

Aplikace matematiky

Alice Bártlová

O některých vlastnostech membránového napětí a jeho sdužených směrů

Aplikace matematiky, Vol. 11 (1966), No. 2, 133–146

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/103008>

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1966

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

O NĚKTERÝCH VLASTNOSTECH MEMBRÁNOVÉHO NAPĚTÍ
A JEHO SDRUŽENÝCH SMĚRŮ

ALICE BĀRTLOVÁ

(Došlo dne 10. června 1964.)

Protože řešení membránového napětí vychází ze soustavy parciálních diferenciálních rovnic, které v některých případech nejsou ani lineární, používá se v praxi vesměs metod numerických, většinou přibližných, a to zejména z hlediska geometrického; skořepinu obecného tvaru prakticky řešit nelze.

Omezíme se pouze na statickou část problému, která v obecném případě vede na parciální diferenciální rovnici druhého řádu. Avšak za určitých předpokladů, jak bude dále ukázáno, lze řešení rovnic rovnováhy převést na integraci totálního diferenciálu bez zjednodušujících předpokladů, které by omezily geometrickou obecnost řešení, a nalézt další, vesměs geometrické vlastnosti membránového napětí. Pro stručnost použijeme homogenních rovnic rovnováhy, tj. pro nulové povrchové zatížení.

POUŽITÉ OZNAČENÍ PRO GEOMETRICKÉ VELIČINY

$\alpha = 1, 2, \beta = 1, 2$	sčítací indexy
$i = 1, 2, j = 1, 2$	indexy souřadnic tenzorů
u^1, u^2	parametry plochy
$ds^2 = A^2(du^1)^2 + 2AB \cos \psi du^1 du^2 + B^2(du^2)^2$	
resp. $ds^2 = g_{\alpha\beta} du^\alpha du^\beta$	první základní forma plochy
$g = \sqrt{g_{11}g_{22} - (g_{12})^2}$	diskriminant první formy
$L(du^1)^2 + 2M du^1 du^2 + N(du^2)^2$ resp.	
$h_{\alpha\beta} du^\alpha du^\beta$	druhá základní forma plochy
$1/R_1, 1/R_2$	norm. křivosti souřadných čar
$r(u^1, u^2)$	průvodič bodů plochy
$r_1 = \partial_1 r = \frac{\partial r}{\partial u^1}, r_2 = \partial_2 r = \frac{\partial r}{\partial u^2}$	tečné vektory souřadných čar
$n = (r_1 \times r_2) \frac{1}{g}$	jednotkový vektor normály plochy
G_{ij}^k	Christoffelovy symboly 2. druhu

1. VNITŘNÍ SÍLY

Rovnice rovnováhy

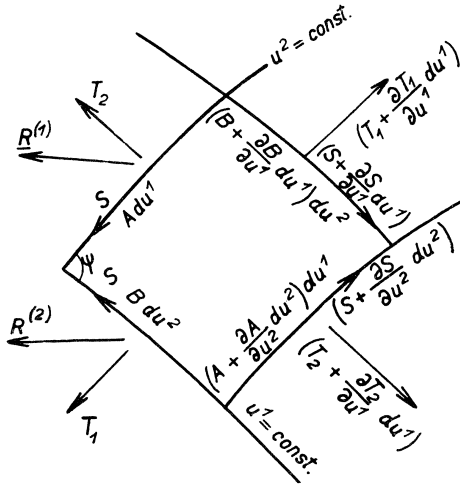
Budeme uvažovat skořepinu takových fyzikálních vlastností, které nás opravňují předpokládat, že je v každém bodě namáhána pouze silami, které leží v rovině běžné s tečnou rovinou její střednicové plochy; napětí podél tloušťky skořepiny je konstantní [1]. Střednicová plocha skořepiny, vyjádřená rovnicí

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u^1, u^2),$$

necht' má Gaussovu křivost všude od nuly různou – řešení rozvinutelných ploch lze provést jednoduše i jinými metodami.

Označíme \mathbf{R}^1 , resp. \mathbf{R}^2 výslednice vnitřních sil, které působí na jednotku délky normálového řezu, vedeného podél souřadnicové u^1 -křivky (tj. křivky $u^2 = \text{konst.}$), resp. u^2 -křivky (tj. křivky $u^1 = \text{konst.}$) – viz obr. 1.

Z rovnováhy elementu plochy, vymezeného řezu podél čar (c_1, c_2 konstanty)



Obr. 1. Element membrány, oddělený souřadnými normálovými řezu.

$$\begin{aligned} u_1 &= c_1, & u^2 &= c_2, \\ u^1 &= c_1 + du^1, & u^2 &= c_2 + du^2, \end{aligned}$$

najdeme výminku [2]

$$(1) \quad \partial_2(AR^{(1)}) + \partial_1(BR^{(2)}) = 0.$$

Síly \mathbf{R} rozložíme do směrů vektorů $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ (složka ve směru normály plochy je rovna nule)

$$(2) \quad \begin{aligned} \mathbf{R}^{(1)} &= -\frac{S}{A} \mathbf{r}_1 - \frac{T_2}{B} \mathbf{r}_2, \\ \mathbf{R}^{(2)} &= -\frac{T_1}{A} \mathbf{r}_1 - \frac{S}{B} \mathbf{r}_2. \end{aligned}$$

Derivace, které se vyskytují v rovnici (1), vyjádříme za pomoci vztahu $\partial_{ij}\mathbf{r} =$

$= G_{ij}^z \mathbf{r}_z + h_{ij} \mathbf{n}$ jako

$$\begin{aligned} -\partial_2(\mathbf{A}\mathbf{R}^{(1)}) &= \left[\partial_2 S + G_{21}^1 S + \frac{A}{B} T_2 G_{22}^1 \right] \mathbf{r}_1 + \\ &+ \left[G_{12}^2 S + \partial_2 \left(\frac{A}{B} T_2 \right) + \frac{A}{B} G_{22}^2 T_2 \right] \mathbf{r}_2 + \left[h_{12} S + \frac{A}{B} h_{22} T_2 \right] \mathbf{n}, \\ -\partial_1(\mathbf{B}\mathbf{R}^{(2)}) &= \left[\partial_1 \left(\frac{B}{A} T_1 \right) + \frac{B}{A} G_{11}^1 T_1 + G_{12}^1 S \right] \mathbf{r}_1 + \\ &+ \left[\frac{B}{A} T_1 G_{11}^2 + \partial_1 S + G_{12}^2 S \right] \mathbf{r}_2 + \left[\frac{B}{A} h_{11} T_1 + h_{12} S \right] \mathbf{n}. \end{aligned}$$

Jestliže tyto výrazy upravíme dosazením derivací

$$\partial_2 \left(\frac{1}{B} \right) = -\frac{G_{22}^2}{B} - \frac{A}{B^2} \cos \psi G_{22}^1, \quad \partial_1 \left(\frac{1}{A} \right) = -\frac{G_{11}^1}{A} - \frac{B}{A^2} \cos \psi G_{11}^2$$

a zavedením pomocných hodnot vztahy

$$h_{11} = -\frac{A^2}{R_1}, \quad h_{22} = -\frac{B^2}{R_2}, \quad h_{12} = \frac{AB}{R_{12}},$$

pak rovnice (1) ve skalárním tvaru (podmínky rovnováhy sil ve směrech $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{n}$) jsou

$$(3) \quad (a) \quad \partial_1(BT_1) + A \cdot \partial_2 S - \frac{B^2}{A} \cos \psi \cdot G_{11}^2 T_1 + \\ + \frac{A^2}{B} G_{22}^1 T_2 + 2AG_{12}^1 S = 0,$$

$$(b) \quad \partial_2(AT_2) + B \cdot \partial_1 S - \frac{A^2}{B} \cos \psi \cdot G_{22}^1 T_2 + \\ + \frac{B^2}{A} G_{11}^2 T_1 + 2BG_{12}^2 S = 0,$$

$$(c) \quad \frac{T_1}{R_1} + \frac{T_2}{R_2} - \frac{2S}{R_{12}} = 0.$$

Tensor vnitřních sil

Hledíme vyjádření vnitřních sil pro nesouřadnicový řez, který svírá s u^1 -křivkou úhel λ ; hledanou sílu (opět na jednotku délky řezu) označíme

$$\mathbf{R} = \frac{R^1}{A} \mathbf{r}_1 + \frac{R^2}{B} \mathbf{r}_2.$$

Z podmínky rovnováhy elementu podle obr. 2 najdeme

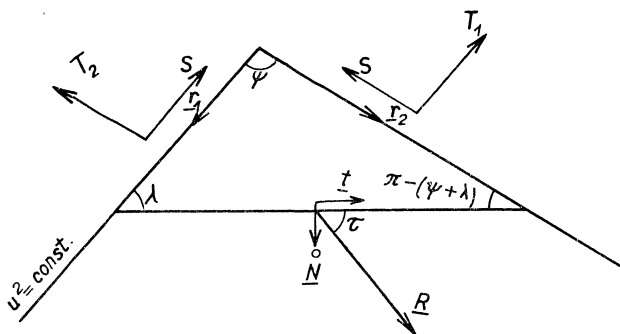
$$\mathbf{R}^{(1)} \sin(\psi + \lambda) + \mathbf{R}^{(2)} \sin \lambda + \mathbf{R} \sin \psi = 0.$$

Z téhož obr. pro fyzikální souřadnice vektoru tečny uvažovaného řezu

$$\mathbf{t} = t^1 \frac{\mathbf{r}_1}{A} + t^2 \frac{\mathbf{r}_2}{B}$$

plyne

$$t^1 = -\frac{\sin(\psi + \lambda)}{\sin \psi}, \quad t^2 = \frac{\sin \lambda}{\sin \psi}.$$



Obr. 2. Vyjádření napětí pro nesouřadné řezu.

Místo vektoru tečny zavedeme nyní jednotkový vektor vnější normály $\mathring{\mathbf{N}}$ (obr. 2), pro jehož kovariantní souřadnice platí

$$\mathring{N}_1 = t^2, \quad \mathring{N}_2 = -t^1,$$

takže rovnice rovnováhy lze upravit na tvar

$$\mathbf{R} = -\mathbf{R}^{(1)} \mathring{N}_2 - \mathbf{R}^{(2)} \mathring{N}_1.$$

Jestliže zavedeme označení

$$T_1 = T^{11}, \quad T_2 = T^{22}, \quad S = T^{12} = T^{21},$$

pak rovnice rovnováhy ve skalárním vyjádření mají tvar

$$(4) \quad R^i = T^{i\alpha} \mathring{N}_\alpha.$$

Rovnice (4), které k normále šikmého řezu přiřazují jeho vnitřní sílu, definují operátor tohoto přiřazení T^{ij} jako tenzor vnitřních sil.

Symetrie tenzoru T^{ij} je totožná se zákonem rovnosti smykových složek protínajících se souřadnicových řezů, který plyne z momentové výminky rovnováhy [2];

platí ovšem jen v zde uvažovaném stavu napětí (u skořepiny, namáhané i momenty, platí pouze zákon sdružených smykových napětí).

Zvolme nyní dva směry nesouřadnicových řezů jejich normálami $\mathring{\mathbf{N}}$ a $\mathring{\mathbf{N}}'$, síly k nim příslušející označíme \mathbf{R} a \mathbf{R}' . Podmínka pro to, aby \mathbf{R} měla směr řezu kolmého k $\mathring{\mathbf{N}}$ a \mathbf{R}' směr řezu kolmého k $\mathring{\mathbf{N}}'$, je podle (4)

$$\mathring{N}'_{\beta} R^{\beta} = \mathring{N}_{\beta} R'^{\beta} = T^{\alpha\beta} \mathring{N}_{\alpha} \mathring{N}'_{\beta} = 0,$$

což je totožno s rovnicí sdružených směrů T^{ij} , tj.

$$T^{\alpha\beta} \mathring{N}_{\alpha} \mathring{N}'_{\beta} = 0,$$

kterou lze rovněž psát jako diferenciální rovnici sítě sdružených směrů T^{ij}

$$(5) \quad T^{\alpha\beta} du^{\alpha} du'^{\beta} = 0,$$

jejíž statický význam je zřejmý; jestliže tato síť je sítí souřadnicovou, pak je

$$(6) \quad S = 0.$$

Síť (5) je východiskem dalšího řešení.

2. ŘEŠENÍ ROVNIC ROVNOVÁHY

Protože se omezujeme pouze na statickou část problému, pokládáme tvar plochy za daný, tj. předem zvolený. Souřadnou síť nechť je síť (5), je tedy $S = 0$. Z rovnice (3c) lze pak zavést novou funkci vztahy

$$T_1 = TR_1, \quad T_2 = -TR_2,$$

takže (3a, b) přejdou v

$$\partial_1(BR_1T) - \frac{B^2}{A} \cos \psi \cdot G_{11}^2 R_1 T - \frac{A^2}{B} G_{22}^1 R_2 T = 0,$$

$$\partial_2(AR_2T) - \frac{A^2}{B} \cos \psi \cdot G_{22}^1 R_2 T - \frac{B^2}{A} G_{11}^2 R_1 T = 0.$$

Rovnice vyřešíme pro derivace T , při čemž použijeme vztahu

$$\frac{\partial_i \varrho}{\varrho} = \frac{\partial_i |\varrho|}{|\varrho|} = \partial_i \lg |\varrho|.$$

Najdeme

$$\partial_1 \lg |T| = \frac{B}{A} \cos \psi \cdot G_{11}^2 + \frac{A^2}{B^2} G_{22}^1 \frac{R_2}{R_1} - \partial_1 \lg (B|R_1|),$$

$$\partial_2 \lg |T| = \frac{A}{B} \cos \psi \cdot G_{22}^1 + \frac{B^2}{A^2} G_{11}^2 \frac{R_1}{R_2} - \partial_2 \lg (A|R_2|).$$

Z vlastností G_{ij}^k plyne

$$\frac{B}{A} \cos \psi \cdot G_{11}^2 = \partial_1 \lg A - G_{11}^1,$$

$$\frac{A}{B} \cos \psi \cdot G_{22}^1 = \partial_2 \lg B - G_{22}^2,$$

takže soustava přejde v konečný tvar

$$(7) \quad \partial_1 \lg |T| = \frac{A^2 R_2}{B^2 R_1} G_{22}^1 + \partial_1 \lg \frac{A}{B|R_1|} - G_{11}^1,$$

$$\partial_2 \lg |T| = \frac{B^2 R_1}{A^2 R_2} G_{11}^2 + \partial_2 \lg \frac{B}{A|R_2|} - G_{22}^2.$$

Označme pravé strany (7) $a(u^1, u^2)$, resp. $b(u^1, u^2)$. Nechť oblast, v níž se mění parametry u^1, u^2 je jednoduše souvislá a nechť v této oblasti jsou funkce a, b a jejich derivace $\partial_2 a, \partial_1 b$ spojité. Potom, jak je známo z matematické analýzy, aby existovala jednoznačná funkce $\lg |T|$, vyhovující oběma rovnicím (7), je nutno a stačí, aby

$$(8) \quad \partial_2 a = \partial_1 b$$

(tzv. podmínka integrability).

Pak (7) má řešení

$$(9) \quad T(P) = T(P_0) \exp \left(\int_{P_0}^P a du^1 + b du^2 \right),$$

kde $P_0(u_0^1, u_0^2)$ je pevný a $P(u^1, u^2)$ je libovolný bod integrační oblasti.

PŘÍKLADY

Zvolme tvar střednicové plochy skořepiny, zatížené pouze okrajovými silami, a hledejme vnitřní síly T_1, T_2 za předpokladu, že zvolená souřadnicová síť je sdruženou sítí tenzoru T^{ij} .

Příklad 1: Translační plocha

Z rovnice translační plochy

$$z = f(x) + \varphi(y)$$

najdeme pro první základní tenzor plochy

$$\begin{aligned} A^2 &= 1 + f'^2, & AB \cos \psi &= f' \varphi', \\ B^2 &= 1 + \varphi'^2, & g^2 &= 1 + f'^2 + \varphi'^2, \\ G_{22}^1 &= \frac{f' \varphi''}{g^2}, & G_{22}^2 &= \frac{\varphi' \varphi''}{g^2}, \\ G_{11}^1 &= \frac{f' f''}{g^2}, & G_{11}^2 &= \frac{f'' \varphi'}{g^2}, \end{aligned}$$

a pro druhý

$$L = \frac{f''}{g}, \quad N = \frac{\varphi''}{g}, \quad M = 0.$$

Protože je tedy

$$\frac{A^2 R_2}{B^2 R_1} G_{22}^1 = G_{11}^1, \quad \frac{B^2 R_1}{A^2 R_2} G_{11}^2 = G_{22}^2,$$

jsou pravé strany rovnic

$$a = \partial_x \lg \frac{|L|}{AB}, \quad b = \partial_y \lg \frac{|N|}{AB}.$$

Podmínka (8) přechází v

$$\partial_{xy}^2 \lg (gAB) = \partial_{yx}^2 \lg (gAB).$$

Předpokládáme-li $f'' \neq 0$, $\varphi'' \neq 0$ v celé integrační oblasti, jsou a , b spojité. Podmínka (8) je splněna, rovnice (7) mají tvar

$$\begin{aligned} \partial_x \lg |T| &= \partial_x \lg \frac{|L|}{AB}, \\ \partial_y \lg |T| &= \partial_y \lg \frac{|N|}{AB}, \end{aligned}$$

jejich řešení je zřejmě

$$T = cg \frac{LN}{AB}$$

a hledané síly

$$T_1 = -T \frac{A^2}{L} = -c\varphi'' \sqrt{\left(\frac{1+f'^2}{1+\varphi'^2}\right)},$$
$$T_2 = T \frac{B^2}{N} = cf'' \sqrt{\left(\frac{1+\varphi'^2}{1+f'^2}\right)}.$$

Příklad 2: Minimální plocha

Za souřadnicové křivky zvolíme hlavní křivky plochy. Síť je tedy ortogonální a platí pro ni

$$G_{22}^1 = -\frac{B \partial_1 B}{A^2}, \quad G_{11}^1 = \frac{\partial_1 A}{A},$$
$$G_{11}^2 = -\frac{A \partial_2 A}{B^2}, \quad G_{22}^2 = \frac{\partial_2 B}{B}.$$

Minimální plocha je plochou nulové střední křivosti, je tedy

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = 0, \quad \text{tj.} \quad R_1 = -R_2 = R.$$

Pravé strany soustavy (7) přejdou v

$$a = -\partial_1 \lg |R_1| = -\partial_1 \lg |R|,$$
$$b = -\partial_2 \lg |R_2| = -\partial_2 \lg |R|$$

a řešení

$$T = \frac{c}{|R|}.$$

Hledané síly

$$T_1 = T_2 = c \operatorname{sign} R$$

jsou tedy konstantní a sobě rovny.

Pozn.: Podrobné řešení dalších ploch viz [3].

3. VEKTOR NAPĚTÍ

V předchozím odstavci byla v podstatě vyřešena základní úloha, tj. určení vnitřních sil a nalezení podmínky, za níž lze řešení převést na integraci totálního diferenciálu. Toto řešení bude nyní ještě doplněno poznámkami o některých dalších vlastnostech membránového napětí.

Na střednicové ploše M membrány definujeme vektorové pole

$$\mathbf{V}(u^1, u^2) = v^\alpha(u^1, u^2) \mathbf{r}_\alpha + v(u^1, u^2) \mathbf{n}$$

vztahy

$$(10) \quad \partial_1 \mathbf{V} = A \mathbf{R}^{(1)}, \quad \partial_2 \mathbf{V} = B \mathbf{R}^{(2)},$$

které podmínky rovnováhy (1) převádějí na

$$\partial_{12}^2 \mathbf{V} = 0.$$

Vektor \mathbf{V} budeme nazývat vektorem napětí. Jeho souřadnice jsou vázány podmínkou, že obě derivace (10) nemají složky ve směru normály. Protože pro derivace souřadných vektorů platí

$$\partial_i \mathbf{r}_j = G_{ij}^\alpha \mathbf{r}_\alpha + h_{ij} \mathbf{n},$$

mají tyto podmínky tvar

$$v^\alpha h_{1\alpha} + \partial_1 v = 0,$$

$$v^\alpha h_{2\alpha} + \partial_2 v = 0.$$

Kdybychom pokládali za známou funkci v , pak determinant soustavy pro neznámé v^i je

$$h_{11} h_{22} - (h_{12})^2,$$

tj. diskriminant druhého základního tenzoru plochy, který pro nerozvinutelnou plochu je vždy různý od nuly, soustava má pro v^1, v^2 řešení. Z toho plyne, že membránová napjatost je charakterizována jednou funkcí napětí-jedinou, na ostatních nezávislou složkou vektoru \mathbf{V} – právě tak, jako napjatost rovinná.

Vektor \mathbf{V} můžeme pokládat za průvodič bodů plochy \check{M} , která je geometrickým obrazem vnitřních sil [4].

Určeme např. plochu \check{M} za předpokladu, že sítě sdružených směrů (tedy i směrů hlavních) tenzorů T^{ij} a h_{ij} splynou; za souřadnou vezměme síť hlavních směrů. Z (10) plyne pro souřadnicové vektory plochy \check{M}

$$\check{\mathbf{r}}_1 = \partial_1 \mathbf{V} = -\frac{A}{B} T_2 \mathbf{r}_2,$$

$$\check{\mathbf{r}}_2 = \partial_2 \mathbf{V} = -\frac{B}{A} T_1 \mathbf{r}_1,$$

a ze vztahu $\check{g}_{ij} = \check{\mathbf{r}}_i \check{\mathbf{r}}_j$ metrický tenzor plochy \check{M}

$$\check{g}_{11} = (A)^2 (T_2)^2,$$

$$\check{g}_{22} = (B)^2 (T_1)^2,$$

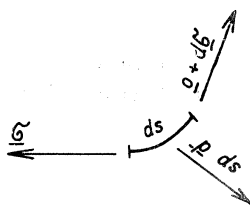
$$\check{g}_{12} = T_1 T_2 g_{12} = 0 \quad (\text{je } g_{12} = 0).$$

Je tedy souřadnicová síť plochy \check{M} rovněž ortogonální [a tedy síť hlavních směrů T^{ij} hlavní sítí zobrazení plochy M na \check{M}].

Pro normálu plochy \check{M} platí

$$\check{g}\check{n} = \check{r}_1 \times \check{r}_2 = T_1 T_2 g n$$

a pro druhou hlavní formu plochy \check{M} tedy



$$\check{h}_{11} = \check{n} \partial_1 \check{r}_1 = -\frac{A}{B} T_2 h_{12},$$

$$\check{h}_{22} = \check{n} \partial_2 \check{r}_2 = -\frac{B}{A} T_1 h_{12},$$

$$\check{h}_{12} = \check{n} \partial_1 \check{r}_2 = -\frac{A}{B} T_2 h_{22}.$$

Obr. 3. Element ohebného vlákna.

Protože souřadnicová síť plochy M je sdružená, je $h_{12} = 0$ a

$$\check{h}_{11} = \check{h}_{22} = 0,$$

což charakterizuje asymptotickou souřadnou síť. Ta je však ortogonální pouze u ploch minimálních, které jsou tedy obrazem každé membrány, u níž hlavní směry T^{ij} a h_{ij} jsou totožné.

Staticko-geometrické analogie lze ovšem využít i jinými způsoby, než v uvedeném příkladě.

4. VOLNÝ OKRAJ MEMBRÁNY

Tímto termínem označíme okrajový nosník membrány, který je podepřen pouze v bodech (nikoliv spojitě) a je namáhán pouze osovou silou.

Uvažujme ohebné vlákno tvaru

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$$

(s je délka oblouku křivky od určitého bodu křivky), které je zatíženo spojitým zatížením (na jednotku délky oblouku)

$$\mathbf{p}(s) = p_1(s) \mathbf{t} + p_2(s) \mathbf{N} + p_3(s) \mathbf{b},$$

kde jednotkové vektory \mathbf{t} , \mathbf{N} a \mathbf{b} tvoří průvodní trojhran křivky:

$$\mathbf{t} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} \quad \text{hlavní tečna,}$$

$$\mathbf{N} = R \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} \quad \text{normála (R-poloměr křivosti),}$$

$$\mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{N} \quad \text{binormála.}$$

Vláknno může být namáháno pouze osovou silou, tedy

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma \mathbf{t}, \quad \sigma = |\boldsymbol{\sigma}|,$$

pro jejíž derivaci platí

$$\frac{d\boldsymbol{\sigma}}{ds} = \frac{d\sigma}{ds} \mathbf{t} + \sigma \frac{d\mathbf{t}}{ds}.$$

Výminku rovnováhy části vláknna podle obr. 3

$$d\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{p} ds$$

vyjádříme tedy ve skalárním tvaru jako

$$(11) \quad (a) \quad p_1 = \frac{d\sigma}{ds},$$

$$(b) \quad p_2 = \frac{\sigma}{R},$$

$$(c) \quad p_3 = 0.$$

Uvažujme nyní volný okraj membrány o střednici tvaru

$$(12) \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}[u^1(s), u^2(s)] = \mathbf{r}(s).$$

Z (11c) plyne, že zatížení působí vždy v oskulační rovině křivky (tj. rovina \mathbf{tN}); zatížení okraje membrány je tvořeno vnitřními silami membrány, které leží v tečné rovině plochy.

Aby okrajový nosník skořepiny byl namáhán pouze osovou silou, je tedy nutno, aby jeho střednice byla asymptotickou křivkou plochy.

To tedy znamená, že a) volný okraj nemůže existovat u ploch kladné křivosti, kde asymptotické křivky nejsou reálné, b) pouze u přímkových ploch může být volný okraj přímý.

Hledejme nyní podmínky pro to, aby asymptotická křivka (12) mohla být volným okrajem dané membrány. Z rovnováhy elementu na obr. 4 najdeme

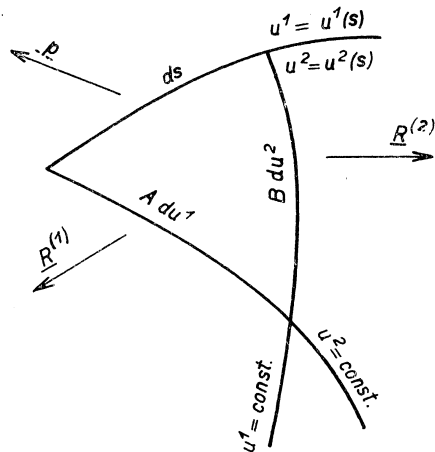
$$\mathbf{p} ds = A \mathbf{R}^{(1)} du^1 + B \mathbf{R}^{(2)} du^2,$$

kde

$$\mathbf{p} = p_1 \mathbf{t} + p_2 \mathbf{N}.$$

Pro tečnu křivky (12) platí

$$\mathbf{t} = \frac{du^1}{ds} \mathbf{r}_1 + \frac{du^2}{ds} \mathbf{r}_2.$$



Obr. 4. Okrajový element membrány.

Jestliže nyní zavedeme vektor křivosti křivky souřadnicemi

$$G^i = \frac{d^2 u^i}{ds^2} + G_{\alpha\beta}^i \frac{du^\alpha}{ds} \frac{du^\beta}{ds},$$

pak, jak se lze snadno přesvědčit, pro derivaci tečny platí

$$\frac{d\mathbf{t}}{ds} = G^1 \mathbf{r}_1 + G^2 \mathbf{r}_2 + h_{\alpha\beta} \frac{du^\alpha}{ds} \frac{du^\beta}{ds} \mathbf{n}.$$

Protože pro asymptotické křivky je

$$h_{\alpha\beta} du^\alpha du^\beta = 0,$$

je jejich prostorová křivost rovna křivosti geodetické,

$$\frac{1}{R} = |\mathbf{G}|.$$

Rovnice (13) ve skalárním tvaru bude (pro jednoduchost předpokládáme opět $S = 0$, není to však nutné)

$$p_1 \frac{du^1}{ds} + p_2 \frac{G^1}{|\mathbf{G}|} = -T_1 \frac{B}{A} \frac{du^2}{ds},$$

$$p_1 \frac{du^2}{ds} + p_2 \frac{G^2}{|\mathbf{G}|} = -T_2 \frac{A}{B} \frac{du^1}{ds}.$$

Řešení této soustavy je

$$p_1 = \frac{g}{|\mathbf{G}|} \left[T_2 \frac{A}{B} G^1 \frac{du^1}{ds} - T_1 \frac{B}{A} G^2 \frac{du^2}{ds} \right],$$

$$p_2 = g \left[T_1 \frac{B}{A} \left(\frac{du^2}{ds} \right)^2 - T_2 \frac{A}{B} \left(\frac{du^1}{ds} \right)^2 \right].$$

Podle (11b) je tedy osová síla okrajového nosníku

$$(15) \quad \sigma = \frac{g}{|\mathbf{G}|} \left[T_1 \frac{B}{A} \left(\frac{du^2}{ds} \right)^2 - T_2 \frac{A}{B} \left(\frac{du^1}{ds} \right)^2 \right]$$

a podle (11a) podmínka nutná k tomu, aby asymptotická křivka (12) mohla být

střednicí volného okraje, je

$$(16) \quad \frac{g}{A B |\mathbf{G}|} \left[T_2 A^2 G^1 \frac{du^1}{ds} - T_1 B^2 G^2 \frac{du^2}{ds} \right] = \\ = \frac{d}{ds} \left\{ \frac{g}{A B |\mathbf{G}|} \left[T_1 B^2 \left(\frac{du^2}{ds} \right)^2 - T_2 A^2 \left(\frac{du^1}{ds} \right)^2 \right] \right\}.$$

5. APLIKACE PRO LANOVOU SÍŤ

Mezi novodobé střešní prostorové konstrukce patří síť, tvořená dvěma systémy předpjatých lan, vzájemně se křížících. Je-li tato síť dostatečně hustá, můžeme ji řešit jako ohebnou membránu a přímo aplikovat předchozí výsledky. Protože však osově síly lan mohou být pouze tahy, musí podle (9) být

$$\frac{1}{R_1 R_2} < 0,$$

tj. omezíme se na plochy záporné křivosti.

Lanová síť má zřejmě vlastnosti sítě (5). Homogenní rovnice rovnováhy popisují montážní stav sítě pouze předpjaté, bez střešního pláště (vlastní váha lan je vzhledem k předpětí zanedbatelná). Zvolíme tvar lanové sítě; je-li splněna podmínka (8), pak osově síly najdeme přímo z (9) vynásobením vzdáleností lan. Minimální plocha je pak takovým tvarem sítě, při níž — při stejné vzdálenosti lan — jsou všechna lana stejně namáhána.

V některých případech se části tuhého okrajového nosníku nahrazují lanem, které je pak totožno s volným okrajem podle 4.

Literatura

- [1] *B. V. Novozhilov*: Теория тонких оболочек. Гостроиздат, Москва—Ленинград 1962.
- [2] *A. B. Голденвейзер*: Теория тонких оболочек. Гостроиздат, Москва 1953.
- [3] *A. Bártlová*: Řešení předpjaté nezátížené lanové sítě. Stavebnický časopis 1964, č. 4, str. 215 až 230.
- [4] *W. Blaschke*: Reziproke Kräftepläne zu den Spannungen in einer biegsamen Haut. International Congress of Mathematicians, Cambridge 1912.

Jako základní literatury teorie ploch bylo použito:

B. Ф. Каган: Основы теории поверхностей в тензорном изложении I., II. Гостехиздат, Москва 1948.

Резюме

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ МЕМБРАННОГО НАПРЯЖЕНИЯ И ЕГО СОПРЯЖЕННЫХ НАПРАВЛЕНИЙ

АЛИЦЕ БАРТЛОВА (ALICE BÁRTLOVÁ)

Решение однородных уравнений равновесия (3) мембраны, находящейся под действием внутренних сил, изображенных на рис. 1, сводится в общем случае к дифференциальному уравнению в частных производных второго порядка. Но если координатная сеть находится на поверхности сеток (5), т. е. сеток сопряженных направлений тензора внутренних сил T^{ij} , решение ввиду $S = 0$ сводится к интегрированию полного дифференциала (7); условие интегрируемости (8) выполняет целый ряд поверхностей, например, поверхности сдвига и минимальные поверхности, которые представляют собой поверхности постоянного напряжения мембраны. Этот способ решения можно использовать при вычислении предварительно напряженной ненагруженной канатной сетки, которая как раз обладает свойством сетки (5).

Отделы 3 — функции напряжения — и 4 — расчет краевой балки мембраны, нагруженной только силами в направлении осей — посвящены дальнейшим, преимущественно геометрическим свойствам мембранного напряжения.

Summary

PROPERTIES OF MEMBRANE STRESS AND ITS CONJUGATE DIRECTIONS

ALICE BÁRTLOVÁ

The solution of the homogeneous equations of equilibrium (3) of a membrane under interior forces as in fig. 1, in general leads to a second-order partial differential equation. However, if the coordinates are taken as in (5), viz. the conjugate directions of the tensor T^{ij} of interior forces, then the solution reduces to the integration of the total differential (7); the integrability conditions (8) are satisfied on a number of surfaces of constant tension of the membrane, such as the translational surface or the minimal surface. This solution may be applied to the computation of a prestressed unloaded network which has the property described by (5).

Sections 3 and 4 — the tension function and the solution of the boundary of a membrane with a purely axial load indicate further, predominantly geometrical, properties of membrane stress.

Adresa autorky: Doc. Ing. Alice Bártlová C.Sc., Katedra ocelových konstrukcí SF ČVUT, Žitkova 4, Praha 6.