Ivo Babuška

Über universal optimale Quadraturformeln

Aplikace matematiky, Vol. 13 (1968), No. 5, 388–404

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/103185

ÜBER UNIVERSAL OPTIMALE QUADRATUR FORMELN

IVO BABUŠKA

(Eingegangen am 15. Juli 1967.)

(Fortsetzung)

KAPITEL IV

ÜBER EINIGE APPROXIMATIONSPROBLEME BEI VERWENDUNG EINES UNGLEICHMÄSSIGEN NETZEN

In Kapitel III haben wir Formeln mit einem gleichmäßigen Netz studiert. Wir haben apriori ein gleichmäßiges Netz gewählt und einige universelle Formeln konstruiert. Es entsteht die sehr natürliche Frage, ob das gleichmäßige Netz einen Vorteil vor anderen Netzen hat oder nicht. Offensichtlich ist, wenn wir das Funktional Φ in allgemeiner Form betrachten

$$\Phi(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\, g(x)\, dx\,, \tag{4.1}$$

das gleichmäßige Netz nicht allgemein optimal. Darum beschränken wir uns im weiteren auf die Berechnung eines speziellen Funktionals

$$\Phi_0(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\, dx\,. \tag{4.2}$$

Wir wollen uns in diesem Kapitel mit dem Zusammenhang der Größen $\omega(\Phi_0, \boldsymbol{\eta}, n)$ und $\chi(\Phi_0, \boldsymbol{\eta}, n)$ beschäftigen. Intuitiv könnte es den Anschein erwecken, daß für jeden Raum $H_{\boldsymbol{\eta}}$

$$\zeta(n) = \frac{\chi(\Phi_0, \boldsymbol{\eta}, n)}{\omega(\Phi_0, \boldsymbol{\eta}, n)}$$

eine beschränkte Funktion ist, mit Rücksicht darauf, daß sie die Eigenschaft P_3 besitzt und daher alle Punkte „gleichwertig" sind. In Wirklichkeit gilt jedoch

Satz 4.1. *Es existiert ein $H_{\eta_0} \in \mathfrak{H}$ derart, daß gilt*

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\chi(\Phi_0, \boldsymbol{\eta}_0, n)}{\omega(\Phi_0, \boldsymbol{\eta}_0, n)} \frac{1}{n^\alpha} = \infty \tag{4.3}$$

für jedes $\alpha > 0$.

Beweis. Wir wählen $\boldsymbol{\eta}_0 = \{\ldots, \eta_{-1}, \eta_0, \eta_1, \ldots\}$ folgenderweise

$$\eta_k^{-2} = e^{-|k|}\,, \quad |k| \neq 5^s\,, \quad s = 0, 1, \ldots \tag{4.4}$$

$$\eta_k^{-2} = e^{-4|k|}\,, \quad |k| = 5^s\,. \tag{4.5}$$

Nach Satz 3.1 haben wir

$$\chi^2(\Phi_0, \boldsymbol{\eta}_0, n) = \frac{1}{\eta_0^2}(1 - C(n, 0, \boldsymbol{\eta}_0)) = C(n, 0, \boldsymbol{\eta}_0) \frac{1}{\eta_0^2} \sum_{\substack{t=-\infty \\ t \neq 0}} \frac{\eta_0^2}{\eta_{tn}^2}\,. \tag{4.6}$$

Wenn wir nun (4.4) und (4.5) anwenden, so erhalten wir

$$\chi^2(\Phi_0, \boldsymbol{\eta}_0, 2\,.\,5^s) = (1 + o(1))\,.\,2e^{-2.5^s}\,. \tag{4.7}$$

Wir wählen nun eine konkrete Formel $\varphi(\mathbf{x}_n, \mathbf{p}_n)$

$$\varphi(\mathbf{x}_{2n}, \mathbf{p}_{2n})(f) = \frac{1}{2n}\left[\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{2\pi}{n}k\right) + f\left(\frac{2\pi}{n}(k - \tfrac{3}{4})\right)\right] \tag{4.8}$$

und bestimmen die Größe

$$\varrho(\Phi_0, \boldsymbol{\eta}_0, \mathbf{x}_{2n}, \mathbf{p}_{2n})\,.$$

Es ist

$$(\Phi_0 - \varphi(\mathbf{x}_{2n}, \mathbf{p}_{2n}))(f) = (f, g)_{\eta_0}$$

wobei

$$g = -\frac{1}{2}\left[\sum_{\substack{t=-\infty \\ t \neq 0}}^{\infty} \frac{e^{itnx}}{\eta_{tn}^2} + \sum_{\substack{t=-\infty \\ t \neq 0}}^{\infty} \frac{e^{itnx}}{\eta_{tn}^2} e^{itn(2\pi/n)\frac{3}{4}}\right]$$

und

$$\varrho^2(\Phi_0, \boldsymbol{\eta}_0, \mathbf{x}_{2n}, \mathbf{p}_{2n}) = \frac{1}{4}\left[\frac{|1 - i|^2}{\eta_n^2} + \frac{|1 + i|^2}{\eta_{-n}^2} + \sum_{|t| \geq 3} \frac{|1 + e^{i(3\pi/2)t}|^2}{\eta_{tn}}\right]. \tag{4.9}$$

Wir erhalten daher für $n = 5^s$

$$\sum_{|t| \geq 3} \frac{|1 + e^{it(3\pi/2)}|^2}{\eta_{tn}^2} \leq 4\eta_{3.5^s}^{-2}(1 + o(1))$$

und darum ist

$$\omega^2(\Phi_0, \boldsymbol{\eta}_0, 2.5^s) \leqq 2[e^{-3.5^s} + e^{-4.5^s}][1 + o(1)]$$

sodaß gilt

$$\frac{1}{2^\alpha 5^{s\alpha}} \frac{\chi^2(\Phi_0, \boldsymbol{\eta}_0, 2.5^s)}{\omega^2(\Phi_0, \boldsymbol{\eta}_0, 2.5^s)^{8)}} \geqq \frac{Ce^{5^s}}{2^\alpha 5^{s\alpha}},$$

woraus sofort unsere Behaptung folgt.

Satz 4.1 zeigt uns, dass wir für die Räume $H_{\boldsymbol{\eta}} \subset \mathfrak{H}$ nichts über den Vorteil eines gleichmäßigen Netzes aussagen können.

Es ändert sich jedoch alles sobald wir zu den Räumen $H_{\boldsymbol{\eta}} \in \mathfrak{H}$ übergehen.

Wir beweisen hierzu folgenden Satz.

Satz 4,2. *Es sei* $H_{\boldsymbol{\eta}} \in \mathfrak{H}_1$. *Es sei weiter* $\varphi(\boldsymbol{p}_n)$ *eine Formel, definiert durch den Ausdruck* (3.21). *Dann ist*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\varrho^*(\Phi_0, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{p}_n)}{\omega(\Phi_0, \boldsymbol{\eta}, n)\sqrt{n}} < \infty .$$

Beweis. Es sei ein Funktional $\varphi(\boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{p}_n)$ gegeben, wir wollen die Größe

$$\varrho(\Phi_0, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{p}_n)$$

bestimmen.

Wir haben

$$\varphi(\boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{p}_n)(f) = \sum_{k=1}^{n} p_k^{(n)} f(x_k^{(n)}), \quad 0 \leqq x_k^{(n)} \leqq 2\pi,\ k = 1, \ldots, n,$$

und überzeugen uns leicht, daß gilt

$$\varphi(\boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{p}_n)(f) = (f, \sigma_n)_{\boldsymbol{\eta}},$$

$$\sigma_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{\eta_k^2} A_k^{(n)}, \tag{4.10}$$

wobei

$$A_k^{(n)} = \sum_{j=1}^{n} e^{-ikx_j} \bar{p}_j^{(n)} .$$

Wir erhalten

$$\varrho^2(\Phi_0, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{p}_n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |B_k^{(n)}|^2 \eta_k^{-2}, \tag{4.11}$$

[8]) Es ist auch leicht einzusehen, daß für ein gegebenes n immer ein $H_{\boldsymbol{\eta}} \in \mathfrak{H}_3$ existiert so, daß das gleichmäßige Netz nicht optimal ist.

wobei für $k \neq 0$ gilt

$$B_k^{(n)} = A_k^{(n)}$$

and

$$B_0^{(n)} = 1 - A_0^{(n)}.$$

Wir bezeichnen nun

$$\tau^2(\Phi_0, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{p}_n) = \varrho^2(\Phi_0, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{p}_n)\, \eta_n^2. \tag{4.12}$$

Mit Rücksicht auf den Umstand, daß $H_{\boldsymbol{\eta}} \in \mathfrak{H}_1$, gilt

$$\eta_n \geqq \eta_s, \quad |s| \leqq |n|$$

und wir erhalten

$$\tau^2(\Phi_0, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{p}_n) \geqq \sum_{k=-n}^{n} |B_k^{(n)}|^2. \tag{4.13}$$

Wir bezeichnen nun H_n den Hilbert Raum aller Funktionen von der Form

$$f(x) = \sum_{k=-n}^{n} a_k e^{ikx} \tag{4.14}$$

mit der Norm

$$\|f\|_n^2 = \sum_{k=-n}^{n} |a_k|^2,$$

und wir können nun schreiben

$$\varphi(\boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{p}_n)(f) = (f, \sigma_n^*)_n$$

wobei

$$\sigma_n^* = \sum_{k=-n}^{n} A_k^{(n)} e^{ikx}$$

sodaß ist

$$\varrho_n^2 = \|\Phi_0 - \varphi(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{p}_n)\|_n^2 = \sum_{k=-n}^{n} |B_k^{(n)}|^2. \tag{4.15}$$

Wir bezeichnen nun

$$\omega_n^2 = \inf_{x_n, p_n} \varrho_n^2. \tag{4.16}$$

Wir überzeugen uns leicht, daß ist

$$\omega_n^2 = \|g\|_n^2 \tag{4.17}$$

wobei

$$g(x) = \sum_{k=-n}^{n} a_k e^{ikx} \tag{4.18}$$

die Bedingungen

$$g(x_j^{(n)}) = 0\,, \quad j = 1, 2, \ldots, n \tag{4.19}$$

erfüllt sind.

Die Bedingung (4.19) folgt offensichtlich aus der Minimalisierung von ϱ_n^2 in Bezug auf p_n.

Wir erhalten nun auf die gleiche Weise, indem wir über $\boldsymbol{x}_n$, $\boldsymbol{p}_n$ minimalisieren, daß auch gilt

$$g'(x_j^{(n)}) = 0\,, \quad j = 1, \ldots, n\,. \tag{4.20}$$

Die Funktion $g(x)$ wird mitsamt ihrer Ableitung in den Punkten $x_j^{(n)}$ gleich Null. Da die Funktion $g(x)$ von der Form (4.18) ist, können wir sie in der Form ausdrücken

$$g(x) = C \prod_{j=1}^{n} |e^{ix} - e^{ix_j^{(n)}}|^2 = C|h(x)|^2 \tag{4.21}$$

und erhalten

$$\omega_n = \frac{\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} |h(x)|^2 \,\mathrm{d}x}{\left(\displaystyle\int_0^{2\pi} |h(x)|^4 \,\mathrm{d}x\right)^{1/2}} \sqrt{2\pi}\,. \tag{4.22}$$

Es sei

$$|h(x)|^2 = \sum_{h=-n}^{n} d_k e^{ikx}\,.$$

Dann ist

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |h(x)|^2 \,\mathrm{d}x = d_0$$

und

$$\left(\int_0^{2\pi} |h(x)|^4 \,\mathrm{d}x\right)^{1/2} = \sqrt{2\pi}\,\sqrt{\left(\sum_{k=-n}^{n} |d_k|^2\right)}\,.$$

Weil $|h(x)|^2$ eine nichtnegative Funktion ist, wir jedoch die Bedingung $|d_k| \leqq d_0$ haben, so ist

$$\omega_n \geqq \frac{1}{\sqrt{(2n+1)}}\,. \tag{4.23}$$

Wir haben bewiesen, daß gilt

$$\omega(\Phi_0, \boldsymbol{\eta}, n) \geqq \frac{1}{\eta_n} \frac{1}{\sqrt{(2n + 1)}} .$$

Nach Satz 3.2 erhalten wir für die Approximierung von (3.19) folgenden Ausdruck

$$\varrho^{*2}(\Phi_0, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{p}_n) = \frac{1}{C(n, 0, \boldsymbol{\eta})} \frac{1}{\eta_0^2} (1 - C(n, 0, \boldsymbol{\eta})) = \sum_{\substack{t=-\infty \\ t \neq 0}}^{\infty} \eta_{tn}^{-2} .$$

Unter der Voraussetzung von $H_{\boldsymbol{\eta}} \subset \mathfrak{H}_1$ erhalten wir

$$\varrho^{*2}(\Phi_0, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{p}_n) = 2 \sum_{t=1}^{\infty} \eta_{tn}^{-2} \leqq 2D\eta_n^{-2}$$

wobei D nicht von n abhängt.

Wir erhalten also

$$\limsup_{n \to \infty} \frac{\varrho^{*2}(\Phi_0, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{p}_n)}{\omega(\Phi_0, \boldsymbol{\eta}, n) \sqrt{n}} < \infty .$$

Damit ist unsere Behauptung bewiesen.

Wenn wir die Sätze 4.1 und 4.2 vergleichen, sehen wir, daß für die Räume $H_{\boldsymbol{\eta}} \subset \mathfrak{H}_1$ die Formel (3.21) mit gleichmäßigen Netz, grob ausgedrückt, der Wirksamkeit nach sehr nahe zur optimalen Formel ist. Wir wollen nun einen Satz anführen, der ausagt, wann die Formel (3.21) fast optimal ist.

Satz 4.3. *Es sei $H_{\boldsymbol{\eta}} \in \mathfrak{H}_2$. Es sei $\varphi(\boldsymbol{p}_n)$ eine Formel definiert durch den Ausdruck* (3.21). *Dann ist diese Formel fast optimal.*

Beweis. Wir unterscheiden zwei Fälle

1. $\psi(x)$ ist kein Plynom;
2. $\psi(x)$ ist ein Polynom.

Im ersten Fall genügt es zu zeigen, siehe Beweis des letzten Satzes, daß

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\psi([n^{1-\varepsilon}]^2)\, n}{\psi(n^2)} < \infty$$

ist.

Wir bezeichnen $(x > 0)$

$$\varphi_\varepsilon(x) = \frac{\psi(x^{2-\varepsilon})\, x}{\psi(x^2)} .$$

Dann genügt es zu zeigen, daß für jedes $\varepsilon > 0$ gilt

$$\limsup_{x \to \infty} \varphi_\varepsilon(x) < \infty .$$

Es ist jedoch

$$\varphi_\varepsilon(x) = \frac{\sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k x^{k(2-\varepsilon+1/k)}}{\sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k x^{2k}} .$$

Unserer Voraussetzung nach ist jedoch $\psi(x)$ kein Polynom. Darum können wir schreiben

$$\varphi_\varepsilon(x) = \frac{\sum_{s=0}^{[2/\varepsilon]} \gamma_s x^{s(2-\varepsilon+1/s)}}{\sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k x^{2k}} + \frac{\sum_{k=[2/\varepsilon]+1}^{\infty} \gamma_k x^{2k\beta_k}}{\sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k x^{2k}}$$

wenn gilt $0 \leqq \beta_k < \alpha < 1$; daher konvergiert wie der erste so der zweite Summand für $x \to \infty$ zu Null. Damit ist unsere Behauptung bewiesen, für den Fall wenn $\psi(x)$ kein Polynom ist.

Für den Fall, daß $\psi(x)$ ein Polynom ist, gehen wir ganz ähnlich vor wie im Beweis zu Satz 3.5. Wir erhalten, daß

$$\omega(\Phi_0, \boldsymbol{\eta}, n) \geqq C_1 n^\beta$$

und

$$\varrho^*(\Phi_0, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{p}_n) \leqq C_n n^\beta .$$

Hieraus folgt jedoch direkt unsere Behauptung.

KAPITEL V

ÜBER EINIGE SPEZIELLE ABSCHÄTZUNGEN

In den vorhergehenden Kapiteln haben wir die Eigenschaften der Universalität einiger approximierenden Funktionale behandelt. Wir haben gezeigt, daß einige Formeln größenordnungsmäßig optimal für eine sehr breite Klasse von Räumen sein können.

In diesem Kapitel wollen wir uns mit der Fehlerabschätzung und der Wahl des optimalen Raumes $H \in \mathfrak{H}$ in welchen wir die gegebene Funktion einbetten sollen, befassen.

Wir wollen zuerst das Funktional

$$\Phi_0(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x \tag{5.1}$$

betrachten und die universal optimale Formel

$$\varphi(\mathfrak{p}_n)(f) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{2\pi}{n}k\right). \tag{5.2}$$

In Kapitel III haben wir gezeigt, daß gilt (vgl. 3.22)

$$\varrho^{*2}(\Phi_0, \boldsymbol{\eta}, \mathfrak{p}_n) = \sum_{\substack{t=-\infty \\ t\neq 0}}^{\infty} \eta_{tn}^{-2}. \tag{5.3}$$

Also können wir schreiben

$$|\Phi_0(f) - \varphi(\mathfrak{p}_n)(f)| \leqq \Big(\sum_{\substack{t=-\infty \\ t\neq 0}}^{\infty} \eta_{tn}^{-2}\Big)^{1/2} \|f\|_{\boldsymbol{\eta}}. \tag{5.4}$$

Wenn gilt

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{ikx} \in H_{\boldsymbol{\eta}}$$

so ist

$$\|f\|_{\boldsymbol{\eta}}^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^2 \eta_k^2,$$

sodaß wir erhalten

$$|\Phi_0(f) - \varphi(\mathfrak{p}_n)(f)|^2 \leqq \sum_{\substack{t=-\infty \\ t\neq 0}}^{\infty} \eta_{tn}^{-2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^2 \eta_k^2. \tag{5.5}$$

Wir bezeichnen nun

$$\varepsilon_n^2(f, \boldsymbol{\eta}) = \sum_{\substack{t=-\infty \\ t\neq 0}}^{\infty} \eta_{tn}^{-2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^2 \eta_k^2 \tag{5.6}$$

und

$$\varepsilon_n^2(f) = \inf_{\substack{\boldsymbol{\eta}\in\mathscr{K} \\ f\in H_{\boldsymbol{\eta}}}} \varepsilon_n^2(f, \boldsymbol{\eta}). \tag{5.7}$$

Durch einfache Rechnung erhalten wir

$$\varepsilon_n^2(f) = \sum_{\substack{t=-\infty \\ t\neq 0}}^{\infty} |a_{tn}|. \tag{5.8}$$

Wir haben nun folgenden Satz bewiesen.

Satz 5.1. *Es sei*

$$f \in R = \bigcup_{\eta \in \mathscr{K}} H_\eta , \quad f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{ikx} ,$$

dann ist

$$\varepsilon_n(f) = \inf_{\substack{\eta \in \mathscr{K} \\ f \in H_\eta}} \|\Phi_0 - \varphi(\mathfrak{p}_n)\|_\eta \, \|f\|_\eta = \sum_{\substack{t=-\infty \\ t \neq 0}}^{\infty} |a_{tn}| . \tag{5.9}$$

Bei der Fehlerabschätzung spielt die konkrete Wahl des Raumes und die Abschätzung der Norm der zu integrierenden Funktion eine große Rolle. Diese Frage kann auf verschiedene Weise auf Grund der zur Verfügung stehenden oder ereichbaren Informationen gelöst werden. Wir kommen zu sehr verschiedenen Möglichkeiten. Die Fehlerabschätzungen mit Hilfe der Intervaltechnik (vgl. z. B. [12]) können auch als aposteriore Konstruktion eines geeigneten Raumes und der Norm aufgefasst werden.

Wir zeigen noch eine andere Art, welche derjenigen von Dahlquist [siehe [9]] sehr nahe liegt.

Wir führen hierzu einige Definitionen ein.

Definition 5.1. Es sei

$$f(x) \in R , \quad f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{ikx} .$$

Die Funktion $g(x) \in R$ nennen wir eine Oberfunktion zu $f(x)$ wenn gilt

$$g(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k e^{ikx} , \quad b_k \geqq |a_k| .$$

Wir schreiben dann $g(x) \succ f(x)$. Offensichtlich existiert mit Rücksicht auf Satz 1.6 immer eine Oberfunktion. Zum Beispiel

$$g(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k| \, e^{ikx} \succ f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{ikx} .$$

Definition 5.2. Es sei $f \in R$. Die Oberfunktion $g \succ f$ nennen wir eine minimale Oberfunktion, wenn für jedes $h \succ f$ gilt $\|h\|_\eta \geqq \|g\|_\eta$. Wenn

$$f = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{ikx} ,$$

dann ist

$$g = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k| \, e^{ikx}$$

eine minimale Oberfunktion.

Offenbar gilt auch

$$|\Phi_0(f) - \varphi(\mathfrak{p}_n)(f)| \leqq |\Phi_0(g) - \varphi(\mathfrak{p}_n)(g)| .$$

Diesen Umstand wollen wir nun ausnützen.

Wir wollen den Wert von $\varphi(\mathfrak{p}_n)(g)$ bestimmen. Wir erhalten für

$$g = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k e^{ikx} ,$$

$$\varphi(\mathfrak{p}_n)(g) = \sum_{t=-\infty}^{\infty} b_{tn} .$$

Wir setzen voraus, daß die Funktion $g(x)$ die zweite Ableitung besitzt und daß $g'' \in \mathfrak{R}$.

Dann erhalten wir

$$-\varphi(\mathfrak{p}_n)(g'') = \sum_{t=-\infty}^{\infty} t^2 n^2 b_{tn} .$$

Aus diesen Erwägungen folgt sofort folgende Behauptung

Satz 5.2. *Es sei $f \in \mathfrak{R}$. Es sei weiter $g \succ f$, und $g'' \in \mathfrak{R}$. Dann gilt*

$$\varepsilon_n(f) \leqq \frac{1}{n^2} |\varphi(\mathfrak{p}_n)(g'')| .$$

Wir sehen, daß die Fehlerabschätzung sehr eng mit der Konstruktion einer Oberfunktion zusammenhängt. Die Oberfunktionen haben eine Reihe von Eigenschaften, welche wir ausnützen können. Wir wollen nur einige anführen. Wenn gilt $g_1 \succ f_1$ und $g_2 \succ f_2$, dann ist $g_1 + g_2 \succ f_1 + f_2$, usw.

Bis jetzt haben wir nur das Funktional (5.1) behandelt. Auf ähnliche Weise können wir auch für allgemeinere Funktionale vorgehen, wie z.B.

$$\Phi(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\, g(x)\, \mathrm{d}x . \tag{5.11}$$

Diese Erwägungen werden wir hier jedoch nicht praktisch durchführen. Wir zeigen nur eine praktische Möglichkeit der Fehlerabschätzung. Es sei

$$\varepsilon_n(f) = \inf_{\substack{\eta \in \mathscr{K} \\ f \in \mathrm{H}_\eta}} \|\Phi - \varphi(\mathfrak{q}_n)\|_\eta \, \|f\|_\eta .$$

Für $\varphi(\mathfrak{q}_n)$ werden wir die entsprechende universal Formel einsetzen resp. die ihr zu nächst liegende.

$$\varphi(\mathfrak{q}_n)(f) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{2\pi}{n} k\right) S_n\left(\frac{2\pi}{n} k\right), \tag{5.12}$$

wobei

$$S_n(x) \sum_{s=[(n-1)/2]}^{[n/2]} b_s^{(n)} e^{isx}, \tag{5.13}$$

und

$$b_s^{(n)} = b_s \quad \text{für} \quad s < \frac{n}{2},$$

und

$$b_{n/2}^{(n)} = \frac{b_{n/2} + b_{-n/2}}{2} \beta, \quad 0 \leqq \beta \leqq 2, \tag{5.14}$$

und

$$g(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k e^{ikx}.$$

Für die universale Formel aus Kapitel III ist $\beta = 1$.

Wir setzen voraus, daß gilt

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{ikx}.$$

Dann erhalten wir durch einfaches Rechnen

$$\Phi(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{-k} b_k \tag{5.15}$$

und

$$\varphi(\mathfrak{q}_n)(f) = \sum_{k=-[(n-1)/2]}^{[n/2]} b_k^{(n)} \sum_{t=-\infty}^{\infty} a_{-k+tn},$$

sodaß

$$\begin{aligned} |\Phi(f) - \varphi(\mathfrak{q}_n)(f)| &= \Bigg| - \sum_{k=-[(n-1)/2]}^{[n/2]} b_k^{(n)} \sum_{\substack{t=-\infty \\ t \neq 0}}^{\infty} a_{-k+tn} + \\ &+ \sum_{\substack{k > [n/2] \\ k < -[(n-1)/2]}} a_{-k} b_k + a_{-n/2} \left(b_{n/2} \left(1 - \frac{\beta}{2} \right) - b_{-n/2} \frac{\beta}{2} \right) \Bigg| \leqq \\ &\leqq 2 C_n^{(\beta)} \sum_{|k| \geqq [(n+1)/2]} |a_k|, \end{aligned} \tag{5.16}$$ [9]

wobei

$$C_n^{(\beta)} = \max_{k=\ldots-1,0,1,\ldots} \left[|b_k|, |\beta b_{n/2}|, |\beta b_{-n/2}| \right].$$

[9]) Wenn n ungerade ist, so fallen die Glieder mit dem Index $\frac{1}{2}n$ aus.

Es sei nun

$$z \succ f\,, \quad z(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sigma_k e^{ikx}\,,$$

$$\xi_m(x) = \sum_{k=-m}^{m} e^{ikx}\,.$$

Wir bezeichnen weiter

$$w_m(x) = \xi_m(x)\, z(x)\,.$$

Dann ist

$$w_m(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k^{(m)} e^{ikx}$$

und

$$d_{tl}^{(m)} = \sum_{s=-m}^{m} \sigma_{tl-s}$$

und

$$Q_l^{(m)} = \sum_{\substack{t=-\infty \\ t\neq 0}}^{\infty} d_{tl}^{(m)} = \sum_{\substack{t=-\infty \\ t\neq 0}}^{\infty} \sum_{s=-m}^{m} \sigma_{tl-s}\,. \tag{5.17}$$

Wenn wir nun (5.16) und (5.17) vergleichen, so sehen wir, daß wir

$$|\Phi(f) - \varphi(\boldsymbol{q}_n)(f)| \leqq 2C_n^{(\beta)} Q_l^{(m)}$$

erhalten, wenn wir setzen $l = 2[\frac{1}{2}(n+1)]$, $m = [\frac{1}{2}(n+1)]$.

Die Größe $Q_l^{(m)}$ können wir für ungerade l leicht bestimmen soweit $z'' \in \mathfrak{R}$. Dann ist nämlich

$$Q_l^{(m)} = \frac{1}{l^2}\, \varphi(\boldsymbol{p}_l)\,((\xi_m z)'')\,.$$

Wir haben eine Möglichkeit der Fehlerabschätzung gezeigt, welche auf der geeigneten Wahl des Raumes $H_{\boldsymbol{\eta}}$ aufgebaut ist.

Es gibt auch andere Möglichkeiten, ihre Anwendung hängt davon ab, was für Informationen wir zur Verfügung haben. Wir wissen in einigen Fällen, daß die Funktion $f(x)$ auf dem Streifen $|\mathrm{Im}\,(z)| < R$ analytisch ist. Dann ist es sinnvoll $\boldsymbol{\eta}$ folgenderweise zu wählen $\boldsymbol{\eta} = (\ldots, \eta_{-1}, \eta_0, \eta_1, \ldots)$, $\eta_k = \mathrm{ch}\, kR$.

Wenn wir das Maximum der gegebenen Funktion auf dem gegebenen Streifen finden können, so können wir auch die Abschätzung $\|f\|_{\boldsymbol{\eta}}$ leicht bestimmen.

Die Abschätzung des Maximums kann oft mit Hilfe der sogenannten Intervalltechnik für eine breite Klasse von Funktionen gefunden werden.

Offenbar gibt es viele solche Möglichkeiten. Wir wollen uns jedoch nicht weiter mit diesem Thema beschäftigen.

KAPITEL VI

ÜBER EINIGE NUMERISCHE EXPERIMENTE

Unsere Aufgabe sei es den Wert des Funktionals Φ_0 zu bestimmen.

$$\Phi_0(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx\,. \tag{6.1}$$

Es sei H ein Hilbert Raum der 2π-periodischen Funktionen mit folgender Norm

$$\|f\|^2 = \int_0^{2\pi} (|f|^2 + |f'|^2)\,dx\,; \tag{6.2}$$

offensichtlich ist $H \in \mathfrak{H}_2$.

Die optimale Formel $\varphi(\boldsymbol{p}_n^{\mathrm{opt}})$ für ein gleichmäßige Netz ist von der Form

$$\varphi(\boldsymbol{p}_n^{\mathrm{opt}})(f) = C(n)\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} f\left(\frac{2\pi}{n}j\right) \tag{6.3}$$

wobei

$$C^{-1}(n) = 1 + \frac{2}{n^2}\sum_{t=1}^{\infty}\frac{1}{t^2 + 1/n^2}\,. \tag{6.4}$$

Wir wollen nun den Wert von $\Phi(f)$ und $\varphi(\boldsymbol{p}_n^{\mathrm{opt}})(f)$ für $f = e^{\alpha \sin x}$, $\alpha = 3,10$ berechnen. In der folgenden Tafel 6.1 sind die Ergebnisse angeführt.

Tafel 6.1

n	$\varphi(p_n^{opt})(f)$, $f = e^{\alpha \sin x}$	
	$\alpha = 3$	$\alpha = 10$
8	4,64604604 ...	2900,35030 ...
16	4,81902223 ...	2780,14081 ...
24	4,85310536 ...	2799,74394 ...
$\Phi(f)$	4,88079258586502408	2815,71662846625447

In Tafel 6.2 sind die Ergebnisse für die universal optimale Formel

$$\varphi(p_n^{u,\mathrm{opt}})(f) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} f\left(\frac{2\pi}{n} j\right) = T_n(f) \tag{6.5}$$

angeführt.

Tafel 6.2

n	$\varphi(p_n^{u,opt})(f)$, $f = e^{\alpha \sin x}$	
	$\alpha = 3$	$\alpha = 10$
8	4,88241999058958100	3047,90959481962441
16	4,88079258593666173	2815,77672896656761
24	4,88079258586502408	2815,71662897903758
$\Phi(f)$	4,88079258586502408	2815,71662846625447

Aus Tafel 6.1 und 6.2 sehen wir, daß die Wahl der Norm nach (6.2) absolut ungeeignet ist.

Wir wollen uns nun mit der Berechnung des Funktionals

$$\Phi_1(f) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(x)\,\mathrm{d}x \tag{6.6}$$

beschäftigen, unter der Voraussetzung, daß $f(x)$ eine 2π-periodische Funktion ist.

Wir wenden die universal größenordnungsmäßig optimale Formel (3.62) an und wählen $f_\alpha(x) = e^{\alpha \sin x} \cos x$, $\alpha = 1{,}5$.

Offensichtlich gilt dann auch

$$\Phi_1(f_\alpha) = \int_{-1}^{+1} e^{\alpha x}\,\mathrm{d}x\,. \tag{6.7}$$

Tafel 6.3

Anzahl der verwendeten Funktionswerte n	Fehler der Formel (3,62) $f = e^{\alpha \sin x} \cos x$	
	$\alpha = 1$	$\alpha = 5$
9	0,634— 8	0,510— 2
17	0,271—19	0,254— 8
25	0	0,492—16
33	0	—0,217—18

In Tafel 6.3 sind die Fehler bei der Berechnung von (6.6) mit Hilfe der größenordnungsmäßig optimalen Formel angeführt, mit Rücksicht auf die Anzahl der verwendeten Funktionswerte (es wurde auf dem Rechenautomaten ICT 1905 mit doppelter Genauigkeit gerechnet).

Zum Vergleich berechnen wir noch (6.7) mit Hilfe der sogenannten Romberg Methode (vgl. [10], [11]) (Tafel 6.4).

In Kapitel V haben wir uns mit der Fehlerabschätzung beschäftigt. Wir wollen nun die Wirksamkeit dieser Methode für die Berechnung des Funktionals (6.1)

Tafel 6.4

Anzahl der angewendeten Funktionswerte	Fehler der Rombergformel für $f = e^{\alpha x}$	
	$\alpha = 1$	$\alpha = 5$
9	$-0{,}421-10$	$-0{,}844\ -3$
17	$-0{,}416-14$	$-0{,}208\ -5$
25	—	—
33	$0{,}407-19$	$0{,}128\ -8$

Tafel 6.5

Anzahl der verwendeten Funktionswerte	$f = e^{10\sin x}$		
	$\varphi(p_n^{u,\mathrm{opt}})(f)$	$\lvert\Phi(f) - \varphi(p_n^{u,\mathrm{opt}})(f)\rvert$	$\lvert n^{-2}(\varphi(p)(g''))\rvert$
8	3047,909594819624415	232,192966353369944	232,3732719565787845
16	2815,776728966567611	0,0601005003131402	0,0601005003142606
24	2815,716628979037584	0,0000005127831140	0,0000005127831167
32	2815,716628466254842	0,0000000000003720	0,0000000000003743
	$f = e^{50\sin x}$		
8	0,6480887567505754520 +21	0,3548333783656418203 +21	0,5063081633888883995 +21
16	0,3384555456320188415 +21	0,0452001672473682524 +21	0,0452789214681998668 +21
24	0,2951999264551136014 +21	0,0019445480701799697 +21	0,0019445486761790910 +21
32	0,2932816292532110631 +21	0,0000262508682774314 +21	0,0000262508682775479 +21
40	0,2932554985285131181 +21	0,0000001201435794864 +21	0,0000001201435794864 +21
48	0,2932553785869333396 +21	0,0000000002019997072 +21	0,0000000002019997072 +21

mit Hilfe der universal optimalen Formel (6.5) für $f = e^{\alpha \sin x}$; $\alpha = 10, 50$ untersuchen. Offensichtlich ist $g = e^{\alpha \cos x} \succ e^{\alpha \sin x}$.

Mit Hilfe dieser Oberfunktionen wollen wir die Berechnung des Fehlers (vgl. Satz 5.2) durchführen. In Tafel 6.5 sind die erzielten Ergebnisse angeführt. Wir sehen, daß sie sehr gut übereinstimmen. Diese Übereinstimmung hängt jedoch mit der Form der Funktion f zusammen, welche im Grunde identisch mit ihrer Majoranten ist. Nichts desto weniger ist diese Übereinstimmung sehr anschaulich.

Literatur

[1] *I. Babuška* (И. Бабушка): Оптимальные формулы квадратур. ДАН СССР 1963, *149*, 227—230.

[2] *I. Babuška, S. L. Sobolev* (И. Бабушка, С. Л. Соболев): Оптимализация численных методов. Apl. mat. *10* 1965, 96—129.

[3] *S. L. Sobolev* (С. Л. Соболев): Лекции по теории кубатурных формул, Новосибирск 1965.

[4] *A. Sard:* Linear Approximation, Providence 1963.

[5] *I. J. Schoenberg:* On monosplines of least Square Deviation and Best quadrature Formulae, II. J. Siam Num. Anal. vol. 32, 1966, 321—328.

[6] *I. Babuška:* Problems of optimization and numerical stability in computations, Apl. Mat. 1968, 3—26.

[7] *I. Babuška:* Über optimale Formeln zur numerischen Berechnung linearer Funktionale, Apl. Mat. 1965, 441—443.

[8] *I. Babuška:* Über die optimale Berechnung der Fourier'schen Koeffizienten, Apl. Mat. 1966, 113—123.

[9] *G. G. Dahlquist:* On Rigorous Error Bounds in the Numerical Solution of Ordinary Differential Equations. Numerical Solution of Nonlinear Dif. Equat., Wiley, 1966, 89—96.

[10] *F. L. Bauer, H. Rutishauser, E. Stiefel:* New Aspect in Numerical Quadrature, Proc. of Symp. in Appl. Mat. 1963, XV, 199—218.

[11] *R. Bauman:* Algol Manual der Alcor-Gruppe, Sonderdruck aus Elektronischen Rechenanlagen H 5/6 (1961) H 2 (1962) R, Oldenburg München.

[12] *R. E. Moore:* Interval Analysis. Prentice Hall, 1966.

Souhrn

O UNIVERSÁLNĚ OPTIMÁLNÍCH KVADRATURNÍCH FORMULÍCH

IVO BABUŠKA

Existuje řada prací, zabývajících se optimálními kvadraturními formulemi. Optimalizací se rozumí minimalizace normy funkcionálu chyb se v daném konkrétním funkcionálním prostoru. Optimální formule pak je zřejmě závislá na daném prostoru. V předložené práci se vyšetřují možnosti optimality resp. možnosti požadované optimality současně na třídě prostorů. Tyto otázky se vyšetřují na prostorech periodických funkcí.

Резюме

О УНИВЕРСАЛЬНО ОПТИМАЛЬНЫХ КВАДРАТУРНЫХ ФОРМУЛАХ

IVO BABUŠKA (Иво Бабушка)

Существует ряд работ, в которых изучаются оптимальные квадратурные формулы. Под оптимизацией понимается минимализация нормы функционала погрешностей в заданном конкретном функциональном пространстве. Оптимальная формула тогда очевидно зависит от заданного пространства. В настоящей работе рассматриваются возможности оптимизации, соотв. требуемой оптимизации одновременно на классе пространств. Эти вопросы рассматриваются на пространствах периодических функций.

Anschrift des Verfassers: Ing. Dr. *Ivo Babuška* DrSc., Matematický ústav ČSAV, Praha 1, Žitná 25.