen (34) und (38) schreiben

$$(40) \quad w = c_0 + c_2 r^2 + c_3 \lg \frac{r}{a} + c_4 \left[ 1 - \frac{4h^2}{5(1 - \mu) r^2} \right] r^2 \lg \frac{r}{a} +$$

$$+ w_{\sigma 0} - \frac{h^2}{5(1 - \mu) r} (r w'_{\sigma 0})'.$$

Hierbei bedeutet  $c_0$  eine neue beliebige Konstante.

#### 4. KREISPLATTE UNTER GLEICHMÄSSIG VERTEILTER VOLLBELASTUNG

Für die Belastung  $p(r) = p = \text{konst.}$  liefert die Formel (35)

$$(41) \quad w_{\sigma 0} = \frac{pr^4}{64K}$$

und für die Ableitungen dieser Funktion gilt

$$(42) \quad w'_{\sigma 0} = \frac{pr^3}{16K}, \quad (rw'_{\sigma 0})' = \frac{pr^3}{4K},$$

$$w''_{\sigma 0} = \frac{3pr^2}{16K}, \quad \left[ \frac{1}{r} (rw'_{\sigma 0})' \right]' = \frac{pr}{2K}.$$

Da die Durchbiegung  $w$  nach (40) und die Schnittmomente  $m_r, m_\varphi$  nach (36) im Plattenmittelpunkt  $r = 0$  nicht unendlich gross werden können, haben wir  $c_3 = c_4 = 0$  zu setzen, so dass aus den Beziehungen (36), (40), (41) und (42) folgt

$$(43) \quad w = c_0 + c_2 r^2 + \frac{pr^4}{64K} \left[ 1 - \frac{16h^2}{5(1-\mu)r^2} \right],$$

$$\omega_r = 2c_2 r + \frac{pr^3}{16K},$$

$$m_r = -2K(1+\mu)c_2 - \frac{3+\mu}{16} pr^2, \quad m_\varphi = -2K(1+\mu)c_2 - \frac{1+3\mu}{16} pr^2,$$

$$q_r = -\frac{1}{2} pr.$$

##### 4.1 Frei drehbare Auflagerung am Rande $r = a$

Die Randbedingungen für eine frei drehbar gelagerte Kreisplatte lauten

$$(44) \quad w = 0, \quad m_r = 0 \quad \text{für} \quad r = a.$$

Aus den entsprechenden Beziehungen (43) ergibt sich somit für die Konstanten

$$(45) \quad c_0 = \frac{pa^4}{64K} \left[ \frac{5+\mu}{1+\mu} + \frac{16h^2}{5(1-\mu)a^2} \right], \quad c_2 = -\frac{3+\mu}{1+\mu} \frac{pa^2}{32K}$$

und die gesuchten Funktionen nehmen dann nach (43) und (45) die Form an:

$$(46) \quad w = \frac{p}{64K} \left[ \frac{5 + \mu}{1 + \mu} a^4 - 2 \frac{3 + \mu}{1 + \mu} a^2 r^2 + r^4 + \frac{16h^2}{5(1 - \mu)} (a^2 - r^2) \right],$$

$$\omega_r = - \frac{pr}{16K} \left( \frac{3 + \mu}{1 + \mu} a^2 - r^2 \right),$$

$$m_r = (3 + \mu) \frac{p}{16} (a^2 - r^2),$$

$$m_\varphi = \frac{p}{16} [(3 + \mu) a^2 - (1 + 3\mu) r^2],$$

$$q_r = - \frac{1}{2} pr.$$

Daraus ist ersichtlich, dass in diesem Fall der Unterschied von der klassischen Theorie nur durch das Zusatzglied der ersten Funktion (46) gegeben ist. Die grösste Durchbiegung entsteht allerdings im Mittelpunkt  $r = 0$

$$(47) \quad \max w = \frac{pa^4}{64K} \left[ \frac{5 + \mu}{1 + \mu} + \frac{16}{5(1 - \mu)} \left( \frac{h}{a} \right)^2 \right].$$

Es ist bemerkenswert, dass nach [9] das Zusatzglied des Ausdrucks (47) für  $\mu = 0$  mit der Näherungslösung des dreidimensionalen Problems genau übereinstimmt.

Für die Grösstwerte der resultierenden Normalspannungen ergibt sich aus (27) und (46)

$$(48) \quad \text{extr } \sigma_r = \pm \left( \frac{6}{h^2} m_r + \frac{1 + \mu}{1 - \mu} \frac{p}{10} \right),$$

$$\text{extr } \sigma_\varphi = \pm \left( \frac{6}{h^2} m_\varphi + \frac{1 + \mu}{1 - \mu} \frac{p}{10} \right).$$

#### 4.2 Volle Einspannung längs des Randes $r = a$

Die Konstanten  $c_0$  und  $c_2$  sind in diesem Fall aus den Randbedingungen

$$(49) \quad w = 0, \quad \omega_r = 0 \quad \text{für } r = a$$

zu ermitteln, woraus nach (43) folgt

$$(50) \quad c_0 = \frac{pa^4}{64K} \left[ 1 + \frac{16h^2}{5(1 - \mu) a^2} \right], \quad c_2 = - \frac{pa^2}{32K}.$$

Damit ergibt sich für die gesuchten Funktionen

$$(51) \quad w = \frac{p}{64K} (a^2 - r^2) \left[ (a^2 - r^2) + \frac{16h^2}{5(1 - \mu)} \right],$$

$$\omega_r = -\frac{pr}{16K} (a^2 - r^2), \quad m_r = \frac{p}{16} [(1 + \mu) a^2 - (3 + \mu) r^2],$$

$$m_\varphi = \frac{p}{16} [(1 + \mu) a^2 - (1 + 3\mu) r^2], \quad q_r = -\frac{1}{2} pr.$$

Von der klassischen Lösung unterscheidet sich wieder nur die erste Funktion (51). Die grösste Durchbiegung im Plattenmittelpunkt ist

$$(52) \quad \max w = \frac{pa^4}{64K} \left[ 1 + \frac{16}{5(1 - \mu)} \left( \frac{h}{a} \right)^2 \right].$$

Für  $\mu = 0$  ist gemäss (52) der numerische Wert des Koeffizienten des Zusatzgliedes  $16/5 = 3,2$ , während nach [9] die erste Reissnersche Approximation den Beiwert  $8/3 = 2,667$  und die Näherungslösung des dreidimensionalen Problems den Koeffizienten 4 liefern.<sup>1)</sup> Die Zusatzglieder der ersten Funktion (51) und des Ausdruckes (52) stimmen dabei mit jenen der ersten Funktion (46) und des Ausdruckes (47) überein. Die Form der Beziehungen (48) verbleibt freilich auch in diesem Lagerungsfall unverändert.

### 4.3 Elastische Einspannung am Rande $r = a$

Bezeichnen wir mit  $\pi$  den Koeffizienten der elastischen Nachgiebigkeit der Einspannung, dann nehmen die Lagerungsbedingungen folgende Form an

$$(53) \quad w = 0, \quad m_r = \pi \omega_r \quad \text{für} \quad r = a,$$

<sup>1)</sup> Im Mathematischen Institut ČSAV wurde die verschärfte Lösung von einigen numerischen Beispielen nach NADAI ([1] in [9]) und nach PROKOPOV ([4] in [9]) durchgeführt. Für  $\mu = 1/6$  und  $p = \text{konst.}$  lassen sich dann die folgenden Tabellen der Quotienten von maximalen verschärften Durchbiegungen zu jenen der klassischen Theorie zusammensetzen:

frei drehbare Auflagerung

$h/a$	Nádai	Hlaváček	Autor
0,1	1,006	1,007	1,009
0,2	1,031	1,030	1,035

volle Einspannung

$h/a$	Prokopov	Hlaváček	Autor
0,1	1,031	1,030	1,038
0,2	1,129	1,126	1,154

woraus unter Benützung der entsprechenden Funktionen (43) für die Konstanten folgt

$$(54) \quad c_0 = \frac{pa^4}{64K} \left[ \frac{K(5 + \mu) + \pi a}{K(1 + \mu) + \pi a} + \frac{16h^2}{5(1 - \mu)a^2} \right],$$

$$c_2 = - \frac{pa^2}{32K} \frac{K(3 + \mu) + \pi a}{K(1 + \mu) + \pi a}.$$

Damit ergibt sich

$$(55) \quad w = \frac{p}{64K} \left[ \frac{K(5 + \mu) + \pi a}{K(1 + \mu) + \pi a} a^4 + 2 \frac{K(3 + \mu) + \pi a}{K(1 + \mu) + \pi a} a^2 r^2 + r^4 + \right. \\ \left. + \frac{16h^2}{5(1 - \mu)} (a^2 - r^2) \right],$$

$$\omega_r = - \frac{pr}{16K} \left[ \frac{K(3 + \mu) + \pi a}{K(1 + \mu) + \pi a} a^2 - r^2 \right],$$

$$m_r = \frac{p}{16} \left[ (1 + \mu) \frac{K(3 + \mu) + \pi a}{K(1 + \mu) + \pi a} a^2 - (3 + \mu) r^2 \right],$$

$$m_\varphi = \frac{p}{16} \left[ (1 + \mu) \frac{K(3 + \mu) + \pi a}{K(1 + \mu) + \pi a} a^2 - (1 + 3\mu) r^2 \right],$$

$$q_r = - \frac{1}{2} pr.$$

Für die grösste Durchbiegung also gilt

$$(56) \quad \max w = \frac{pa^4}{64K} \left[ \frac{K(5 + \mu) + \pi a}{K(1 + \mu) + \pi a} + \frac{16}{5(1 - \mu)} \left( \frac{h}{a} \right)^2 \right]$$

und für den elastisch eingespannten Rand  $r = a$  erhalten wir aus (55)

$$(57) \quad \omega_r = - \frac{pa^3}{16} \frac{1}{K(1 + \mu) + \pi a},$$

$$m_r = - \frac{pa^2}{8} \frac{\pi a}{K(1 + \mu) + \pi a},$$

$$m_\varphi = \frac{pa^2}{8} \frac{K(1 - \mu^2) - \mu\pi a}{K(1 + \mu) + \pi a},$$

$$q_r = - \frac{1}{2} pa.$$

Man kann sehen, dass der Grenzübergang  $\pi \rightarrow 0$  der frei drehbaren Auflagerung und  $\pi \rightarrow \infty$  der vollkommenen Einspannung entspricht. Die Beziehungen (54) bis (57)

nehmen dann für  $\pi \rightarrow 0$  die Form der entsprechenden Formeln (45) bis (47) und für  $\pi \rightarrow \infty$  die Form der Gleichungen (50) bis (52) an.

Aus der Tatsache, dass die nur in den Funktionen der Durchbiegung vorkommenden Zusatzglieder nach (46), (51) und (55) denselben Wert besitzen, folgt, dass die Belastung durch gleichmässig verteilte Randmomente keinen Einfluss auf die Schubverformung der Kreisplatte ausweist.

## 5. GLEICHMÄSSIG VERTEILTE BELASTUNG INNERHALB EINER KREISFLÄCHE MIT DEM HALBMESSE R $b$

Wir betrachten eine Kreisplatte, die am Rande  $r = a$  frei drehbar gelagert ist, unter der Belastung  $p = \text{konst.}$  innerhalb einer Kreisfläche mit dem Halbmesser  $b$  ( $0 < b < a$ ). Die gesuchten Funktionen werden dann für  $r \leq b$  durch die Formeln (43) definiert, während der homogenen Plattengleichung für  $b \leq r \leq a$  nach den Formeln (36) und (40) die folgenden Funktionen entsprechen

$$(58) \quad \bar{w} = \bar{c}_0 + \bar{c}_2 r^2 + \bar{c}_3 \lg \frac{r}{a} + \bar{c}_4 \left[ 1 - \frac{4h^2}{5(1-\mu)r^2} \right] r^2 \lg \frac{r}{a},$$

$$\bar{\omega}_r = 2\bar{c}_2 r + \frac{\bar{c}_3}{r} + \bar{c}_4 r \left( 2 \lg \frac{r}{a} + 1 \right),$$

$$\bar{m}_r = -K \left[ 2(1+\mu) \left( \bar{c}_2 + \bar{c}_4 \lg \frac{r}{a} \right) - (1-\mu) \frac{\bar{c}_3}{r^2} + (3+\mu) \bar{c}_4 \right],$$

$$\bar{m}_\varphi = -K \left[ 2(1+\mu) \left( \bar{c}_2 + \bar{c}_4 \lg \frac{r}{a} \right) + (1-\mu) \frac{\bar{c}_3}{r^2} + (1+3\mu) \bar{c}_4 \right],$$

$$\bar{q}_r = -4K \frac{\bar{c}_4}{r}.$$

Die Randbedingungen des gestellten Problems lauten

$$(59) \quad \bar{w} = 0, \quad \bar{m}_r = 0 \quad \text{für} \quad r = a,$$

$$\bar{w} = w, \quad \bar{\omega}_r = \omega_r, \quad \bar{m}_r = m_r, \quad \bar{q}_r = q_r \quad \text{für} \quad r = b.$$

Daraus folgt ein Gleichungssystem für die sechs unbekanntenen Integrationskonstanten

$$(60) \quad \bar{c}_0 + \bar{c}_2 a^2 = 0,$$

$$2(1+\mu) \bar{c}_2 - (1-\mu) \frac{\bar{c}_3}{a^2} + (3+\mu) \bar{c}_4 = 0,$$

$$\bar{c}_0 + \bar{c}_2 b^2 + \bar{c}_3 \lg \frac{b}{a} + \bar{c}_4 \left[ 1 - \frac{4h^2}{5(1-\mu)b^2} \right] b^2 \lg \frac{b}{a} =$$

$$\begin{aligned}
&= c_0 + c_2 b^2 + \frac{pb^4}{64K} \left[ 1 - \frac{16h^2}{5(1-\mu)b^2} \right], \\
2\bar{c}_2 b + \frac{\bar{c}_3}{b} + \bar{c}_4 b \left( 2 \lg \frac{b}{a} + 1 \right) &= 2c_2 b + \frac{pb^3}{16K}, \\
-K \left[ 2(1+\mu) \left( \bar{c}_2 + \bar{c}_4 \lg \frac{b}{a} \right) - (1-\mu) \frac{\bar{c}_3}{b^2} + (3+\mu) \bar{c}_4 \right] &= \\
&= -2K(1+\mu)c_2 - \frac{3+\mu}{16} pb^2, \\
-4K \frac{\bar{c}_4}{b} &= -\frac{1}{2} pb,
\end{aligned}$$

dessen Ausrechnung ergibt

$$\begin{aligned}
(61) \quad \bar{c}_0 &= \frac{pb^2}{32(1+\mu)K} [2(3+\mu)a^2 - (1-\mu)b^2], \quad \bar{c}_3 = \frac{pb^4}{16K}, \\
\bar{c}_2 &= -\frac{pb^2}{32(1+\mu)K} \left[ 2(3+\mu) - (1-\mu) \frac{b^2}{a^2} \right], \quad \bar{c}_4 = \frac{pb^2}{8K}, \\
c_0 &= \frac{pb^2}{64(1+\mu)K} \left[ 4(3+\mu)a^2 - (7+3\mu)b^2 - 4(1+\mu)b^2 \lg \frac{a}{b} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{16(1+\mu)}{5(1-\mu)} h^2 \left( 1 + 2 \lg \frac{a}{b} \right) \right], \\
c_2 &= -\frac{pb^2}{32(1+\mu)K} \left[ 4 - (1-\mu) \frac{b^2}{a^2} + 4(1+\mu) \lg \frac{a}{b} \right].
\end{aligned}$$

Führen wir diese Ergebnisse in die Formeln (53) ein, so entsteht für  $0 \leq r \leq b$

$$\begin{aligned}
(62) \quad w &= \frac{p}{64K} \left\{ b^2 \frac{4(3+\mu)a^2 - (7+3\mu)b^2}{1+\mu} - 4b^4 \lg \frac{a}{b} - \right. \\
&\quad \left. - 2b^2 \left[ \frac{4a^2 - (1-\mu)b^2}{(1+\mu)a^2} + 4 \lg \frac{a}{b} \right] r^2 + r^4 + \frac{16h^2}{5(1-\mu)} \left[ b^2 \left( 1 + 2 \lg \frac{a}{b} \right) - r^2 \right] \right\}, \\
\omega_r &= -\frac{pr}{16K} \left[ b^2 \frac{4a^2 - (1-\mu)b^2}{(1+\mu)a^2} + 4b^2 \lg \frac{a}{b} - r^2 \right], \\
m_r &= \frac{p}{16} \left[ 4b^2 - (1-\mu) \frac{b^4}{a^2} + 4(1+\mu)b^2 \lg \frac{a}{b} - (3+\mu)r^2 \right], \\
m_\varphi &= \frac{p}{16} \left[ 4b^2 - (1-\mu) \frac{b^4}{a^2} + 4(1+\mu)b^2 \lg \frac{a}{b} - (1+3\mu)r^2 \right], \\
q_r &= -\frac{1}{2} pr
\end{aligned}$$

und für  $b \leq r \leq a$  ergeben die Beziehungen (58)

$$(63) \quad \bar{w} = \frac{pb^2}{32K} \left\{ \frac{2(3 + \mu)a^2 - (1 - \mu)b^2}{(1 + \mu)a^2} (a^2 - r^2) + 2b^2 \lg \frac{r}{a} + \right. \\ \left. + 4 \left[ 1 - \frac{4h^2}{5(1 - \mu)r^2} \right] r^2 \lg \frac{r}{a} \right\}, \\ \bar{\omega}_r = - \frac{pb^2}{16K} \left[ \frac{4a^2 - (1 - \mu)b^2}{(1 + \mu)a^2} r - \frac{b^2}{r} + 4r \lg \frac{a}{r} \right], \\ \bar{m}_r = \frac{pb^2}{16} \left[ (1 - \mu) \frac{b^2}{a^2 r^2} (a^2 - r^2) + 4(1 + \mu) \lg \frac{a}{r} \right], \\ \bar{m}_\varphi = \frac{pb^2}{16} \left[ 4(1 - \mu) - (1 - \mu) \frac{b^2}{a^2 r^2} (a^2 + r^2) + 4(1 + \mu) \lg \frac{a}{r} \right], \\ \bar{q}_r = - \frac{pb^2}{2r}.$$

Es ist leicht einzusehen, dass der Einfluss von Querschubverzerrungen sich wieder nur in den Funktionen der Plattendurchbiegung erweist, während alle anderen Funktionen (62) und (63) mit der klassischen Theorie übereinstimmen. Für die grösste Durchbiegung im Plattenmittelpunkt  $r = 0$  gibt die erste Gleichung (62)

$$(64) \quad \max w = \frac{pb^2}{64K} \left[ \frac{4(3 + \mu)a^2 - (7 + 3\mu)b^2}{1 + \mu} - 4b^2 \lg \frac{a}{b} + \right. \\ \left. + \frac{16h^2}{5(1 - \mu)} \left( 1 + 2 \lg \frac{a}{b} \right) \right].$$

Die hier entwickelten Formeln können auch für sogenannten Einzellastangriff im Mittelpunkt benutzt werden, wobei die Gesamtlast  $P$  der Platte die Grösse

$$(65) \quad P = p\pi b^2$$

besitzt. Geht man in den Gleichungen (63) nach Einführung  $pb^2 = P/\pi$  mit dem Halbmesser  $b$  gegen Null, so werden in  $r = 0$  die Momente, die Querkraft und auch die Durchbiegung rechnermässig unendlich gross. In Wirklichkeit gibt es aber gar keine Punktlasten. Alle angreifenden Kräfte sollen als flächenhaft verteilte betrachtet werden, d.h. für den Halbmesser  $b$  muss man eine gewisse von Null verschiedene Länge (sogennante Halblänge der Lastverteilung) einführen. Die zusätzlichen Normalspannungen unter der Einzellast werden dann nach (26) durch die Formel

$$(66) \quad \sigma_{r\tau} = \sigma_{\varphi\tau} = \frac{1 + \mu}{1 - \mu} \frac{P}{2\pi b^2} \frac{z}{h} \left[ \left( \frac{2z}{h} \right)^2 - \frac{3}{5} \right]$$

definiert.

## 6. KREISRINGPLATTE UNTER GLEICHMÄSSIG VERTEILTER VOLLBELASTUNG

Die Kreisringplatte kann entweder nur am äusseren oder nur am inneren Rande oder auch an beiden Rändern gestützt werden. Die Abb. 2a–h zeigen verschiedene Lagerungsmöglichkeiten. An jedem Plattenrande sind also in diesem Fall zwei Randbedingungen zu erfüllen. Mit der neuen dimensionslosen Variablen

$$(67) \quad \varrho = r/a$$

nehmen die Beziehungen (36) und (40) unter Benützung der Formeln (41) und (42) für gleichmässig verteilte Vollbelastung die folgende Form an

$$(68) \quad w = c_0 + c_2 \varrho^2 + c_3 \lg \varrho + c_4 \left[ 1 - \frac{4h^2}{5(1-\mu)a^2\varrho^2} \right] \varrho^2 \lg \varrho + \frac{pa^4\varrho^4}{64K} \left[ 1 - \frac{16h^2}{5(1-\mu)a^2\varrho^2} \right],$$

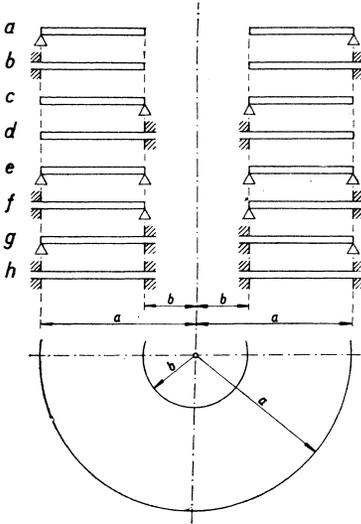


Abb. 2. Verschiedene Lagerungsmöglichkeiten einer Kreisringplatte.

$$a\omega_r = 2c_2\varrho + \frac{c_3}{\varrho} + c_4\varrho(2 \lg \varrho + 1) + \frac{pa^4\varrho^3}{16K},$$

$$m_r = -\frac{K}{a^2} \left[ 2(1+\mu)(c_2 + c_4 \lg \varrho) - (1-\mu) \frac{c_3}{\varrho^2} + (3+\mu)c_4 \right] - \frac{3+\mu}{16} pa^2\varrho^2,$$

$$m_\varphi = -\frac{K}{a^2} \left[ 2(1+\mu)(c_2 + c_4 \lg \varrho) + (1-\mu) \frac{c_3}{\varrho^2} + (1+3\mu)c_4 \right] - \frac{1+3\mu}{16} pa^2\varrho^2,$$

$$q_r = -\frac{4K}{a^3} \frac{c_4}{\varrho} - \frac{1}{2} pa\varrho.$$

### 6.1 Frei drehbare Auflagerung am äusseren Rande $r = a$

Die Randbedingungen für den Lagerungsfall Abb. 2a lauten

$$(69) \quad \begin{aligned} w &= 0, \quad m_r = 0 \quad \text{für } \varrho = 1, \\ m_r &= 0, \quad q_r = 0 \quad \text{für } \varrho = b/a = \beta. \end{aligned}$$

Hieraus folgt für die Integrationskonstanten

$$(70) \quad c_0 = \frac{pa^4}{64K} \left[ 2 \frac{3 + \mu}{1 + \mu} (1 - \beta^2) - 8 \frac{\beta^4 \lg \beta}{1 - \beta^2} - 1 + \frac{16h^2}{5(1 - \mu) a^2} \right],$$

$$c_2 = - \frac{pa^4}{32(1 + \mu) K} \left[ (3 + \mu)(1 - \beta^2) - 4(1 + \mu) \frac{\beta^4 \lg \beta}{1 - \beta^2} \right],$$

$$c_3 = - \frac{pa^4 \beta^2}{16(1 - \mu) K} \left[ 3 + \mu - 4(1 + \mu) \frac{\beta^2 \lg \beta}{1 - \beta^2} \right], \quad c_4 = - \frac{pa^4 \beta^2}{8K}.$$

Mit diesen Ergebnissen erhält man aus (68) die gesuchten Funktionen

$$(71) \quad w = \frac{pa^4}{64K} \left\{ \frac{2}{1 + \mu} \left[ (3 + \mu)(1 - \beta^2) - 4(1 + \mu) \frac{\beta^4 \lg \beta}{1 - \beta^2} \right] (1 - \varrho^2) - 1 + \right.$$

$$\left. + \varrho^4 - 4\beta^2 \left( \frac{3 + \mu}{1 - \mu} - 4 \frac{1 + \mu}{1 - \mu} \frac{\beta^2 \lg \beta}{1 - \beta^2} + 2\varrho^2 \right) \lg \varrho + \right.$$

$$\left. + \frac{16h^2}{5(1 - \mu) a^2} (1 - \varrho^2 + 2 \lg \varrho) \right\},$$

$$\omega_r = - \frac{pa^3 \varrho}{16K} \left[ \frac{3 + \mu}{1 + \mu} (1 - \beta^2) - 4 \frac{\beta^4 \lg \beta}{1 - \beta^2} + \right.$$

$$\left. + \left( \frac{3 + \mu}{1 - \mu} - 4 \frac{1 + \mu}{1 - \mu} \frac{\beta^2 \lg \beta}{1 - \beta^2} \right) \frac{\beta^2}{\varrho^2} + 2\beta^2 (2 \lg \varrho + 1) + \varrho^2 \right],$$

$$m_r = \frac{pa^2}{16} \left[ (3 + \mu) \left( 1 - \frac{\beta^2}{\varrho^2} \right) (1 - \varrho^2) + \right.$$

$$\left. + 4(1 + \mu) \beta^2 \left( \frac{\beta^2 \lg \beta}{1 - \beta^2} \frac{1 - \varrho^2}{\varrho^2} - \lg \varrho \right) \right],$$

$$m_\varphi = \frac{pa^2}{16} \left[ (1 + 3\mu) (2\beta^2 - \varrho^2) + (3 + \mu) \left( 1 - \beta^2 + \frac{\beta^2}{\varrho^2} \right) - \right.$$

$$\left. - 4(1 + \mu) \beta^2 \left( \frac{\beta^2 \lg \beta}{1 - \beta^2} \frac{1 + \varrho^2}{\varrho^2} + \lg \varrho \right) \right],$$

$$q_r = \frac{1}{2} pa \left( \frac{\beta^2}{\varrho} - \varrho \right).$$

Im untersuchten Fall werden also durch die Querschubverzerrungen wieder nur die Plattendurchbiegungen beeinflusst.

## 6.2 Frei drehbare Auflagerung an beiden Rändern

Wir betrachten jetzt eine an beiden Rändern  $r = a$  und  $r = b$  frei drehbar gelagerte Kreisringplatte nach Abb. 2c. Diesem Lagerungsfall entsprechen die Randbedingungen

$$(72) \quad w = 0, \quad m_r = 0 \quad \text{für} \quad \varrho = 1 \quad \text{und} \quad \varrho = \beta.$$

Unter Benützung der Bezeichnung

$$(73) \quad \varepsilon = \frac{4}{5(1-\mu)} \left( \frac{h}{a} \right)^2$$

ergeben sich aus den Gleichungen (68) und (72) die Integrationskonstanten

$$(74) \quad c_0 = \frac{pa^4}{64KD_1} \{ (1-\mu)(3+\mu)\beta^2(1-\beta^2)^2 + 2[(1-\mu)(5+\mu)(1+\beta^2) + 2(3+\mu)^2](1-\beta^2)\beta^2 \lg \beta + 4(1+\mu)(5+\mu)\beta^2 \lg^2 \beta - 2\varepsilon(1-\mu)[(5+\mu) + 2(1-\mu)\beta^2 + 4\varepsilon(1+\mu)](1-\beta^2) \lg \beta + 16\varepsilon(1+\mu)^2 \beta^2 \lg^2 \beta \},$$

$$c_2 = -\frac{pa^4}{64KD_1} \{ (1-\mu)(3+\mu)(1-\beta^2)^2(1+\beta^2) + 2[(1-\mu)(5+\mu)(1+\beta^2) + 2(3+\mu)^2](1-\beta^2)\beta^2 \lg \beta + 8(1+\mu)(3+\mu)\beta^2 \lg^2 \beta - 4\varepsilon(1-\mu)(1-\beta^2)[(1-\mu)\beta^2 \lg \beta + (3+\mu)(1-\beta^2 + \lg \beta)] \},$$

$$c_3 = -\frac{pa^4}{16KD_1} \beta^2(1-\beta^2)[(3+\mu)^2(1-\beta^2) + (1+\mu)(5+\mu)(1+\beta^2) \lg \beta - 2\varepsilon(1-\mu^2) \lg \beta],$$

$$c_4 = -\frac{pa^4}{32KD_1} (1-\beta^2)[(1-\mu)(5+\mu)(1-\beta^4) - 4(1+\mu)(3+\mu)\beta^2 \lg \beta + 4\varepsilon(1-\mu^2)(1-\beta^2)],$$

$$D_1 = (1-\mu)(3+\mu)(1-\beta^2)^2 + 4(1+\mu)^2 \beta^2 \lg^2 \beta - 2\varepsilon(1-\mu^2)(1-\beta^2) \lg \beta.$$

Aus diesen Formeln ist es leicht einzusehen, dass für eine an beiden Rändern gelagerte Kreisringplatte die Querschubverzerrungen nicht nur die Durchbiegungen sondern auch den Verlauf von inneren Kräften beeinflussen. Für die Normalenverdreh-

hungen  $\omega_{rap}$  und  $\omega_{rbp}$  an beiden Plattenrändern folgt nach Einsetzen der zugehörigen Konstanten (74) in die zweite Formel (68)

$$(75) \quad \omega_{rap} = -\frac{pa^3}{16KD_1} \{ (1 - \beta^2)^2 [(1 - \mu) + (13 + 3\mu)\beta^2] + \\ + 2[(11 + 3\mu) + (5 + \mu)\beta^2](1 - \beta^2)\beta^2 \lg \beta + 8(1 + \mu)\beta^2 \lg^2 \beta - \\ - 4\varepsilon(1 - \mu)(1 - \beta^2)[(1 - \beta^2) + (1 + \beta^2) \lg \beta] \}, \\ \omega_{rbp} = -\frac{pa^3\beta}{16KD_1} \{ (1 - \beta^2)^2 [(13 + 3\mu) + (1 - \mu)\beta^2] + \\ + 2[(5 + \mu) + (11 + 3\mu)\beta^2](1 - \beta^2) \lg \beta + 8(1 + \mu)\beta^4 \lg^2 \beta - \\ - 4\varepsilon(1 - \mu)(1 - \beta^2)[(1 - \beta^2) + (1 + \beta^2) \lg \beta] \}.$$

### 6.3 Volle Einspannung an beiden Rändern

Wir wollen noch den Einfluss der vollen Einspannung an beiden Plattenrändern untersuchen. Dem Lagerungsfall Abb. 2h entsprechen die Randbedingungen

$$(76) \quad w = 0, \quad \omega_r = 0 \quad \text{für} \quad \varrho = 1 \quad \text{und} \quad \varrho = \beta,$$

woraus für die Integrationskonstanten folgt

$$(77) \quad c_0 = \frac{pa^4}{64KD_2} \{ \beta^2(1 - \beta^2)^2 (1 - 2 \lg \beta) - 4\beta^2 \lg^2 \beta - \\ - 2\varepsilon[(1 - \beta^2)(1 - 2\beta^2) + 8\beta^2 \lg \beta + 4\varepsilon(1 - \beta^2)] \lg \beta \}, \\ c_2 = -\frac{pa^4}{64KD_2} [(1 - \beta^2)^2 (1 + \beta^2 - 2\beta^2 \lg \beta) - 8\beta^2 \lg^2 \beta - \\ - 4\varepsilon(1 - \beta^2)^2 (1 + \lg \beta)], \\ c_3 = \frac{pa^4}{16KD_2} \beta^2(1 - \beta^2) [(1 - \beta^2) + (1 + \beta^2) \lg \beta + 2\varepsilon \lg \beta], \\ c_4 = -\frac{pa^4}{32KD_2} (1 - \beta^2) [(1 - \beta^4) + 4\beta^2 \lg \beta + 4\varepsilon(1 - \beta^2)], \\ D_2 = (1 - \beta^2)^2 - 4\beta^2 \lg^2 \beta - 2\varepsilon(1 - \beta^2) \lg \beta.$$

Man kann sehen, dass auch der Spannungszustand der untersuchten Platte nebst

ihrer Verformung wieder durch die betrachteten Querschubverzerrungen beeinflusst wird.

Für die Einspannmomente  $m_{rap}$  und  $m_{rbp}$  ergibt sich dann aus der zugehörigen Formel (68)

$$(78) \quad m_{rap} = -\frac{pa^2}{16D_2} \{ (1 - \beta^2)^2 (1 - 3\beta^2) - 2\beta^2(1 - \beta^2)(3 + \beta^2) \lg \beta - \\ - 8\beta^2 \lg^2 \beta - 4\varepsilon(1 - \beta^2) [(1 - \beta^2) + (1 + \beta^2) \lg \beta] \}, \\ m_{rbp} = \frac{pa^2}{16D_2} \{ (1 - \beta^2)^2 (3 - \beta^2) + 2(1 - \beta^2)(1 + 3\beta^2) \lg \beta + \\ + 8\beta^4 \lg^2 \beta + 4\varepsilon(1 - \beta^2) [(1 - \beta^2) + (1 + \beta^2) \lg \beta] \}.$$

#### 7. AN BEIDEN RÄNDERN FREI DREHBAR GELAGERTE KREISRINGPLATTE UNTER DEM ANGRIFF VON RANDMOMENTEN

Dem Lagerungsfall Abb. 2e entsprechen bei der Belastung durch die gegebenen Randmomente  $m_{ra}$  und  $m_{rb}$  die Randbedingungen

$$(79) \quad w = 0, \quad m_r = m_{ra} \quad \text{für} \quad \varrho = 1, \\ w = 0, \quad m_r = m_{rb} \quad \text{für} \quad \varrho = \beta.$$

Benutzen wir wieder die Bezeichnung (73), so folgt aus den Gleichungen (79) und (68) für  $p = 0$

$$(80) \quad c_0 = -c_2 = \frac{m_{ra}a^2}{KD_1} [4\beta^2 + 2(1 + \mu)\beta^2 \lg \beta - \varepsilon(1 - \mu)] \lg \beta - \\ - \frac{m_{rb}a^2\beta^2}{KD_1} [(3 + \mu) + (1 - \mu)(\beta^2 - \varepsilon)] \lg \beta, \\ c_3 = -\frac{m_{ra}a^2\beta^2}{KD_1} [(3 + \mu)(1 - \beta^2) + 2(1 + \mu)(1 - \varepsilon) \lg \beta] + \\ + \frac{m_{rb}a^2\beta^2}{KD_1} [(3 + \mu)(1 - \beta^2) + 2(1 + \mu)(\beta^2 - \varepsilon) \lg \beta], \\ c_4 = -\frac{m_{ra}a^2}{KD_1} [(1 - \mu)(1 - \beta^2) - 2(1 + \mu)\beta^2 \lg \beta] + \\ + \frac{m_{rb}a^2\beta^2}{KD_1} [(1 - \mu)(1 - \beta^2) - 2(1 + \mu) \lg \beta],$$

wobei die Konstante  $D_1$  durch die letzte Formel (74) definiert wird. Mit diesen Ergebnissen entsteht für die Plattendurchbiegung

$$(81) \quad w = -\frac{m_{ra}a^2}{KD_1} \left\{ 2(1 + \mu)(1 - \varrho^2) \beta^2 \lg \beta \cdot \lg \frac{\varrho}{\beta} + [(3 + \mu) \beta^2 + (1 - \mu)(\varrho^2 - \varepsilon)] (1 - \beta^2) \lg \varrho - [(3 + \mu) \beta^2 + (1 - \mu)(\beta^2 - \varepsilon)] \cdot (1 - \varrho^2) \lg \beta \right\} - \frac{m_{rb}a^2\beta^2}{KD_1} \left\{ 2(1 + \mu)(\varrho^2 - \beta^2) \lg \beta \cdot \lg \varrho - [(3 + \mu) + (1 - \mu)(\varrho^2 - \varepsilon)] (1 - \beta^2) \lg \varrho + [(3 + \mu) + (1 - \mu)(\beta^2 - \varepsilon)] (1 - \varrho^2) \lg \beta \right\}$$

und für die Funktion des Momentes  $m_r$  gilt

$$(82) \quad m_r = \frac{m_{ra}}{D_1} \left\{ (1 - \mu)(3 + \mu)(1 - \beta^2) \left( 1 - \frac{\beta^2}{\varrho^2} \right) + 4(1 + \mu)^2 \beta^2 \lg \beta \cdot \lg \frac{\beta}{\varrho} - 2(1 - \mu^2) \left[ (1 - \varepsilon) \frac{\beta^2}{\varrho^2} \lg \beta - (\beta^2 - \varepsilon) \lg \beta - (1 - \beta^2) \lg \varrho \right] \right\} + \frac{m_{rb}\beta^2}{D_1} \left\{ (1 - \mu)(3 + \mu)(1 - \beta^2) \left( \frac{1}{\varrho^2} - 1 \right) + 4(1 + \mu)^2 \lg \beta \cdot \lg \varrho - 2(1 - \mu^2) \left[ (1 - \beta^2) \lg \varrho - (\beta^2 - \varepsilon) \frac{1 - \varrho^2}{\varrho^2} \lg \beta \right] \right\}.$$

Die Randmomente  $m_{ra}$  und  $m_{rb}$  rufen allerdings an den Plattenrändern  $r = a$  und  $r = b$  gewisse Normalenverdrehungen  $\omega_{ram}$  und  $\omega_{rbm}$  hervor, die sich aus den Gleichungen (80) und aus der zweiten Formel (68) ergeben

$$(83) \quad \omega_{ram} = -\frac{m_{ra}a}{KD_1} \left\{ (1 - \beta^2) [(3 + \mu) \beta^2 + (1 - \mu)] + 8\beta^2 \lg \beta + 4(1 + \mu) \beta^2 \lg^2 \beta - 2\varepsilon [(1 - \mu) + (1 + \mu) \beta^2] \lg \beta \right\} + \frac{4m_{rb}a\beta^2}{KD_1} [(1 - \beta^2) + (1 + \beta^2) \lg \beta - \varepsilon \lg \beta],$$

$$\omega_{rbm} = -\frac{4m_{ra}a\beta}{KD_1} [(1 - \beta^2) + (1 + \beta^2) \lg \beta - \varepsilon \lg \beta] + \frac{m_{rb}a\beta}{KD_1} \left\{ (1 - \beta^2) [(3 + \mu) + (1 - \mu) \beta^2] + 8\beta^2 \lg \beta - 4(1 + \mu) \beta^2 \lg^2 \beta - 2\varepsilon [(1 - \mu) \beta^2 + (1 + \mu)] \lg \beta \right\}.$$

Bezeichnen wir mit  $\omega_{rmb}$  ( $\omega_{rbma}$ ) die am Plattenrande  $r = a$  ( $r = b$ ) durch das Randmoment  $m_{rb}$  ( $m_{ra}$ ) hervorgerufene Normalenverdrehung, so nimmt der Bettische Reziprozitätssatz offenbar die Form

$$(84) \quad m_{ra}\omega_{rmb} + m_{rb}\omega_{rbma}\beta = 0$$

an. Es ist leicht einzusehen, dass die Ausdrücke (83) der Bedingung (84) genügen.

Die Beziehungen (75) und (83) können auch auf die Ermittlung von Einspannmomenten  $m_{rap}$  und  $m_{rbp}$  einer an beiden Rändern vollkommen eingespannten Kreisringplatte angewandt werden, die sich unter gleichmässig verteilter Vollbelastung befindet. Man kann sich davon überzeugen, dass aus den Bedingungen

$$(85) \quad \omega_{rap} + \omega_{ram} = 0, \quad \omega_{rbp} + \omega_{rbm} = 0$$

wieder die Formeln (78) folgen. Diese Tatsache kann als eine Kontrolle der Richtigkeit der Beziehungen (74), (75), (77), (78), (80) und (83) angesehen werden.

Der Einfluss von Querschubverzerrungen wird allerdings in den Gleichungen (80) bis (83) durch die Glieder mit dem Beiwerte  $\varepsilon$  ausgedrückt. Aus diesen Gleichungen also folgt, dass der Spannungszustand einer an beiden Rändern beliebig gelagerten Kreisringplatte durch die Querschubverzerrungen immer beeinflusst wird. Geht man mit der Plattenstärke  $h$  gegen Null, so werden alle Glieder mit dem Beiwerte  $\varepsilon$  Null, so dass nur die klassische Lösung verbleibt.

#### *Literaturverzeichnis*

- [1] *V. Panc*: Statika tenkostěnných prutů a konstrukcí, Praha 1959.
- [2] *E. Reissner*: On Bending of Elastic Plates, Quart. Appl. Math. 5, 1947.
- [3] *H. Hencky*: Über die Berücksichtigung der Schubverzerrung in ebenen Platten, Ing. Arch. 16, 1947.
- [4] *M. Schäfer*: Über eine Verfeinerung der klassischen Theorie dünner schwach gebogener Platten, Z. angew. Math. Mech. 32, 1952.
- [5] *A. Kromm*: Verallgemeinerte Theorie der Plattenstatik, Ing. Arch. 21, 1953.
- [6] *A. Kromm*: Über die Randquerkräfte bei gestützten Platten, Z. angew. Math. Mech. 35, 1955.
- [7] *K. O. Friedrichs*: The Edge Effect in the Bending of Plates, Reissner Anniv. Vol., 1949.
- [8] *K. Girkmann*: Flächentragwerke, Wien 1959.
- [9] *I. Hlaváček*: Řešení ohybu kruhové desky metodou Reissnerovských algoritmů I. druhu, Aplikace matematiky sv. 9, čís. 3, 1964.

## Souhrn

# ROTAČNĚ SOUMĚRNÉ STAVY NAPJATOSTI KRUHOVÉ DESKY PODDAJNÉ VE SMYKU

VLADIMÍR PANC

V předložené práci se vyšetřuje užitím zobecněné iterační metody vliv smykových deformací na přetvoření a napjatost pružných kruhových, plných nebo prstencových desek při předpokladu malých průhybů. Je ukázáno, že vzhledem k nulovým kroutícím momentům při rotačně souměrném zatížení je řešená úloha vyjádřena integračním problémem čtvrtého řádu podobně jako v teorii tenkostěnných prutů namáhaných kombinací ohybu a smyku. Funkce  $w(r)$  výsledného průhybu desky je definována součtem dvou funkcí  $w_o(r)$  a  $w_t(r)$ , pro něž jsou odvozeny základní diferenciální rovnice tvaru (14) a (24). Rovnice (14) souhlasí přitom přesně s klasickou teorií kruhových desek, takže uvedenou superposicí funkcí  $w_o$  a  $w_t$  je předložené řešení zpřesněno o vlivy zanedbané při užití Kirchhoffovy hypotézy. Lze dokázat, že při libovolném zatížení vede aplikovaná metoda k integračnímu problému šestého řádu, jímž je representována obecná zpřesněná teorie desek analogická teorii Reissnerově.

Při rotačně souměrném zatížení plné kruhové desky nevykazují vyšetřované smykové deformace vliv na průběh funkcí vnitřních sil a vypracovaná teorie podává v tomto případě jednak zpřesnění průhybu desky vyjádřené funkcí  $w_t$ , která zde může být stanovena nezávisle na funkci  $w_o$ , a jednak přídavná normální napětí definovaná vzorcí (26), probíhající po tloušťce desky podle zákona kubické paraboly. Při řešení kruhových prstencových desek podepřených na obou okrajích ovlivňují však smykové deformace kromě přetvoření též rozdělení ohybových momentů i posouvajících sil a nezávislé určení funkcí  $w_o$  a  $w_t$  není zde již proto možné.

## Резюме

# ОСЕСИММЕТРИЧНЫЕ НАПРЯЖЕННЫЕ СОСТОЯНИЯ КРУГЛОЙ ПЛАСТИНКИ, ПОДАТЛИВОЙ СДВИГУ

ВЛАДИМИР ПАНЦ (Vladimír Panc)

Используя обобщенный итерационный метод, рассматривает автор настоящей статьи влияние поперечных деформаций сдвига на напряженное и деформированное состояние упругих тонких круглых, полных или кольцевых пластинок при гипотезе малых прогибов. Оказывается, что, учитывая нулевые крутящие моменты при осесимметричной нагрузке, рассматриваемая задача

выражается проблемой интегрирования четвертого порядка аналогично, как и в теории тонкостенных стержней, работающих на совместное действие изгиба и сдвига. Функция  $w(r)$  окончательного прогиба пластинки определяется как сумма двух функций  $w_o(r)$  и  $w_z(r)$ , для которых выведены основные дифференциальные уравнения вида (14) и (24). Уравнение (14) совпадает приэтом точно с классической теорией, так что приведенной суперпозицией функций  $w_o$  и  $w_z$  предлагаемое решение уточняется рассмотрением влияний, которыми пренебрегается при использовании гипотезы Кирхгоффа. Можно доказать, что для пластинки, работающей в произвольных условиях, использованный метод ведет к проблеме интегрирования шестого порядка, к которой сводится общая уточненная теория пластинок, аналогичная теории Рейсснера.

При осесимметричной нагрузке полной круглой пластинки не оказывают рассматриваемые поперечные деформации сдвига никакого влияния на распределение внутренних усилий пластинки, и разработанная теория приносит для этого случая, с одной стороны, уточнение прогиба пластинки, которое выражается функцией  $w_z$ , независимой от функции  $w_o$ , и, с другой стороны, также дополнительные нормальные напряжения, определяемые по формулам (26). Эти напряжения распределяются по толщине пластинки по закону кубической параболы. При решении круглых кольцевых пластинок, опертых по краям, влияние поперечных деформаций сдвига проявляется, наоборот, также в распределении внутренних усилий, и поэтому независимое определение функций  $w_o$  и  $w_z$  здесь уже невозможно.

*Anschrift des Autoren:* Ing. Vladimír Panc C.Sc., ČSAV — ÚTAM, Vyšehradská 49, Praha 2 Nové Město.