Hana Kamasová; Antonín Šimek

Metoda inverze matice rozdělené na bloky

*Aplikace matematiky*, Vol. 14 (1969), No. 2, 105–114

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/103213`

# METODA INVERZE MATICE ROZDĚLENÉ NA BLOKY

HANA KAMASOVÁ, ANTONÍN ŠIMEK

(Došlo dne 20. září 1967)

## ÚVOD

Metoda inverze matice rozdělené na $2 \times 2$ bloky, která patří mezi klasické metody lineární algebry, je zpracována na příklad v [1], [2], [4]. Inverzí matice rozdělené na $3 \times 3$ bloky se zabývali W. J. DUNCAN v [3] a E. KOSKO v [5], [6]. W. J. Duncan provedl výpočet vzorců pro bloky inverzní matice. V jeho práci však není dokázána regularita pomocných matic. E. Kosko uvedl v [5] schema výpočtu a v [6] potom aplikoval tuto metodu na speciální druhy matic: různé symetrie bloků, jednotkové bloky, nulové bloky apod.

V naší práci je inverze matice vyřešena při rozdělení na $r \times r$ bloků. Rovněž jsou uvedeny podmínky pro regularitu pomocných matic.

V celém článku uvažujeme matice nad tělesem charakteristiky 0. Typy matic uvádíme pouze tam, kde nejsou evidentní. $\mathcal{N}$ značíme množinu přirozených čísel, $\mathcal{Z}$ množinu celých čísel, $\boldsymbol{E}$ jednotkovou matici řádu $n$, $\boldsymbol{E}_i$ jednotkovou matici řádu $n_i$. V důkazu věty v § 1 znamenají * bloky, které nevypisujeme, neboť nejsou pro důkaz podstatné.

**§ 1.** Nechť $\boldsymbol{A}$ je matice $n$-tého řádu rozdělená na bloky $\alpha_{i,k}$ typu $(n_i, n_k)$, $i, k = 1, 2, \ldots, r \leqq n$; $\sum_{i=1}^{r} n_i = \sum_{k=1}^{r} n_k = n$, $n_i, n_k \in \mathcal{N}$. Označme:

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{A}_1 = [\alpha_{1,1}]\,, \\
&\boldsymbol{A}_2 = \begin{bmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} \end{bmatrix}, \\
&\vdots \\
&\boldsymbol{A}_{r-1} = \begin{bmatrix} \alpha_{1,1} & \ldots & \alpha_{1,r-1} \\ \vdots & & \\ \alpha_{r-1,1} & \ldots & \alpha_{r-1,r-1} \end{bmatrix}, \\
&\boldsymbol{A}_r = \boldsymbol{A}\,.
\end{aligned}
\tag{1,1}
$$

Zavedeme: $\mathbf{Z}_{i,k}^{(p)}$ $i, k, p = 1, 2, \ldots, r$ takto:

1. $\mathbf{Z}_{i,k}^{(1)} = \alpha_{i,k}$ ,
2. $\mathbf{Z}_{i,k}^{(p)} = \mathbf{Z}_{i,k}^{(p-1)} - \mathbf{Z}_{i,p-1}^{(p-1)} \,.\, \mathbf{Z}_{p-1}^{-1} \,.\, \mathbf{Z}_{p-1,k}^{(p-1)}$ pro $p = 2, \ldots, r$,

kde $\mathbf{Z}_{p,p}^{(p)}$ označujeme pro stručnost $\mathbf{Z}_p$. Matice $\mathbf{Z}_{i,k}^{(p)}$ můžeme takto zavádět ovšem jen za předpokladu, že matice $\mathbf{Z}_p$ jsou regulární.

**Věta 1,1.** *Matice $\mathbf{Z}_p$ jsou regulární právě tehdy, když $\mathbf{A}_p$ jsou regulární pro $p = 1, \ldots, r$.*

Důkaz. Pro $r = 1$, $\mathbf{Z}_1 = \mathbf{A}_1$, tedy věta zřejmě platí. Pro $r > 1$ důkaz provedeme metodou úplné indukce podle $r$.

a) Nechť jsou regulární matice $\mathbf{A}_p$.

1. $r = 2$. Podle předpokladu $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$ jsou regulární, tedy matice $\mathbf{T}_1 = \begin{bmatrix} \alpha_{1,1}^{-1} & 0 \\ -\alpha_{2,1}\alpha_{1,1}^{-1} & \mathbf{E}_2 \end{bmatrix}$ je zřejmě regulární. Dále

$$\mathbf{T}_1 \,.\, \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_1 & \alpha_{1,1}^{-1}\alpha_{1,2} \\ 0 & \mathbf{Z}_2 \end{bmatrix}. \tag{1,2}$$

Z (1,2) plyne regularita $\mathbf{Z}_2$.

2. Nechť tvrzení platí pro $r$. Dokážeme, že platí pro $r + 1$. Podle předpokladu $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_r, \mathbf{A}_{r+1}$ jsou regulární. Rovněž matice

$$\mathbf{T}_1 = \begin{bmatrix} \alpha_{1,1}^{-1} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ -\alpha_{2,1}\alpha_{1,1}^{-1} & \mathbf{E}_2 & 0 & & \vdots \\ \vdots & 0 & \mathbf{E}_3 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & 0 \\ -\alpha_{r+1,1}\alpha_{1,1}^{-1} & 0 & 0 & & \mathbf{E}_{r+1} \end{bmatrix}, \tag{1,3}$$

$$\mathbf{T}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \mathbf{Z}_2^{-1} & 0 & & \vdots \\ \vdots & -\mathbf{Z}_{3,2}^{(2)}\mathbf{Z}_2^{-1} & \mathbf{E}_3 & & \vdots \\ \vdots & -\mathbf{Z}_{4,2}^{(2)}\mathbf{Z}_2^{-1} & 0 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & -\mathbf{Z}_{r+1,2}^{(2)}\mathbf{Z}_2^{-1} & 0 & & \mathbf{E}_{r+1} \end{bmatrix},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\mathbf{T}_r = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{E}_2 & & \vdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \mathbf{Z}_r^{-1} & \vdots \\ 0 & 0 & & -\mathbf{Z}_{r+1,r}^{(r)}\mathbf{Z}_r^{-1} & \mathbf{E}_{r+1} \end{bmatrix}$$

jsou regulární.

$$(1,4) \qquad \boldsymbol{T}_r . \boldsymbol{T}_{r-1} . \dots . \boldsymbol{T}_2 . \boldsymbol{T}_1 . \boldsymbol{A}_{r+1} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{E}_1 & * & * & \dots & * \\ 0 & \boldsymbol{E}_2 & * & & * \\ \vdots & 0 & \boldsymbol{E}_3 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & * \\ 0 & 0 & 0 & & \boldsymbol{Z}_{r+1} \end{bmatrix} .$$

Z (1,4) plyne regularita $\boldsymbol{Z}_{r+1}$.

b) Nechť $\boldsymbol{Z}_p$ jsou regulární.

1. $r = 2$; $\boldsymbol{Z}_2$, $\boldsymbol{T}_1$ jsou podle předpokladu regulární. Z (1,2) plyne regularita matice $\boldsymbol{A}_2$.

2. Nechť tvrzení platí pro $r$, dokážeme, že platí pro $r + 1$. Podle předpokladu $\boldsymbol{Z}_1, \boldsymbol{Z}_2, \dots, \boldsymbol{Z}_{r+1}$ jsou regulární, tedy $\boldsymbol{T}_1, \boldsymbol{T}_2, \dots, \boldsymbol{T}_r$ jsou regulární transformační matice. Rovněž pravá strana v rovnosti (1,4) je regulární, tedy je regulární i matice $\boldsymbol{A}_{r+1}$.

**§ 2.** V tomto paragrafu dokážeme ve větě 2,1 vzorce pro bloky inverzní matice k matici rozdělené na $r \times r$ bloků. V důkazu této věty použijeme tří lemmat, která nyní uvedeme.

**Lemma 2,1.** *Nechť matice* (1,1) *jsou regulární. Potom:*

$$\text{I.} \quad \boldsymbol{Z}_{i,k}^{(p)} = 0 \quad pro \quad i < p; \; p = 2, \dots, r; \; k = 1, \dots, r .$$

$$\text{II.} \quad \boldsymbol{Z}_{i,k}^{(p)} = 0 \quad pro \quad k < p; \; p = 2, \dots, r; \; i = 1, \dots, r .$$

Důkaz. Důkaz tvrzení I. provedeme metodou úplné indukce podle $p$.

1. $p = 2$; $\boldsymbol{Z}_{i,k}^{(2)} = \boldsymbol{Z}_{i,k}^{(1)} - \boldsymbol{Z}_{i,1}^{(1)} \boldsymbol{Z}_1^{-1} \boldsymbol{Z}_{1,k}^{(1)}$.

Je-li $i = 1 < p$, pak $\boldsymbol{Z}_{1,k}^{(2)} = \boldsymbol{Z}_{1,k}^{(1)} - \boldsymbol{Z}_1 \boldsymbol{Z}_1^{-1} \boldsymbol{Z}_{1,k}^{(1)} = 0$.

2. Nechť $\boldsymbol{Z}_{i,k}^{(p)} = 0$ pro $i < p$.

a) Pro $1 \leqq i < p$ platí $\boldsymbol{Z}_{i,k}^{(p)} = 0$, $\boldsymbol{Z}_{i,p}^{(p)} = 0$, tedy

$$\boldsymbol{Z}_{i,k}^{(p+1)} = \boldsymbol{Z}_{i,k}^{(p)} - \boldsymbol{Z}_{i,p}^{(p)} \boldsymbol{Z}_p^{-1} \boldsymbol{Z}_{p,k}^{(p)} = 0 .$$

b) Pro $i = p$, $\boldsymbol{Z}_{p,k}^{(p+1)} = \boldsymbol{Z}_{p,k}^{(p)} - \boldsymbol{Z}_p . \boldsymbol{Z}_p^{-1} \boldsymbol{Z}_{p,k}^{(p)} = 0$.

Důkaz tvrzení II. je podobný.

Nechť $V_{i,k}^{(p)}$ $(i, k, p = 1, \dots, r)$ je množina všech vybraných posloupností z posloupnosti čísel $i, i + 1, i + 2, \dots, p - 1, p, p - 1, \dots, k + 1, k$ majících tyto vlastnosti (2,1):

1° První člen každé vybrané posloupnosti je $i$, poslední je $k$.

2° Každé dva po sobě následující členy v libovolné z vybraných posloupností jsou různé.

Označme $b_{i,k}^{(p)}$ počet prvků množiny $V_{i,k}^{(p)}$.

**Lemma 2,2.**

$$b_{i,k}^{(p)} = 2^{k-i-1} + 2^{k-i} \cdot \frac{4^{p-k} - 1}{3} \quad \textit{pro} \quad i < k\,, \tag{2,2}$$

$$b_{i,k}^{(p)} = 2^{i-k-1} + 2^{i-k} \cdot \frac{4^{p-i} - 1}{3} \quad \textit{pro} \quad i > k\,, \tag{2,3}$$

$$b_{i,i}^{(p)} = 1 + \frac{4^{p-i} - 1}{3}\,. \tag{2,4}$$

Důkaz. Dokážeme (2,2). Nechť $i < k$. Označme $(V_{i,k}^{(p)})_l$ množinu všech posloupností s vlastnostmi (2,1), ve kterých je $l$ maximálním členem. Dále označme $(b_{i,k}^{(p)})_l$ počet prvků množiny $(V_{i,k}^{(p)})_l$. Zřejmě $V_{i,k}^{(p)} = \bigcup_{l=k}^{p} (V_{i,k}^{(p)})_l$, $\bigcap_{l=k}^{p} (V_{i,k}^{(p)})_l = \emptyset$, tedy

$$b_{i,k}^{(p)} = \sum_{l=k}^{p} (b_{i,k}^{(p)})_l\,. \tag{2,5}$$

I. Nechť $l \neq k$. a) Sestrojme posloupnosti daných vlastností, končící $l, l-1, \ldots$ $\ldots, k+1, k$. Mezi $i, l$ leží $l - i - 1$ členů, které můžeme vynechávat a tím získáme $\binom{l-i-1}{0} + \binom{l-i-1}{1} + \ldots + \binom{l-i-1}{l-i-1} = 2^{l-i-1}$ hledaných posloupností,

b) Podobně dostaneme $2^{l-k-1}$ posloupností, začínajících $i, i+1, \ldots, l-1, l$. Kombinováním obou těchto speciálních případů dostaneme

$$(b_{i,k}^{(p)})_l = 2^{l-k-1} \,.\, 2^{l-i-1} = 2^{2l-k-i-2}\,.$$

II. Nechť $l = k$. $(V_{i,k}^{(p)})_k$ obsahuje vybrané posloupnosti z posloupnosti čísel $i, i+1, \ldots, k-1, k$. Tedy $(b_{i,k}^{(p)})_k = 2^{k-i-1}$. Pak podle (2,5)

$$b_{i,k}^{(p)} = 2^{k-i-1} + \sum_{l=k+1}^{p} 2^{2l-k-i-2}\,. \tag{2,6}$$

Součet ve (2,6) je vlastně součtem geometrické posloupnosti, takže $b_{i,k}^{(p)} = 2^{k-i-1} + 2^{k-i}[(4^{p-k} - 1)/3]$, (2,2) platí. Podobným způsobem bychom dokázali (2,3), (2,4).

**Lemma 2,3.** *Pro* $b_{i,k}^{(p)}$ *z lemmatu 2,2 platí*:

(2,7) $b_{i,k}^{(p)} = b_{i+j,k+j}^{(p+j)}$, *kde* $j > -\min(i, k, p)$, $j \in \mathscr{Z}$;

(2,8) $b_{i,k}^{(p)} = b_{k,i}^{(p)}$;

(2,9) $b_{i,k}^{(p)} = \sum_{l=i+1}^{p} b_{l,k}^{(p)}$ *pro* $i < k$;

$$(2{,}10)\quad b_{i,k}^{(p)} = \sum_{l=k+1}^{p} b_{i,l}^{(p)} \quad pro\ i > k\,;$$

$$(2{,}11)\quad b_{i,i}^{(p)} = 1 + \sum_{l=i+1}^{p} b_{l,i}^{(p)}.$$

Důkaz. (2,7), (2,8) zřejmě plynou z (2,2) až (2,4). Dokážeme (2,9). Pro $i < k$

$$(2{,}12)\qquad b_{i,k}^{(p)} = \sum_{l=i+1}^{k-1} b_{l,k}^{(p)} + b_{k,k}^{(p)} + \sum_{l=k+1}^{p} b_{l,k}^{(p)}\,.$$

V prvním součtu (2,12) je $l < k$, tedy podle (2,2)

$$(2{,}13)\quad \sum_{l=i+1}^{k-1}\left(2^{k-l-1} + 2^{k-l}\frac{4^{p-k}-1}{3}\right) = \left(2^{k-1} + 2^{k}\frac{4^{p-k}-1}{3}\right)\sum_{l=i+1}^{k-1} 2^{-l} =$$

$$= 2^{k-i-1} + 2^{k-i}\frac{4^{p-k}-1}{3} - 1 - 2\,\frac{4^{p-k}-1}{3}\,.$$

Podle (2,4)

$$(2{,}14)\qquad b_{k,k}^{(p)} = 1 + \frac{4^{p-k}-1}{3}\,.$$

V třetím součtu (2,12) je $l > k$, podle (2,3) máme

$$(2{,}15)\qquad \sum_{l=k+1}^{p}\left(2^{l-k-1} + 2^{l-k}\frac{4^{p-l}-1}{3}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{l=k+1}^{p} 2^{l-k} + \frac{1}{3}\sum_{l=k+1}^{p} 2^{2p-l-k} - \frac{1}{3}\sum_{l=k+1}^{p} 2^{l-k} = \frac{4^{p-k}-1}{3}\,.$$

Sečtením (2,13), (2,14), (2,15) dostáváme (2,9). (2,10) plyne okamžitě z (2,9) podle (2,8). (2,11) rovněž platí podle (2,15).

**Věta 2,1.** *Nechť matice* (1,1) *jsou regulární,* $\mathbf{A}^{-1} = [\beta_{i,k}]$ *nechť je bloková matice konformní*) s* $\mathbf{A}$. *Potom*

$$\beta_{i,k} = \sum(-1)^{1+m(j_1,\ldots,j_s)}\, \mathbf{Z}_{j_1}^{-1}\mathbf{Z}_{j_1,j_2}^{(q_1)} \,.\, \mathbf{Z}_{j_2}^{-1}\mathbf{Z}_{j_2,j_3}^{(q_2)}\mathbf{Z}_{j_3}^{-1} \ldots \mathbf{Z}_{j_{s-1}}^{-1}\mathbf{Z}_{j_{s-1},j_s}^{(q_{s-1})}\mathbf{Z}_{j_s}^{-1}\,,$$

$$(i = j_1, j_2, \ldots, j_s = k) \in V_{i,k}^{(r)}\,,$$

$$q_t = \min(j_t, j_{t+1}),\ t = 1, \ldots, s-1\,,$$

kde $m(j_1, \ldots, j_s)$ je počet členů posloupnosti $i = j_1, j_2, \ldots, j_s = k$.

*) Blokové matice jsou konformní, jsou-li stejného typu a rovněž odpovídající si bloky jsou stejného typu.

Důkaz. Podle věty (1,1) $\mathbf{Z}_p$ jsou regulární ($p = 1, \ldots, r$). Spočteme $\mathbf{A} \,.\, \mathbf{A}^{-1} = [\gamma_{i,k}]$, kde $[\gamma_{i,k}]$ je bloková matice konformní s $\mathbf{A}$.

1. Nechť $i > k$.

$$\begin{aligned}(2,17) \quad \gamma_{i,k} = \sum_{j=1}^{r} \alpha_{i,j}\beta_{j,k} = \sum_{j=1}^{r} \mathbf{Z}_{i,j}^{(1)}\beta_{j,k} = {} & \mathbf{Z}_{i,1}^{(1)} \sum_{V_{1,k}^{(r)}} (-1)^{m_1+1} \mathbf{Z}_1^{-1} \ldots \mathbf{Z}_k^{-1} + \\ & + \mathbf{Z}_{i,2}^{(1)} \sum_{V_{2,k}^{(r)}} (-1)^{m_2+1} \mathbf{Z}_2^{-1} \ldots \mathbf{Z}_k^{-1} + \\ & + \mathbf{Z}_{i,3}^{(1)} \sum_{V_{3,k}^{(r)}} (-1)^{m_3+1} \mathbf{Z}_3^{-1} \ldots \mathbf{Z}_k^{-1} + \ldots + \\ & + \mathbf{Z}_{i,r}^{(1)} \sum_{V_{r,k}^{(r)}} (-1)^{m_r+1} \mathbf{Z}_r^{-1} \ldots \mathbf{Z}_k^{-1} ,\end{aligned}$$

kde sčítáme přes prvky množin $V_{1,k}^{(r)}, V_{2,k}^{(r)}, \ldots, V_{r,k}^{(r)}$, $m_1, m_2, \ldots, m_r$ jsou počty členů posloupností, přes které sčítáme.

Podle lemmatu 2,3 obsahuje první součet ve (2,17) stejný počet sčítanců jako všechny ostatní součty dohromady. Prvky z $V_{1,k}^{(r)}$ dostaneme, když ke všem prvkům z $V_{2,k}^{(r)}, \ldots, V_{r,k}^{(r)}$ přidáme jedničku jakožto první člen. Sčítance, odpovídající posloupnostem $(1, i, j_2, \ldots, k) \in V_{1,k}^{(r)}$ a $(i, j_2, \ldots, k) \in V_{i,k}^{(r)}$ mají různá znaménka.

Vytkneme-li z prvního a druhého součtu ve (2,17) $\sum_{V_{2,k}^{(r)}} (-1)^{m_2+1} \mathbf{Z}_2^{-1} \ldots \mathbf{Z}_k^{-1}$, máme

$$(-\mathbf{Z}_{i,1}^{(1)}\mathbf{Z}_1^{-1}\mathbf{Z}_{1,2}^{(1)} + \mathbf{Z}_{i,2}^{(1)}) \sum_{V_{2,k}^{(r)}} (-1)^{m_2+1} \mathbf{Z}_2^{-1} \ldots \mathbf{Z}_k^{-1} .$$

Podobně vytkneme z prvního a třetího součtu ve (2,17) $\sum_{V_{3,k}^{(r)}} (-1)^{m_3+1} \mathbf{Z}_3^{-1} \ldots \mathbf{Z}_k^{-1}$ atd., až z prvního a $r$-tého součtu vytkneme $\sum_{V_{r,k}^{(r)}} (-1)^{m_r+1} \mathbf{Z}_r^{-1} \ldots \mathbf{Z}_k^{-1}$. Pak

$$\begin{aligned}(2,18) \quad \gamma_{i,k} = {} & \mathbf{Z}_{i,2}^{(2)} \sum_{V_{2,k}^{(r)}} (-1)^{m_2+1} \mathbf{Z}_2^{-1} \ldots \mathbf{Z}_k^{-1} + \mathbf{Z}_{i,3}^{(2)} \sum_{V_{3,k}^{(r)}} (-1)^{m_3+1} \mathbf{Z}_3^{-1} \ldots \mathbf{Z}_k^{-1} + \\ & + \ldots + \mathbf{Z}_{i,r}^{(2)} \sum_{V_{r,k}^{(r)}} (-1)^{m_r+1} \mathbf{Z}_r^{-1} \ldots \mathbf{Z}_k^{-1} .\end{aligned}$$

Podobnými úpravami po $r - 1$ krocích dostaneme:

$$\begin{aligned}(2,19) \quad \gamma_{i,k} = {} & \mathbf{Z}_{i,r}^{(r)} \sum_{V_{r,k}^{(r)}} (-1)^{m_r+1} \mathbf{Z}_r^{-1} \ldots \mathbf{Z}_k^{-1} + \\ & + \mathbf{Z}_{i,r-1}^{(r-1)} \sum_{V_{r-1,k}^{(r-1)}} (-1)^{m_{r-1}+1} \mathbf{Z}_{r-1}^{-1} \ldots \mathbf{Z}_k^{-1} + \\ & + \ldots + \mathbf{Z}_i \sum_{V_{i,k}^{(i)}} (-1)^{m_i+1} \mathbf{Z}_i^{-1} \ldots \mathbf{Z}_k^{-1} + \ldots + \mathbf{Z}_{i,k}^{(k)}\mathbf{Z}_k^{-1} .\end{aligned}$$

Podle lemmatu 2,1 je $\mathbf{Z}_{i,k}^{(p)} = 0$ pro $i < p$, tudíž

$$\mathbf{Z}_{i,r}^{(r)} = \mathbf{Z}_{i,r-1}^{(r-1)} = \ldots = \mathbf{Z}_{i,i+1}^{(i+1)} = 0 .$$

Tedy

$$\begin{aligned}\gamma_{i,k} = \mathbf{Z}_i \sum_{V_{i,k}(i)} (-1)^{m_i+1} \mathbf{Z}_i^{-1} \ldots \mathbf{Z}_k^{-1} + \\ + \mathbf{Z}_{i,i-1}^{(i-1)} \sum_{V_{i-1,k}(i-1)} (-1)^{m_{i-1}+1} \mathbf{Z}_{i-1}^{-1} \ldots \mathbf{Z}_k^{-1} + \\ + \mathbf{Z}_{i,i-2}^{(i-2)} \sum_{V_{i-2,k}(i-2)} (-1)^{m_{i-2}+1} \mathbf{Z}_{i-2}^{-1} \ldots \mathbf{Z}_k^{-1} + \ldots + \mathbf{Z}_{i,k}^{(k)} \mathbf{Z}_k^{-1} .\end{aligned} \tag{2,20}$$

Podle lemmatu 2,3 první součet ve (2,20) má tolik sčítanců jako všechny ostatní součty dohromady. V prvním součtu (2,20) $\mathbf{Z}_i \,.\, \mathbf{Z}_i^{-1} = \mathbf{E}_i$; tudíž všechny sčítance v prvním součtu jsou až na znaménka stejné, jako sčítance ve zbývajících součtech, tedy $\gamma_{i,k} = 0$.

2. Nechť $i < k$.

Úpravami jako v předcházejícím případě dostaneme

$$\gamma_{ik} = \mathbf{Z}_{i,r}^{(r)} \sum_{V_{r,k}(r)} (-1)^{m_r+1} \mathbf{Z}_r^{-1} \ldots \mathbf{Z}_k^{-1} + \ldots + \mathbf{Z}_{i,k}^{(k)} \mathbf{Z}_k^{-1} .$$

Podle lemmatu 2,1 je $\gamma_{i,k} = 0$.

3. Nechť $i = k$.

$$\gamma_{i,i} = \mathbf{Z}_{i,r}^{(r)} \sum_{V_{r,k}(r)} (-1)^{m_r+1} \mathbf{Z}_r^{-1} \ldots \mathbf{Z}_k^{-1} + \ldots + \mathbf{Z}_i \mathbf{Z}_i^{-1} = \mathbf{E}_i .$$

§ 3. Příklad:

Nechť $r = 3$. Je dána matice $\mathbf{A}$ řádu $n \geqq 3$; $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$, $\mathbf{A}_3 = \mathbf{A}$ jsou regulární. Spočteme $\mathbf{A}^{-1}$ podle věty 2,1.

Nejprve sestrojíme množiny $V_{i,k}^{(3)}$.

$$\begin{aligned}
V_{1,1}^{(3)} &= \{(1, 2, 3, 2, 1); (1, 2, 3, 1); (1, 3, 2, 1); (1, 2, 1); (1, 3, 1); (1)\} ,\\
V_{1,2}^{(3)} &= \{(1, 2, 3, 2); (1, 3, 2); (1, 2)\} ,\\
V_{1,3}^{(3)} &= \{(1, 2, 3); (1, 3)\} ,\\
V_{2,1}^{(3)} &= \{(2, 3, 2, 1); (2, 3, 1); (2, 1)\} ,\\
V_{2,2}^{(3)} &= \{(2, 3, 2); (2)\} ,\\
V_{2,3}^{(3)} &= \{(2, 3)\} ,\\
V_{3,1}^{(3)} &= \{(3, 2, 1); (3, 1)\} ,\\
V_{3,2}^{(3)} &= \{(3, 2)\} ,\\
V_{3,3}^{(3)} &= \{(3)\} .
\end{aligned}$$

Podle (2,16) tedy:

$$
\begin{aligned}
(3,1) \qquad \beta_{1,1} &= \mathbf{Z}_1^{-1}\mathbf{Z}_{1,2}^{(1)}\mathbf{Z}_2^{-1}\mathbf{Z}_{2,3}^{(2)}\mathbf{Z}_3^{-1}\mathbf{Z}_{3,2}^{(2)}\mathbf{Z}_2^{-1}\mathbf{Z}_{2,1}^{(1)}\mathbf{Z}_1^{-1} - \\
&\quad - \mathbf{Z}_1^{-1}\mathbf{Z}_{1,2}^{(1)}\mathbf{Z}_2^{-1}\mathbf{Z}_{2,3}^{(2)}\mathbf{Z}_3^{-1}\mathbf{Z}_{3,1}^{(1)}\mathbf{Z}_1^{-1} - \mathbf{Z}_1^{-1}\mathbf{Z}_{1,3}^{(1)}\mathbf{Z}_3^{-1}\mathbf{Z}_{3,2}^{(2)}\mathbf{Z}_2^{-1}\mathbf{Z}_{2,1}^{(1)}\mathbf{Z}_1^{-1} + \\
&\quad + \mathbf{Z}_1^{-1}\mathbf{Z}_{1,2}^{(1)}\mathbf{Z}_2^{-1}\mathbf{Z}_{2,1}^{(1)}\mathbf{Z}_1^{-1} + \mathbf{Z}_1^{-1}\mathbf{Z}_{1,3}^{(1)}\mathbf{Z}_3^{-1}\mathbf{Z}_{3,1}^{(1)}\mathbf{Z}_1^{-1} + \mathbf{Z}_1^{-1}, \\
\beta_{1,2} &= - \mathbf{Z}_1^{-1}\mathbf{Z}_{1,2}^{(1)}\mathbf{Z}_2^{-1}\mathbf{Z}_{2,3}^{(2)}\mathbf{Z}_3^{-1}\mathbf{Z}_{3,2}^{(2)}\mathbf{Z}_2^{-1} + \mathbf{Z}_1^{-1}\mathbf{Z}_{1,3}^{(1)}\mathbf{Z}_3^{-1}\mathbf{Z}_{3,2}^{(2)}\mathbf{Z}_2^{-1} - \\
&\quad - \mathbf{Z}_1^{-1}\mathbf{Z}_{1,2}^{(1)}\mathbf{Z}_2^{-1}, \\
\beta_{1,3} &= \mathbf{Z}_1^{-1}\mathbf{Z}_{1,2}^{(1)}\mathbf{Z}_2^{-1}\mathbf{Z}_{2,3}^{(2)}\mathbf{Z}_3^{-1} - \mathbf{Z}_1^{-1}\mathbf{Z}_{1,3}^{(1)}\mathbf{Z}_3^{-1}, \\
\beta_{2,1} &= - \mathbf{Z}_2^{-1}\mathbf{Z}_{2,3}^{(2)}\mathbf{Z}_3^{-1}\mathbf{Z}_{3,2}^{(2)}\mathbf{Z}_2^{-1}\mathbf{Z}_{2,1}^{(1)}\mathbf{Z}_1^{-1} + \mathbf{Z}_2^{-1}\mathbf{Z}_{2,3}^{(2)}\mathbf{Z}_3^{-1}\mathbf{Z}_{3,1}^{(1)}\mathbf{Z}_1^{-1} - \\
&\quad - \mathbf{Z}_2^{-1}\mathbf{Z}_{2,1}^{(1)}\mathbf{Z}_1^{-1}, \\
\beta_{2,2} &= \mathbf{Z}_2^{-1}\mathbf{Z}_{2,3}^{(2)}\mathbf{Z}_3^{-1}\mathbf{Z}_{3,2}^{(2)}\mathbf{Z}_2^{-1} + \mathbf{Z}_2^{-1}, \\
\beta_{2,3} &= - \mathbf{Z}_2^{-1}\mathbf{Z}_{2,3}^{(2)}\mathbf{Z}_3^{-1}, \\
\beta_{3,1} &= \mathbf{Z}_3^{-1}\mathbf{Z}_{3,2}^{(2)}\mathbf{Z}_2^{-1}\mathbf{Z}_{2,1}^{(1)}\mathbf{Z}_1^{-1} - \mathbf{Z}_3^{-1}\mathbf{Z}_{3,1}^{(1)}\mathbf{Z}_1^{-1}, \\
\beta_{3,2} &= - \mathbf{Z}_3^{-1}\mathbf{Z}_{3,2}^{(2)}\mathbf{Z}_2^{-1}, \\
\beta_{3,3} &= \mathbf{Z}_3^{-1}.
\end{aligned}
$$

Stejné výsledky jako ve (3,1) bychom dostali řešením soustav maticových rovnic:

$$
\begin{array}{lll}
\text{I.} \ \sum_{i=1}^{3} \alpha_{1,i}\beta_{i,1} = \mathbf{E}_1, & \text{II.} \ \sum_{i=1}^{3} \alpha_{2,i}\beta_{i,1} = 0, & \text{III.} \ \sum_{i=1}^{3} \alpha_{3,i}\beta_{i,1} = 0, \\
\sum_{i=1}^{3} \alpha_{1,i}\beta_{i,2} = 0, & \sum_{i=1}^{3} \alpha_{2,i}\beta_{i,2} = \mathbf{E}_2, & \sum_{i=1}^{3} \alpha_{3,i}\beta_{i,2} = 0, \\
\sum_{i=1}^{3} \alpha_{1,i}\beta_{i,3} = 0, & \sum_{i=1}^{3} \alpha_{2,i}\beta_{i,3} = 0; & \sum_{i=1}^{3} \alpha_{3,i}\beta_{i,3} = \mathbf{E}_3.
\end{array}
$$

(3,1) ověříme násobením $\mathbf{A} \,.\, \mathbf{A}^{-1} = [\gamma_{i,k}]$. Například

$$
\begin{aligned}
\gamma_{2,2} = \sum_{i=1}^{3} \alpha_{2,i}\beta_{i,2} &= - \mathbf{Z}_{2,1}^{(1)}\mathbf{Z}_1^{-1}\mathbf{Z}_{1,2}^{(1)}\mathbf{Z}_2^{-1}\mathbf{Z}_{2,3}^{(2)}\mathbf{Z}_3^{-1}\mathbf{Z}_{3,2}^{(2)}\mathbf{Z}_2^{-1} + \\
&\quad + \mathbf{Z}_{2,1}^{(1)}\mathbf{Z}_1^{-1}\mathbf{Z}_{1,3}^{(1)}\mathbf{Z}_3^{-1}\mathbf{Z}_{3,2}^{(2)}\mathbf{Z}_2^{-1} - \mathbf{Z}_{2,1}^{(1)}\mathbf{Z}_1^{-1}\mathbf{Z}_{1,2}^{(1)}\mathbf{Z}_2^{-1} + \\
&\quad + \mathbf{Z}_{2,2}^{(1)}\mathbf{Z}_2^{-1}\mathbf{Z}_{2,3}^{(2)}\mathbf{Z}_3^{-1}\mathbf{Z}_{3,2}^{(2)}\mathbf{Z}_2^{-1} + \mathbf{Z}_{2,2}^{(1)}\mathbf{Z}_2^{-1} - \mathbf{Z}_{2,3}^{(1)}\mathbf{Z}_3^{-1}\mathbf{Z}_{3,2}^{(2)}\mathbf{Z}_2^{-1} = \\
&= \mathbf{Z}_2 \,.\, \mathbf{Z}_2^{-1}\mathbf{Z}_{2,3}^{(2)}\mathbf{Z}_3^{-1}\mathbf{Z}_{3,2}^{(2)}\mathbf{Z}_2^{-1} - \mathbf{Z}_{2,3}^{(2)}\mathbf{Z}_3^{-1}\mathbf{Z}_{3,2}^{(2)}\mathbf{Z}_2^{-1} + \mathbf{Z}_2\mathbf{Z}_2^{-1} = \\
&= - \mathbf{Z}_{2,3}^{(3)}\mathbf{Z}_3^{-1}\mathbf{Z}_{3,2}^{(2)}\mathbf{Z}_2^{-1} + \mathbf{E}_2 = \mathbf{E}_2, \\
\gamma_{2,3} = \sum_{i=1}^{3} \alpha_{2,i}\beta_{i,3} &= \mathbf{Z}_{2,1}^{(1)}\mathbf{Z}_1^{-1}\mathbf{Z}_{1,2}^{(1)}\mathbf{Z}_2^{-1}\mathbf{Z}_{2,3}^{(2)}\mathbf{Z}_3^{-1} - \\
&\quad - \mathbf{Z}_{2,1}^{(1)}\mathbf{Z}_1^{-1}\mathbf{Z}_{1,3}^{(1)}\mathbf{Z}_3^{-1} - \mathbf{Z}_{2,2}^{(1)}\mathbf{Z}_2^{-1}\mathbf{Z}_{2,3}^{(2)}\mathbf{Z}_3^{-1} + \mathbf{Z}_{2,3}^{(1)}\mathbf{Z}_3^{-1} = \\
&= - \mathbf{Z}_2\mathbf{Z}_2^{-1}\mathbf{Z}_{2,3}^{(2)}\mathbf{Z}_3^{-1} + \mathbf{Z}_{2,3}^{(2)}\mathbf{Z}_3^{-1} = \mathbf{Z}_{2,3}^{(3)}\mathbf{Z}_3^{-1} = 0.
\end{aligned}
$$

## *Literatura*


[1] *E. Bodewig;* Matrix calculus, Amsterdam 1956.

[2] *B. P. Děmidovič, I. A. Maron:* Základy numerické matematiky, Praha 1966.

[3] *W. J. Duncan:* Reciprocation of Triply Partitioned Matrices, Journal of the Royal Aeronautical Society, Vol. 60, Feb. 1956, str. 131—132.

[4] *Ф. Р. Гантмахер:* Теория матриц, Москва 1966.

[5] *E. Kosko:* Matrix Inversion by Partitioning, The Aeronautical Quarterly, Vol. VIII, 1957, str. 157—184.

[6] *E. Kosko:* Reciprocation of Triply Partitioned Matrices, Journal of the Royal Aeronautical Society, Vol. 60, July 1956, str. 490—491.


## Summary

# A METHOD OF INVERSION OF A PARTITIONED MATRIX


Hana Kamasová, Antonín Šimek



In this paper a method of inversion of a matrix partitioned into $r \times r$ blocks is studied.

Let $\mathbf{A}$ be a matrix of order $n \geqq r$ partitioned into blocks $\alpha_{i,k}$ of the type $(n_i \times n_k)$, $\sum_{i=1}^{r} n_i = \sum_{k=1}^{r} n_k = n$; further let

$$
(1) \qquad
\begin{aligned}
\mathbf{A}_1 &= \begin{bmatrix} \alpha_{1,1} \end{bmatrix} \\
\mathbf{A}_2 &= \begin{bmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} \end{bmatrix} \\
&\;\vdots \\
\mathbf{A}_{r-1} &= \begin{bmatrix} \alpha_{1,1} & \dots & \alpha_{1,r-1} \\ \vdots & & \\ \alpha_{r-1,1} & \dots & \alpha_{r-1,r-1} \end{bmatrix} \\
\mathbf{A}_r &= \mathbf{A}\,.
\end{aligned}
$$

Consider the matrices $\mathbf{Z}_{i,k}^{(p)}$ for $i, k, p = 1, \dots, r$ defined as follows:

1. $\mathbf{Z}_{i,k}^{(1)} = \alpha_{i,k}$
2. $\mathbf{Z}_{i,k}^{(p)} = \mathbf{Z}_{i,k}^{(p-1)} - \mathbf{Z}_{i,p-1}^{(p-1)} \mathbf{Z}_{p-1}^{-1} \mathbf{Z}_{p-1,k}^{(p-1)}\,, \quad p = 2, \dots, r\,;$

where the matrices $\mathbf{Z}_{p,p}^{(p)} = \mathbf{Z}_p$ are assumed to be regular.

Let $V_{i,k}^{(p)}$ denote the set of all subsequences of the sequence

$$(i, i + 1, \dots, p - 1, p, p - 1, \dots, k + 1, k)$$

which have the following properties:

1. The first element is $i$, the last one is $k$.

2. Each two neighbouring elements in an arbitrary of the subsequencies are different.

The main result of this paper reads as follows.

**Theorem.** *Let the matrices* (1) *be regular and let* $\mathbf{A}^{-1} = [\beta_{i,k}]$ *be a partitioned matrix conformal to* $\mathbf{A}$. *Then we have*

$$\beta_{i,k} = \sum (-1)^{1+m(j_1,\ldots,j_s)} \mathbf{Z}_{j_1}^{-1} \mathbf{Z}_{j_1,j_2}^{(q_1)} \mathbf{Z}_{j_2}^{-1} \mathbf{Z}_{j_2,j_3}^{(q_2)} \mathbf{Z}_{j_3}^{-1} \ldots \mathbf{Z}_{j_{s-1}}^{-1} \mathbf{Z}_{j_{s-1},j_s}^{(q_{s-1})} \mathbf{Z}_{j_s}^{-1} ,$$

$$(i = j_1, j_2, \ldots, j_s = k) \in V_{i,k}^{(r)}$$

$$q_t = \min (j_t, j_{t+1}) , \quad t = 1, \ldots, s-1 ,$$

*where* $m(j_1, \ldots, j_s)$ *is the number of the elements of the sequence* $i = j_1, \ldots, j_s = k$.

*Adresa autorů: Hana Kamasová, Antonín Šimek,* Vysoká škola chemicko-technologická, katedra matematiky, Technická 1905, Praha 6.