Aplikace matematiky

František Zítek

Über die Kundenreihenfolge in Bedienungssystemen

Aplikace matematiky, Vol. 15 (1970), No. 5, 356–383

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/103307

ÜBER DIE KUNDENREIHENFOLGE IN BEDIENUNGSSYSTEMEN

František Zítek

(Eingelangt am 15. Oktober 1969)

1. Einleitung

Die Outputprozesse, die die Austritte der Kunden aus Bedienungssystemen beschreiben, werden meistens dann gründlich untersucht, wenn es sich um Tandemsysteme, oder noch allgemeiner um Bedienungsnetzwerke handelt. Eines der wichtigsten Ergebnisse, die in diesem Gebiete bekannt sind, besteht in der Tatsache, daß der Outputprozeß eines Bedienungssystems des Typs $M/M/n$ im Gleichgewicht wieder derselbe ist wie der entsprechende Inputprozeß, also wieder ein homogener Poissonprozeß mit demselben Parameter. Man kann also sagen, daß sich die stochastische Struktur des Kundenstromes nicht ändert, wenn er ein System $M/M/n$ durchläuft.

Ganz anders sieht jedoch die Situation aus, wenn man sie vom Standpunkte der einzelnen Kunden aus betrachtet. Die Intervalle zwischen den Zeitpunkten, in welchen die bedienten Kunden das Bedienungssystem verlassen, sind zwar immer — genau wie die Intervalle zwischen den einzelnen Eintreffenszeitpunkten — stochastisch unabhängige Zufallsgrößen mit derselben Exponentialverteilung, aber die *Reihenfolge* der Kunden am Ausgang des Systems muß nicht unbedingt dieselbe sein wie am Eingang.

Änderungen der Kundenreihenfolge können an zwei Stellen und aus zweierlei Gründen vorkommen: in der Warteschlange und während der Bedienung. Daß die Reihenfolge der Kunden (die durch die Folge ihrer Eintreffenszeitpunkte gegeben ist) im Verlauf der ganzen Wartezeit in der Schlange unverändert bleibt, ist eben eine charakteristische Eigenschaft *der natürlichen Warteordnung*[1]) („first-come-first-served queueing discipline"); bei anderen Warteordnungen können jedoch die Kunden die Schlange in einer anderen Reihenfolge verlassen.

Die Möglichkeit einer Änderung der Reihenfolge während der Bedienung der Kunden ist in solchen Systemen gegeben, wo mehrere parallele Bedienungsstellen

[1]) Die deutsche Terminologie wurde wo möglich der Monographie [1] entnommen.

arbeiten, also z.B. in den Systemen $M/M/n$ mit $n > 1$: ein Kunde mit kurzer Bedienungszeit kann einen anderen mit längerer Bedienungszeit überholen, obwohl dieser früher in das System angekommen ist als jener, falls sie natürlich von zwei parallelen Bedienungsstellen gleichzeitig bedient werden.[2])

Das Hauptziel, das wir in unserer Arbeit verfolgen, ist das Studium einiger wahrscheinlichkeitstheoretischer Probleme, die mit den Änderungen der Kundenreihenfolge in Systemen $M/M/n$ im Gleichgewicht verbunden sind. Die beiden Arten von Änderungen werden wir getrennt untersuchen, auch wenn es ganz klar ist, daß sie sich beliebig und unabhängig kombinieren lassen. Zuerst werden wir die Änderungen während der Bedienungszeit betrachten. Einfachheitshalber begrenzen wir uns dabei auf Systeme mit nur zwei Bedienungsstellen.

2. Das System $M/M/2$ mit natürlicher Warteordnung

Die Kunden betreten ein solches System einzeln, zufällig und unabhängig, so daß ihre Eintreffenzeitpunkte einen homogenen Poissonprozeß mit dem Parameter λ, $0 < \lambda < \infty$, erzeugen. Ihnen zur Verfügung stehen zwei parallele, unabhängige und völlig gleichwertige Bedienungsstellen; die Bedienungszeiten der einzelnen Kunden sind voneinander sowie auch vom Inputprozeß unabhängige Zufallsgrößen, alle mit derselben Exponentialverteilung mit dem Parameter μ, $0 < \mu < \infty$. Wir setzen stets voraus, daß $\lambda < 2\mu$ ist, d.h. daß $\varrho = \lambda/2\mu < 1$ ist, so daß sich das System stabilisieren kann. Im folgenden werden wir uns nur mit *Systemen im Gleichgewicht* beschäftigen.

Für ein solches System sind dann die Wahrscheinlichkeiten bekannt (siehe z.B. [1] oder [4])

$$p_0 = (1 - \varrho)(1 + \varrho)^{-1}\,, \qquad p_k = 2p_0\varrho^k\,, \quad k = 1, 2, 3, \ldots, \tag{2.1}$$

die wir auch folgendermaßen deuten können: ein „beliebig" gewählter Kunde $\mathscr{K}$ findet im Augenblicke seines Eintreffens in das System mit der Wahrscheinlichkeit p_k ($k = 0, 1, 2, \ldots$) gerade k andere Kunden, die schon im System (also in der Schlange und in der Bedienung zusammen) anwesend sind.

Da sich aber bei der natürlichen Warteordnung die Reihenfolge der Kunden in der Schlange nicht ändert, wollen wir uns vielmehr für die Anzahl der Kunden interessieren, welche im System gerade in dem Augenblick t' anwesend sind, in dem

[2]) Es sei jedoch gleich bemerkt, daß das bloße Vorhandensein von mehreren parallelen Bedienungsstellen allein noch nicht für eine Änderung der Kundenreihenfolge genügend ist: in einem System des Typs $M/D/n$ zum Beispiel bleibt die Reihenfolge während der Bedienung sicher unverändert, auch wenn $n > 1$ ist. Die Voraussetzung einer *zufälligen* Bedienungszeit ist also auch wichtig. In dieser Arbeit möchten wir uns jedenfalls nur mit Systemen des Typs $M/M/n$ befassen.

mit der Bedienung des Kunden $\mathscr{K}$ begonnen wird (in dem er also die Schlange verläßt und in die Bedienungsstelle eintritt), und natürlich auch dafür, wie sich diese Anzahl während der ganzen Bedienungszeit des Kunden $\mathscr{K}$ ändert.

Mit unserem Kunden $\mathscr{K}$ können im System gleichzeitig anwesend sein: einerseits Kunden, welche in das System früher als $\mathscr{K}$ eingetroffen sind – die werden wir *ältere* Kunden nennen und ihre Anzahl mit a bezeichnen; anderseits Kunden, welche in das System erst später als $\mathscr{K}$ gekommen sind – die werden wir *neuere* Kunden nennen und ihre Anzahl mit b bezeichnen.

Welche sind zunächst die möglichen Werte der Größen a und b zum Zeitpunkte t', in dem gerade die Bedienung unseres Kunden $\mathscr{K}$ beginnt? Da wir voraussetzen, daß im System die natürliche Warteordnung gilt, können im Augenblick t' keine älteren Kunden in der Schlange stehen: sie sind alle schon in der Bedienung. Im ganzen System gibt es jedoch nur zwei Bedienungsstellen und eine davon wird eben von $\mathscr{K}$ besetzt: es ist also immer $a \leqq 1$. Die Anzahl der neueren Kunden, die in t' im System anwesend sind (alle stehen in der Schlange), ist fast beliebig, mit einer einzigen Begrenzung – die beiden Größen a und b sind voneinander nicht unabhängig: ist $a = 0$ (in t'), so muß auch $b = 0$ sein. Das kann man sofort einsehen: a kann nur dann gleich Null sein, wenn der Kunde $\mathscr{K}$ in ein leeres System eingetroffen ist, dann wird er aber sofort in die Bedienung eingenommen, ohne warten zu müssen; im Augenblick t' ist er also ganz allein im System. Es ist $b = 0$ auch dann, wenn der Kunde $\mathscr{K}$ in einem solchen Augenblicke kommt, in dem sich im System ein einziger älterer Kunde befindet.

Welche sind jetzt die *Wahrscheinlichkeiten* der verschiedenen Werte der Größen a und b im Augenblick t'? Wenn $\mathscr{K}$ in ein leeres System eintritt – was mit der Wahrscheinlichkeit p_0 geschieht – dann ist, wie wir eben gesehen haben, $a = b = 0$. In allen anderen Fällen ist $a = 1$; es sind also nun die Wahrscheinlichkeiten der Werte $b = 0, 1, 2, \ldots$ bei $a = 1$ zu bestimmen.

Wenn $\mathscr{K}$ im Augenblick seines Eintreffens nur einen anderen (älteren) Kunden im System findet, wird er auch ohne Warten in die Bedienung eingenommen, so daß dann notwendigerweise $b = 0$ ist; die Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses ist p_1. In allen anderen Fällen muß $\mathscr{K}$ auf die Bedienung warten und da ist b gerade die Anzahl der neueren Kunden, die während der Wartezeit W des Kunden $\mathscr{K}$ in das System gekommen sind. Die Zufallsgröße W hat aber (siehe z.B. [1], S. 100 oder [4], S. 106) die Verteilung

$$(2.2)\quad \mathbf{P}\{W = 0\} = p_0 + p_1 = (1 - \varrho)(1 + 2\varrho)(1 + \varrho)^{-1} = 1 - 2\varrho^2(1 + \varrho)^{-1},$$

$$\mathbf{P}\{W > w\} = \frac{2\varrho^2}{1 + \varrho} \exp\left[-(2\mu - \lambda)\, w\right], \quad w \geqq 0\,.$$

Daraus ergeben sich durch ein bekanntes Verfahren (s. [4] § IV. 3 und § IV. 4) die Wahrscheinlichkeiten P_m der Ereignisse $b = m$ $(m = 0, 1, 2, \ldots)$ in dem Fall, daß $\mathscr{K}$ wirklich warten muß:

$$(2.3)\qquad P_m = \int_0^\infty \frac{(\lambda w)^m}{m!} e^{-\lambda w} \frac{2\varrho^2}{1+\varrho} (2\mu - \lambda) e^{-(2\mu-\lambda)w} \,\mathrm{d}w =$$
$$= \frac{\lambda^m}{2^m \mu^m} \frac{2\varrho^2}{1+\varrho} \frac{2\mu - \lambda}{2\mu} \int_0^\infty 2\mu e^{-2\mu w} \frac{(2\mu w)^m}{m!} \,\mathrm{d}w =$$
$$= \varrho^m \frac{2\varrho^2}{1+\varrho} (1-\varrho) = 2 \frac{1-\varrho}{1+\varrho} \varrho^{m+2} = p_2 \varrho^m = p_{m+2}\,.$$

Insgesamt haben wir also im Augenblicke t':

$$(2.4)\qquad \begin{aligned} \mathbf{P}\{a=0, b=0\} &= p_0 &&= (1-\varrho)(1+\varrho)^{-1}\,, \\ \mathbf{P}\{a=1, b=0\} &= p_1 + p_2 &&= 2\varrho(1-\varrho)\,, \\ \mathbf{P}\{a=1, b=m\} &= p_{m+2} &&= 2p_0\varrho^{m+2}\,, \quad m = 1, 2, 3, \ldots. \end{aligned}$$

Wir gehen jetzt zur Untersuchung der nachfolgenden Änderungen der Anzahl b, bzw. a über, welche zwischen dem Zeitpunkt t' und dem Zeitpunkt, in dem $\mathscr{K}$ das System verläßt, stattfinden. Es ist dabei klar, daß die einzige Änderung der Anzahl a, die überhaupt möglich ist, darin besteht, daß $a = 1$ zu $a = 0$ wird, was in dem Falle geschieht, wenn der ältere Kunde, der mit $\mathscr{K}$ gleichzeitig bedient wird, das System früher als $\mathscr{K}$ verläßt, d.h. wenn seine Bedienungszeit früher als die des Kunden $\mathscr{K}$ endet. Die Bedienungszeit des Kunden $\mathscr{K}$ und der Rest der Bedienungszeit des älteren Kunden, die nach dem Augenblick t' noch übrig bleibt, sind aber zwei voneinander unabhängige Zufallsgrößen, welche beide dieselbe Exponentialverteilung mit dem Parameter μ haben. Wir sehen also, daß die Wahrscheinlichkeit, daß a zu 0 wird, gleich $\frac{1}{2}$ ist; mit derselben Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ bleibt $a = 1$ während der ganzen Bedienungszeit des Kunden $\mathscr{K}$. In diesem Falle – und nur in diesem – überholt der Kunde $\mathscr{K}$ einen älteren (und zwar den eben vorherigen) Kunden – und wird natürlich selbst von keinem neueren Kunden überholt. Die gesamte Wahrscheinlichkeit dieser (einzig möglichen) aktiven Überholung ist also

$$(2.5)\qquad P_{\mathrm{akt}} = (1 - p_0)\,\tfrac{1}{2} = \varrho(1+\varrho)^{-1}\,;$$

das ist freilich auch der Erwartungswert der Anzahl der (älteren) Kunden, welche $\mathscr{K}$ überholt (die *mittlere Anzahl der aktiven Überholungen*).

Die Anzahl b der neueren Kunden kann sich während der Bedienungszeit des Kunden $\mathscr{K}$ ganz beliebig ändern. Wegen des Markovschen Charakters des ganzen Bedienungsprozesses (es handelt sich nämlich um ein $M/M/n$ System) sind die Zeitpunkte, in denen die neueren Kunden in die Schlange eintreten oder diese verlassen, Erneuerungspunkte des Prozesses; es genügt also die eingebettete Markovsche Kette zu untersuchen, welche die Änderungen der Kundenanzahl in der Schlange und in der Bedienung beschreibt, ohne die dazwischenliegenden Zeitlücken zu berücksichtigen. Was uns dabei am meisten interessiert, ist die Anzahl der neueren Kunden, die unseren $\mathcal{K}$ überholen; diesem Zweck werden wir auch die Schreibweise anpassen.

Die Zustände dieser Kette werden mit $[a, b, r]$ bezeichnet, wo a wieder die Anzahl der älteren und b die Anzahl der neueren im System anwesenden Kunden bedeutet; r ist dann die Gesamtanzahl der neueren Kunden, welche das System schon verlassen (und also den Kunden $\mathcal{K}$ überholt) haben. Es ist klar, daß nur dann $r > 0$ sein kann, wenn der ältere Kunde schon das System verlassen hat; es ist also immer $ar = 0$.

Der Anfangszustand der Kette entspricht dem Augenblick t', in dem $\mathcal{K}$ die Schlange verläßt und in die Bedienung eintritt; die Kette beginnt also notwendigerweise mit einem der Zustände $[0, 0, 0]$, $[1, 0, 0]$, $[1, 1, 0], \ldots, [1, m, 0], \ldots$; die zugehörige Anfangsverteilung der Zustandswahrscheinlichkeiten kennen wir schon: sie ist durch (2.4) gegeben.

Wie kann sich dann der Zustand $[a, b, r]$ ändern? Da kommen folgende Möglichkeiten vor:

a) In jedem Augenblick kann ein neuerer Kunde in das System eintreffen, so daß $[a, b, r]$ zu $[a, b + 1, r]$ wird; dieser Übergang geschieht mit Wahrscheinlichkeit

$$\gamma = \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} = \frac{\varrho}{1 + \varrho}, \tag{2.6}$$

falls $a \neq 0$ oder $b \neq 0$ ist; der Übergang vom Zustand $[0, 0, r]$ zu $[0, 1, r]$ geschieht jedoch mit Wahrscheinlichkeit

$$\delta = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} = \frac{2\varrho}{1 + 2\varrho} \tag{2.7}$$

(in diesem Falle arbeitet nämlich nur die von den beiden Bedienungsstellen, die vom Kunden $\mathcal{K}$ besetzt ist; die andere Bedienungsstelle ist dabei frei);

b) vom Zustand $[1, b, 0]$ kann man zu $[0, b, 0]$ übergehen, wenn der ältere Kunde mit der Bedienung fertig ist; die Wahrscheinlichkeit dieses Überganges ist

$$\alpha = \frac{\mu}{\lambda + 2\mu} = \frac{1}{2(1 + \varrho)}; \tag{2.8}$$

c) vom Zustand $[0, b, r]$, $b > 0$, kann die Kette in den Zustand $[0, b - 1, r + 1]$ kommen, und zwar wenn ein neuerer Kunde das System bedient verläßt; die zugehörige Übergangswahrscheinlichkeit ist auch gleich α;

d) in jedem Augenblick ist aber noch ein Übergang möglich (ohne Rücksicht auf den gegenwärtigen Zustand der Kette) und zwar der Übergang, welcher der Vollendung der Bedienung des Kunden $\mathcal{K}$ selbst entspricht. Mit diesem Übergang endet die ganze Kettenentwicklung. Zu den Zuständen der Form $[a, b, r]$ müssen wir also noch gewisse absorbierende Zustände hinzufügen, die wir mit $[r]$, $r = 0, 1, 2, \ldots$ bezeichnen werden. Von jedem Zustand $[a, b, r]$ ist also auch der Übergang zu $[r]$

möglich; die zugehörige Übergangswahrscheinlichkeit ist gleich α, falls $a \neq 0$ oder $b \neq 0$ ist, und gleich

$$\varepsilon = \frac{\mu}{\lambda + \mu} = \frac{1}{1 + 2\varrho}, \tag{2.9}$$

falls $a = b = 0$ ist.

In gewisser Hinsicht wird es vorteilhaft sein, den absorbierenden Zustand $[0]$ noch genauer zu unterscheiden, je nachdem er von einem Zustand $[1, b, 0]$ oder von $[0, b, 0]$ erreicht worden ist, d.h. je nachdem der Kunde $\mathscr{K}$ selbst einen (älteren) Kunden überholt hat oder nicht; wir werden diese Tatsache mit $[0_1]$, bzw. $[0_0]$ bezeichnen.

Die Zustände der Kette, die möglichen Übergänge dazwischen und die zugehörigen Übergangswahrscheinlichkeiten sind hier in zusammengefaßter Form in einem Schema dargestellt.

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[dddr, "p_0"'] & {} \arrow[d, "(p_1 + p_2)"] & {} \arrow[d, "p_3"] & {} \arrow[d, "p_4"] & {} \arrow[d, "p_5"] & \\
& {[1, 0, 0]} \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "\alpha"] \arrow[dd, shift left=6, "\alpha"] & {[1, 1, 0]} \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "\alpha"] \arrow[dd, shift left=6, "\alpha"] & {[1, 2, 0]} \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "\alpha"] \arrow[dd, shift left=6, "\alpha"] & {[1, 3, 0]} \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "\alpha"] \arrow[dd, shift left=6, "\alpha"] & {} \\
& {[0_1]} & {[0_1]} & {[0_1]} & {[0_1]} & \\
& {[0, 0, 0]} \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\varepsilon"] & {[0, 1, 0]} \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "\alpha"] \arrow[dd, shift left=6, "\alpha"] & {[0, 2, 0]} \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "\alpha"] \arrow[dd, shift left=6, "\alpha"] & {[0, 3, 0]} \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "\alpha"] \arrow[dd, shift left=6, "\alpha"] & {} \\
& {[0_0]} & {[0_0]} & {[0_0]} & {[0_0]} & \\
& & {[0, 0, 1]} \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\varepsilon"] & {[0, 1, 1]} \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "\alpha"] \arrow[dd, shift left=6, "\alpha"] & {[0, 2, 1]} \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "\alpha"] \arrow[dd, shift left=6, "\alpha"] & {} \\
& & {[1]} & {[1]} & {[1]} & \\
& & & {[0, 0, 2]} \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\varepsilon"] & {[0, 1, 2]} \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "\alpha"] \arrow[dd, shift left=6, "\alpha"] & {} \\
& & & {[2]} & {[2]} & \\
& & & & {[0, 0, 3]} \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\varepsilon"] & {} \\
& & & & {[3]} &
\end{tikzcd}$$

Es gilt $\alpha = (2 + 2\varrho)^{-1}$, $\gamma = \varrho(1 + \varrho)^{-1}$, $\delta = 2\varrho(1 + 2\varrho)^{-1}$, $\varepsilon = (1 + 2\varrho)^{-1}$, $2\alpha + \gamma = 1 = \varepsilon + \delta$. Deutlichkeitshalber werden die absorbierenden Zustände $[r]$ in mehreren Exemplaren angegeben.

Trotz der scheinbaren Verwickelung der Übergänge ist es nicht zu schwer von der Anfangsverteilung (2.4) ausgehend mit Hilfe der Übergangswahrscheinlichkeiten (2.6)–(2.9) einige von den Wahrscheinlichkeiten, daß die Kette in dem absorbierenden Zustand $[r]$ enden wird – wir werden diese Wahrscheinlichkeit mit $Q(r)$ bezeichnen – zu berechnen; so bekommen wir z.B.

$$Q(0_1) = (1 - p_0)\frac{\alpha}{1 - \gamma} = \tfrac{1}{2}(1 - p_0)\,, \tag{2.10}$$

was wir jedenfalls schon von (2.5) her wissen; weiter ist

$$Q(0_0) = \frac{1 - \varrho^2}{1 + 2\varrho} + \frac{\varrho^2}{2(1 + 2\varrho)} = \frac{2 + 2\varrho + \varrho^2}{2(1 + \varrho)(1 + 2\varrho)} \tag{2.11}$$

oder

$$\sum_{r=1}^{\infty} Q(r) = \frac{\varrho(1 - \varrho^2)}{(1 + \varrho)(1 + 2\varrho)} + \frac{\varrho^2}{2(1 + 2\varrho)} = \frac{\varrho(2 + \varrho)}{2(1 + \varrho)(1 + 2\varrho)}\,. \tag{2.12}$$

Wir bezeichnen noch mit $q(r)$ die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die Kette überhaupt irgendwie in den Zustand $[0, 0, r]$ gelangt. Für kleine Werte $r = 0, 1, 2, \ldots$ lassen sich die Wahrscheinlichkeiten $q(r)$ leicht nach dem Schema berechnen; so ergibt sich z.B.

$$q(0) = p_0 + \alpha(p_1 + p_2) = 1 - \varrho\,,$$

$$q(1) = \frac{\varrho(1 - \varrho)}{(1 + \varrho)(1 + 2\varrho)} + \frac{\varrho^2(1 - \varrho)}{2(1 + \varrho)^2}\,,$$

usw. Aus dem Schema lassen sich noch folgende zwei gleichwertige rekurrente Formeln herleiten

$$\sum_{r=k}^{\infty} Q(r) - \varepsilon q(k) = 2 \sum_{r=k+1}^{\infty} Q(r)\,, \tag{2.13}$$

$$\sum_{r=k}^{\infty} Q(r) + \varepsilon\, q(k) = 2Q(k)\,. \tag{2.13'}$$

Hiervon lassen sich mit Hilfe der Wahrscheinlichkeiten $q(k)$ schrittweise die Wahrscheinlichkeiten $Q(r)$ berechnen; so bekommen wir

$$2Q(1) = \frac{\varrho(2 + \varrho)}{2(1 + \varrho)(1 + 2\varrho)} + \frac{1}{1 + 2\varrho}\left[\frac{\varrho(1 - \varrho)}{(1 + \varrho)(1 + 2\varrho)} + \frac{\varrho^2(1 - \varrho)}{2(1 + \varrho)^2}\right] =$$

$$= \frac{2\varrho}{(1 + 2\varrho)^2} + \frac{\varrho^3}{(1 + \varrho)^2(1 + 2\varrho)^2}\,,$$

so daß

$$Q(1) = \frac{\varrho}{(1 + 2\varrho)^2} + \frac{\varrho^3}{2(1 + \varrho)^2 (1 + 2\varrho)^2},$$

usw.

Man könnte in dieser Weise die Berechnung der Wahrscheinlichkeiten $q(r)$ und $Q(r)$ fortsetzen, es ist jedoch zu erwarten, daß die expliziten Formeln, die man so gewinnt, ziemlich verwickelt erscheinen. Deswegen werden wir uns mit den oben angegebenen Formeln begnügen. Noch verwickelter wären natürlich die Formeln in dem Fall der Systeme $M/M/n$ mit mehr als zwei Bedienungsstellen. Den Grenzfall eines Systems vom Typ $M/M/\infty$ werden wir nachher gesondert behandeln (s. § 4).

Bevor wir diesen Absatz abschliessen, möchten wir noch eine allgemeine Bemerkung hinbeifügen. Die mittlere Anzahl der Kunden, die unseren Kunden $\mathscr{K}$ überholen (die mittlere Anzahl seiner passiven Überholungen) muß immer der mittleren Anzahl der Kunden gleich sein, welche $\mathscr{K}$ selbst überholt hat, d.h. der mittleren Anzahl seiner aktiven Überholungen; es muß also gelten

$$\sum_{r=1}^{\infty} r\, Q(r) = \varrho(1 + \varrho)^{-1}. \tag{2.15}$$

In einem stabilisierten System (d.h. im System im Gleichgewicht) mit dem Bedienungsquotienten $\varrho < 1$ sind nämlich alle Änderungen der Kundenreihenfolge nur von „lokalem" Charakter (da hier kein Kunde unendlich lange im System verweilt); sie müssen sich also im Mittelwert ausgleichen.

3. Das Besetztsystem $M/M/2$

Auch in Besetztsystemen (s. [1], S. 47; [4], S. 114), wo keine Warteschlangen vorkommen, kann sich die Kundenreihenfolge während der Bedienungszeit verändern, falls mehrere parallele Bedienungsstellen vorhanden sind. Wir wollen hier nur ganz kurz den einfachsten Fall eines Besetztsystems mit zwei Bedienungsstellen untersuchen.

Es sei also wieder $\mathscr{K}$ ein „beliebig" gewählter Kunde, der im Zeitpunkt t' in das System eintrifft. Da die Gesamtanzahl der im System anwesenden Kunden immer nur $\leqq 2$ sein kann, sind beim Eintreffen des Kunden $\mathscr{K}$ nur drei Zustände möglich: entweder ist $\mathscr{K}$ allein in einem sonst leeren System – die Wahrscheinlichkeit dafür ist (s. [4], S. 114)

$$p_0 = [1 + \beta + (\beta^2/2)]^{-1} = (1 + 2\varrho + 2\varrho^2)^{-1}, \tag{3.1}$$

(wo wie gewöhnlich $\beta = \lambda/\mu$, $\varrho = \beta/2$ gesetzt wird); oder ist mit $\mathscr{K}$ noch ein älterer Kunde im System, was mit der Wahrscheinlichkeit

$$p_1 = \beta(1 + \beta + \tfrac{1}{2}\beta^2)^{-1} = 2\varrho(1 + 2\varrho + 2\varrho^2)^{-1} \tag{3.2}$$

geschieht; oder aber kann in einem Besetztsystem natürlich auch das geschehen, daß der Kunde $\mathcal{K}$ in einem solchen Augenblick ankommt, in dem die beiden Bedienungsstellen besetzt sind, so daß er „verloren" geht und das System sofort verläßt, ohne bedient zu werden. In diesem Fall hat es freilich keinen Zweck, die weitere Entwicklung des Systems zu betrachten. Die zugehörige Verlustwahrscheinlichkeit ist

$$p_2 = \tfrac{1}{2}\beta^2(1 + \beta + \tfrac{1}{2}\beta^2)^{-1} = 2\varrho^2(1 + 2\varrho + 2\varrho^2)^{-1} \,. \tag{3.3}$$

Mit der Wahrscheinlichkeit

$$1 - p_2 = p_0 + p_1 = (1 + 2\varrho)(1 + 2\varrho + 2\varrho^2)^{-1} \tag{3.4}$$

kommt also unser Kunde $\mathcal{K}$ überhaupt in das System hinein; erst dann können wir uns für seine aktiven und passiven Überholungen interessieren. Die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten werden wir deshalb als *bedingte* Wahrscheinlichkeiten betrachten, unter der Annahme, daß $\mathcal{K}$ nicht verloren ist; die entsprechenden unbedingten Wahrscheinlichkeiten ergeben sich daraus durch Multiplizieren mit dem Faktor (3.4).

Aus (3.2) läßt sich die Wahrscheinlichkeit der (einzig möglichen) aktiven Überholung genau so herleiten, wie wir es im zweiten Absatz gezeigt haben; es ist wieder

$$P_{\text{akt}} = \tfrac{1}{2}p_1 = \varrho(1 + 2\varrho + 2\varrho^2)^{-1} \,; \tag{3.5}$$

dies ist auch die *mittlere Anzahl der aktiven Überholungen.*

Soll der Kunde $\mathcal{K}$ von einem neueren Kunden überholt werden, so ist dazu notwendig, daß $\mathcal{K}$ zuerst einmal ganz allein im System bleibt: zum ersten Mal geschieht das einerseits dann, wenn er in ein leeres System eintrifft (die Wahrscheinlichkeit dafür ist p_0, d.h. (3.1)), anderseits dann, wenn der mit ihm gleichzeitig bediente Kunde früher als $\mathcal{K}$ die Bedienung vollendet (was immer mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ geschieht, wenn im Augenblick t' noch ein älterer Kunde im System verweilt). Ist aber $\mathcal{K}$ einmal allein im System, so wird er wieder überholt nur dann, falls ein neuerer Kunde in das System eintrifft, von der parallelen Bedienungsstelle bedient wird und die Bedienung immer noch früher als $\mathcal{K}$ vollendet; das alles geschieht mit der Wahrscheinlichkeit

$$\frac{\lambda}{\lambda + \mu}\frac{1}{2} = \frac{\varrho}{1 + 2\varrho} \,. \tag{3.6}$$

Aber nach jeder solchen passiven Überholung ist $\mathcal{K}$ wieder allein im System, also wieder in derselben Situation wie am Anfang, und die ganze Geschichte kann sich wiederholen. Da es sich um ein Markovsches System handelt, sind solche Zeitpunkte, in denen $\mathcal{K}$ im System allein bleibt, Erneuerungspunkte des Bedienungsprozesses; es ist also überhaupt nicht wichtig, wie oft schon $\mathcal{K}$ überholt wurde: ist er nur allein im System, so ist die Wahrscheinlichkeit einer neuen passiven Überholung immer dieselbe. Wir sehen sofort ein, daß die Anzahl der passiven Überholungen *geometrisch verteilt* ist mit dem Parameter (3.6). Es gilt also

$$(3.7) \qquad P_{\text{pas}}(m) = (p_0 + \tfrac{1}{2}p_1)\frac{1+\varrho}{1+2\varrho}\left(\frac{\varrho}{1+2\varrho}\right)^m, \quad m = 1, 2, 3, \ldots$$

für die Wahrscheinlichkeit $P_{\text{pas}}(m)$, daß unser Kunde $\mathscr{K}$ während seiner Bedienungszeit insgesamt m-mal überholt wird. Der erste Faktor

$$p_0 + \tfrac{1}{2}p_1 = (1+\varrho)(1+2\varrho+2\varrho^2)^{-1}$$

stellt dabei die Wahrscheinlichkeit des allerersten Alleinseins des Kunden $\mathscr{K}$ im System dar. Die Formel (3.7) gilt nicht für $m = 0$; die Wahrscheinlichkeit $P_{\text{pas}}(0)$ muß nämlich auch den Fall umfassen, in dem der Kunde $\mathscr{K}$ deshalb nicht überholt wurde, weil er niemals allein war (in diesem Fall muß er notwendigerweise selbst einen älteren Kunden aktiv überholt haben). Es gilt also

$$(3.8) \qquad P_{\text{pas}}(0) = \tfrac{1}{2}p_1 + (p_0 + \tfrac{1}{2}p_1)\frac{1+\varrho}{1+2\varrho} = \frac{1+3\varrho+3\varrho^2}{1+4\varrho+6\varrho^2+4\varrho^3}.$$

Die *mittlere Anzahl der passiven Überholungen* ist dann wegen (3.7) gleich

$$(p_0 + \tfrac{1}{2}p_1)\frac{\varrho(1+2\varrho)^{-1}}{(1+\varrho)(1+2\varrho)^{-1}} = \frac{1+\varrho}{1+2\varrho+2\varrho^2}\,\frac{\varrho}{1+\varrho} = \frac{\varrho}{1+2\varrho+2\varrho^2},$$

also wieder dieselbe wie die mittlere Anzahl (3.5) der aktiven Überholungen (vgl. unsere Bemerkung am Ende des zweiten Absatzes).

4. Das System $M/M/\infty$

Auch in diesem System (s. [4], S. 108) gibt es keine Warteschlange, obwohl dies aus ganz anderen Gründen als in den Besetztsystemen geschieht, und die Kunden können sich gegenseitig nur während der Bedienungszeiten überholen. Jeder Kunde wird hier sofort bedient, ohne warten zu müssen.

Es sei wieder $\mathscr{K}$ ein „beliebig" gewählter Kunde; die Wahrscheinlichkeit, daß sich im Augenblick seines Eintreffens in das System noch k andere, ältere Kunden im System befinden, ist gleich (s. [4], S. 108)

$$p_k = e^{-\varrho}\varrho^k/k!\,, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \quad \varrho = \lambda/\mu\,.$$

Die Bedienungszeit des Kunden $\mathscr{K}$ sowie die Bedienungszeitreste aller älteren Kunden sind unabhängige und gleichverteilte Zufallsgrößen. Der Kunde $\mathscr{K}$ wird also einen jeden älteren Kunden mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ überholen; diese Überholungen sind voneinander unabhängig. Ist die Anzahl k der älteren Kunden gegeben, die im

Eintreffenszeitpunkt des Kunden $\mathscr{K}$ im System verweilen, so ist dann die Anzahl seiner aktiven Überholungen binomialverteilt mit den Parametern k und $\frac{1}{2}$. Für die unbedingte Wahrscheinlichkeit $P_{\text{akt}}(m)$, daß unser Kunde $\mathscr{K}$ genau m ältere Kunden überholen wird, ergibt sich damit die Formel

$$(4.1)\quad P_{\text{akt}}(m) = \sum_{k=m}^{\infty} e^{-\varrho}\varrho^k \frac{1}{k!}\binom{k}{m}\frac{1}{2^k} = \frac{e^{-\varrho}}{m!}\left(\frac{\varrho}{2}\right)^m \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\varrho}{2}\right)^k \frac{1}{k!} = \left(\frac{\varrho}{2}\right)^m \frac{e^{-\varrho/2}}{m!};$$

die *aktiven Überholungen* sind also *Poisson-verteilt* mit dem Parameter $\frac{1}{2}\varrho$; der *Erwartungswert* ist bekanntlich auch $\frac{1}{2}\varrho$.

Während der Bedienungszeit des Kunden $\mathscr{K}$ können noch weitere, neuere Kunden in das System eintreffen; es erscheinen insgesamt k solche Kunden mit der Wahrscheinlichkeit

$$(4.2)\quad P_k = \int_0^{\infty} \mu e^{-\mu t}(\lambda t)\,(k!)^{-1}\, e^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t =$$

$$= \frac{\mu\lambda^k}{(\mu+\lambda)^{k+1}} \int_0^{\infty} \frac{(\mu+\lambda)^{k+1}\, t^k}{k!}\, e^{-(\mu+\lambda)t}\,\mathrm{d}t = \frac{\varrho^k}{(1+\varrho)^{k+1}} = \frac{1}{1+\varrho}\left(\frac{\varrho}{1+\varrho}\right)^k.$$

Die Anzahl der neueren Kunden, die in das System während der Bedienungszeit unseres Kunden $\mathscr{K}$ eintreffen, ist also geometrisch verteilt mit dem Parameter $\varrho(1+\varrho)^{-1}$.

Zur Herleitung der Verteilung der Anzahl der passiven Überholungen können wir von den Überlegungen ausgehen, die wir schon im Fall der aktiven Überholungen ausgenutzt haben. Ist die Anzahl k der neueren Kunden gegeben, die während der Bedienungszeit des Kunden $\mathscr{K}$ in das System eingetroffen sind, so ist die Anzahl der passiven Überholungen wieder *binomialverteilt* mit den Parametern k und $\frac{1}{2}$. Für die (unbedingte) Wahrscheinlichkeit $P_{\text{pas}}(m)$, daß genau m passive Überholungen eintreten, erhalten wir also den Ausdruck

$$(4.3)\quad P_{\text{pas}}(m) = \sum_{k=m}^{\infty} \frac{1}{1+\varrho}\left(\frac{\varrho}{1+\varrho}\right)^k \binom{k}{m}\left(\frac{1}{2}\right)^k =$$

$$= \frac{1}{1+\varrho}\left[\frac{\varrho}{2(1+\varrho)}\right]^m \frac{1}{m!}\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{\varrho}{2(1+\varrho)}\right]^k (k+1)(k+2),\ldots,(k+m) =$$

$$= \frac{1}{1+\varrho}\left[\frac{\varrho}{2(1+\varrho)}\right]^m \left[1 - \frac{\varrho}{2(1+\varrho)}\right]^{-m-1} = \frac{2}{2+\varrho}\left(\frac{\varrho}{2+\varrho}\right)^m.$$

Die Anzahl der passiven Überholungen ist also wieder *geometrisch verteilt* mit dem Parameter $\varrho(2+\varrho)^{-1}$; der entsprechende *Mittelwert* ist bekanntlich $\frac{1}{2}\varrho$.

Die Anzahl der aktiven Überholungen und die Anzahl der passiven Überholungen sind zwei unabhängige Zufallsgrößen, so daß wir aus (4.1) und (4.3) leicht auch ihre simultane Verteilung gewinnen. Damit ist es auch möglich, die Verteilung der endgültigen Verschiebung des Kunden $\mathscr{K}$ im Kundenstrom während seines Aufenthaltes im System zu bestimmen: bei jeder Überholung durch einen neueren Kunden verschiebt sich $\mathscr{K}$ um einen Rang zurück; jedesmal, wenn er selbst einen älteren Kunden überholt, verschiebt er sich um einen Rang vorwärts. Die Totalverschiebung ist dann durch die Differenz der Anzahl der aktiven und der der passiven Überholungen gegeben. So ist z.B. die Wahrscheinlichkeit dafür, daß sich alle diese Verschiebungen letzten Endes ausgleichen und der Kunde $\mathscr{K}$ am Ende denselben Rang beibehält wie am Anfang, gleich

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\varrho}{2}\right)^k \frac{1}{k!} e^{-\varrho/2} \frac{2}{2+\varrho} \left(\frac{\varrho}{2+\varrho}\right)^k =$$

$$= e^{-\varrho/2} \frac{2}{2+\varrho} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left[\frac{\varrho^2}{2(2+\varrho)}\right]^k = \frac{2}{2+\varrho} \exp\left[-\frac{\varrho}{2+\varrho}\right];$$

die Herleitung von anderen analogen Wahrscheinlichkeiten verschiedener Verschiebungen überlassen wir dem Leser.

Es sei noch darauf hingewiesen, daß den beiden Verteilungen (4.1) und (4.3) derselbe Erwartungswert entspricht, und zwar $\frac{1}{2}\varrho$, so daß die Verschiebung des Kunden $\mathscr{K}$ im Kundenstrom *durchschnittlich* gleich Null ist (vgl. wieder unsere Bemerkung am Ende des zweiten Absatzes).

5. Die Warteordnungen von O. Vašíček in Systemen $M/M/n$

Wird in einem Bedienungssystem eine andere als natürliche Warteordnung angewandt, so kann sich die Kundenreihenfolge noch während der Wartezeit, also vor der Ankunft der Kunden in die Bedienung, ändern. In der Arbeit [3] studierte O. Vašíček Bedienungssysteme des Typs $M/M/n$ mit folgender interessanter Warteordnung:

Es ist eine unendliche Folge reeller Zahlen $r_1, r_2, r_3, \ldots$, gegeben, mit $0 \leqq r_k \leqq 1$ für alle $k = 1, 2, 3, \ldots$, $\sum_{k=1}^{\infty} r_k \leqq 1$. Es sei dann für $k = 1, 2, 3, \ldots$

$$S_k = \sum_{j=1}^{k} r_j\,, \quad R_k = 1 - S_k\,, \quad S_0 = 0\,, \quad R_0 = 1\,,$$

so daß gilt:

$$0 = S_0 \leqq S_1 \leqq S_2 \leqq \ldots \leqq 1 = R_0 \geqq R_1 \geqq R_2 \geqq \ldots \geqq 0\,.$$

Wenn nun ein Kunde $\mathscr{K}$ genau in dem Zeitpunkt in das System eintrifft, in dem sich im System gerade $k + n$ $(k \geqq 0)$ andere Kunden befinden (n davon werden eben bedient und k stehen noch in der Schlange), so reiht sich $\mathscr{K}$ mit der Wahrscheinlichkeit r_j als j-ter in die Schlange ein $(j = 1, 2, \ldots, k)$; mit der Wahrscheinlichkeit R_k nimmt er den letzten Platz in der Schlange ein (er wird also als $(k+1)$-ter in der Schlange stehen). Sind im Augenblicke des Eintreffens des Kunden $\mathscr{K}$ weniger als n andere Kunden im System, bleibt natürlich mindestens eine Bedienungsstelle frei und der Kunde $\mathscr{K}$ wird sofort, ohne Warten, bedient.

In solchen Systemen interessierte sich O. Vašíček vor allem für die Wartezeitverteilung; er hat einige allgemeine Formeln für die zugehörige Verteilungsfunktion hergeleitet und gewisse Ungleichungen für die Varianz der Wartezeit bewiesen. Es ist ihm jedoch nur in einigen Spezialfällen gelungen, die Wartezeitverteilung in geschlossener Form auszudrücken.

Die Warteordnungen von O. Vašíček stellen einen ziemlich allgemeinen[3]) Typ von Auswahlordnungen (s. [1], S. 48) dar. Was uns hier daran am meisten interessiert, ist aber die Tatsache, daß sich die Kunden bei solchen Warteordnungen schon in ihren Eintreffenzeitpunkten, d.h. bei dem Einreihen in die Schlange, überholen können. Und eben diese Reihenfolgeänderungen wollen wir hier näher untersuchen. Als „Beiprodukt“ erhalten wir gleichzeitig auch einige Ergebnisse, die O. Vašíček in [3] hergeleitet hat. Einfachheitshalber lassen wir jedoch die während der Bedienungszeit entstehenden Überholungen ganz außer Betracht. Es ist zwar klar, daß sie in Systemen mit mehreren Bedienungsstellen $(n > 1)$ auch vorkommen, sie sind aber von den bei dem Einreihen vollbrachten Überholungen unabhängig, so daß sie getrennt untersucht werden können, was wir schon in vorgehenden Absätzen gemacht haben.

Im folgenden werden wir also Kunden in der Schlange in einem $M/M/n$ System *im Gleichgewicht* betrachten, mit der oben angegebenen Warteordnung. Von der allgemeinen Theorie der $M/M/n$ Systeme her (s. [1], S. 94–95, oder [4], S. 103–104) kennen wir die Gleichgewichtswahrscheinlichkeiten

$$\begin{aligned} p_k &= p_0\beta^k/k!\,, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n\,, \\ p_{k+n} &= p_n\varrho^k\,, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots\,, \end{aligned} \tag{5.1}$$

wobei

$$p_0 = \Big[\sum_{k=0}^{n-1}(\beta^k/k!) + (n^n/n!)\sum_{k=n}^{\infty}\varrho^n\Big]^{-1}\,, \tag{5.2}$$

$\beta = \lambda/\mu$, $\varrho = \beta/n = \lambda/(\mu n)$, $0 < \varrho < 1$, ist. Diese Wahrscheinlichkeiten können auch folgendermaßen erklärt werden: mit der Wahrscheinlichkeit p_k $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ findet ein „beliebig“ gewählter Kunde bei seinem Eintreffen in das System gerade k andere Kunden im System an. Im Spezialfall $n = 1$ wird (5.1) und (5.2) einfach zu

$$p_k = (1-\varrho)\,\varrho^k\,, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{5.3}$$

(vgl. [4], S. 82, [1], S. 94–95).

---

[3]) Wir wollen gleich daran erinnern, daß sowohl die natürliche als auch die inverse (d.h. „last-come-first-served“) Warteordnung Spezialfälle der Vašíčekschen Warteordnungen sind (vgl. [3], S. 59, oder [4], S. 97).

Der in das System neu eintreffende Kunde $\mathcal{K}$ reiht sich aber bei der Vašíčekschen Warteordnung nicht notwendig an das Schlangenende an, sondern er wählt seinen Platz gemäß den gegebenen Wahrscheinlichkeiten $r_1, r_2, \ldots, r_k, R_k$. Nur die Wahrscheinlichkeit dafür, daß er ohne Warten gleich in die Bedienung eintritt, ist dieselbe wie in einem System mit natürlicher Warteordnung, und zwar (s. [4], S. 105)

$$1 - \Pi = \sum_{k=0}^{n-1} p_k = 1 - \sum_{k=n}^{\infty} p_k = 1 - p_n(1 - \varrho)^{-1} .$$

Für die Wahrscheinlichkeiten q_k $(k = 1, 2, 3, \ldots)$, mit denen der Kunde $\mathcal{K}$ den k-ten Platz besetzt, leiten wir ohne Schwierigkeiten folgenden Ausdruck ab:

$$(5.4) \qquad q_k = R_{k-1} p_{n+k-1} + r_k \sum_{j=n+k}^{\infty} p_j =$$
$$= p_n[R_{k-1}\varrho^{k-1} + r_k \varrho^k(1 - \varrho)^{-1}] = \Pi[R_{k-1}\varrho^{k-1} - R_k\varrho^k] .$$

Sobald der eingetroffene Kunde $\mathcal{K}$ seinen Platz in der Schlange einnimmt, verschiebt er sich immer nur um einen Rang vorwärts oder zurück, und zwar in den Zeitpunkten, wo entweder eine Bedienung vollendet ist (und die ganze Schlange einen Schritt vorwärts macht) oder ein neuer Kunde in das System kommt und unseren Kunden $\mathcal{K}$ überholt; der Kunde $\mathcal{K}$ selbst kann aber keinen anderen mehr überholen[4]). Die Anzahl der aktiven Überholungen unseres Kunden $\mathcal{K}$ ist also endgültig schon in dem Augenblick bestimmt, in dem er sich in die Schlange einreiht; die zugehörige Wahrscheinlichkeitsverteilung hängt unmittelbar von den Wahrscheinlichkeiten p_k und r_k ab. Es ist

$$(5.5) \qquad P_{\mathrm{akt}}(k) = \sum_{j=k}^{\infty} p_{n+j} r_{j-k+1} = \sum_{j=0}^{\infty} p_{n+k+j} r_{j+1}$$

für $k = 1, 2, 3, \ldots$

Wir wollen nun die Verteilung der Anzahl der passiven Überholungen herleiten. Es sei $P(k, j)$ die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein Kunde $\mathcal{K}$, der jetzt als j-ter in der Schlange steht $(j = 1, 2, 3, \ldots)$, während seiner Wartezeit noch k-mal überholt wird $(k = 0, 1, 2, \ldots)$. Wegen der Markovschen Eigenschaft des Prozesses, der die Entwicklung des Systems $M/M/n$ beschreibt, sind die Wahrscheinlichkeiten $P(k, j)$ von der Vorgeschichte des Systems unabhängig; es ist also von keinem Belang, wie der Kunde $\mathcal{K}$ an seinen j-ten Platz gelangt ist, wie lange er da schon steht oder auch wievielmal er schon überholt worden ist.

Die Lage des Kunden $\mathcal{K}$ kann sich, wie wir schon bemerkt haben, nur in den Zeitpunkten verändern, in denen die Anzahl der im System anwesenden Kunden variiert; die dazwischenliegenden Zeitlücken sind dabei für uns unwichtig. Die

[4]) Es interessiert uns nur das Schicksal der Kunden in der Schlange, also nicht das, was mit ihnen später während der Bedienung geschieht.

Wahrscheinlichkeit dafür, daß die *erste* Lageänderung des Kunden $\mathscr{K}$ durch eine Bedienungsvollendung verursacht wird (ein Kunde verläßt die Bedienung und die Schlange wird um einen Kunden verkürzt), ist bekanntlich gleich

$$\frac{n\mu}{\lambda + n\mu} = \frac{1}{1 + \varrho}, \tag{5.6}$$

(wenn die Kunden Schlange stehen, müssen alle n Bedienungsstellen arbeiten). Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein neuer Kunde in das System kommt, *noch bevor* eine Bedienung vollendet ist, ist gleich

$$\frac{\lambda}{\lambda + n\mu} = \frac{\varrho}{1 + \varrho}, \tag{5.7}$$

was wir mit p bezeichnen werden; man sieht leicht ein, daß $0 < p < \frac{1}{2}$ ist.

Jetzt aber können wir schon eine allgemeine Rekursionsformel für die Wahrscheinlichkeiten $P(k, j)$ schreiben, und zwar

$$P(k, j) = (1 - p)\, P(k, j - 1) + pS_j\, P(k - 1, j + 1) + pR_j\, P(k, j)\,. \tag{5.8}$$

Hier sind die Werte $P(k, j)$ mit Hilfe der Wahrscheinlichkeiten ausgedrückt, welche die Situation nach der ersten Änderung der Kundenanzahl im System entsprechen: das erste Glied der rechten Seite entspricht dem Austritt eines bedienten Kunden aus dem System, bei dem der Kunde $\mathscr{K}$ in der Schlange einen Schritt vorwärts macht, das zweite und dritte Glied entsprechen dem Eintreffen eines neuen Kunden in das System, der dabei unseren Kunden $\mathscr{K}$ entweder überholt (das zweite Glied) oder nicht überholt (das dritte Glied).

Zur Gleichung (5.8) treten noch Anfangs- bzw. Randbedingungen zu. Es sind einerseits konventionelle Werte $P(k, 0)$, wobei wir den nullten Rang in der Schlange als die Lage eines Kunden interpretieren, der schon die Schlange verlassen hat und bedient wird, es ist also

$$P(0, 0) = 1\,, \quad P(k, 0) = 0 \quad \text{für} \quad k = 1, 2, 3, \dots, \tag{5.9}$$

andererseits ist das die für $k = 0$ offenbare Gleichung

$$P(0, j) = (1 - p)\, P(0, j - 1) + p\, R_j\, P(0, j)\,, \quad j = 1, 2, 3, \dots$$

welche dann zur Formel

$$P(0, j) = (1 - p)^j \Big[\prod_{i=1}^{j} (1 - pR_i)\Big]^{-1} \tag{5.10}$$

führt.

Die Lösung der Gleichung (5.8) mit den gegebenen Randbedingungen, d.h. das Bestimmen der Wahrscheinlichkeiten $P(k, j)$, welche (5.8), (5.9) und (5.10) erfüllen, wird im folgenden unsere Hauptaufgabe sein. Mit Hilfe der Wahrscheinlichkeiten $P(k, j)$ können wir nämlich nicht nur die Verteilung der Anzahl der passiven Überholungen ausdrücken, sondern auch andere interessante Eigenschaften des Systems festsetzen.

Das Verteilungsgesetz der passiven Überholungen kann man als

$$P_{\text{pas}}(k) = \sum_{j=1}^{\infty} q_j \, P(k, j) \,, \quad k = 1, 2, 3, \ldots \tag{5.11}$$

schreiben, wo q_j die Wahrscheinlichkeiten (5.4) sind. Die Formel (5.11) ist für $k = 0$ nicht gültig, da die Wahrscheinlichkeit $P_{\text{pas}}(0)$ auch den Fall umfassen muß, in dem der Kunde sofort bedient wird, ohne zu warten; dieselbe Bemerkung bezieht sich auch auf die Formel (5.5). Ohne weiteres können wir jedoch einen Ausdruck für die *mittlere Anzahl der aktiven, bzw. der passiven Überholungen* erhalten: aus (5.5) folgt der Mittelwert

$$\sum_{k=1}^{\infty} k \sum_{j=0}^{\infty} p_{n+k+j} r_{j+1} = \sum_{j=0}^{\infty} r_{j+1} \sum_{k=1}^{\infty} k p_{n+j+k} = \tag{5.12}$$

$$= p_n(1 - \varrho)^{-2} \sum_{j=1}^{\infty} r_j \varrho^j = \Pi \sum_{j=1}^{\infty} S_j \varrho^j \,;$$

für die passiven Überholungen folgt aus (5.11) der Mittelwert

$$\sum_{k=1}^{\infty} k \sum_{j=1}^{\infty} q_j \, P(k, j) = \sum_{j=1}^{\infty} q_j \sum_{k=1}^{\infty} k \, P(k, j) \,. \tag{5.13}$$

Die letzte Summe in (5.13), nämlich

$$M(j) = \sum_{k=1}^{\infty} k \, P(k, j) \,, \tag{5.14}$$

hat eine *selbstständige Bedeutung*: wir können sie als den Mittelwert der zukünftigen passiven Überholungen eines Kunden ansehen, der eben als j-ter in der Schlange steht.

Wird die Gleichung (5.8) durch k multipliziert und werden dann alle so erhaltenen Gleichungen für $k = 1, 2, 3, \ldots$ addiert, so bekommt man eine Rekursionsformel für diese Mittelwerte $M(j)$:

$$M(j) = (1 - p) \, M(j - 1) + p \, S_j \, M(j + 1) + pR_j \, M(j) + pS_j \,, \quad j = 1, 2, 3, \ldots \,,$$

was wir auch folgendermaßen schreiben können:

$$p \, S_{j+1}[M(j + 2) - M(j + 1)] - (1 - p) \, [M(j + 1) - M(j)] + pS_{j+1} = 0 \,, \tag{5.15}$$

$$j = 0, 1, 2, \ldots \,;$$

dazu kommt noch die offenbare Anfangsbedingung $M(0) = 0$, die sofort aus (5.9) folgt; sie ist jedoch zur Lösung der Gleichung (5.15) nicht genügend. In allgemeinem Fall ist es gar nicht leicht, die Gleichung (5.15) zu lösen.

Eine andere, etwas mehr brauchbare Formel für die Mittelwerte $M(j)$ kann man bekommen, wenn man in (5.13) für q_j nach (5.4) einsetzt und dann mit (5.12) vergleicht: die Mittelwerte (5.12) und (5.13) sollen nämlich wieder gleich sein. Nach einigen Umformungen erhalten wir die Formel

$$\sum_{j=1}^{\infty} S_j \varrho^j = \sum_{j=1}^{\infty} M(j) \left[R_{j-1} \varrho^{j-1} - R_j \varrho^j\right] . \tag{5.16}$$

Eine ähnliche Formel für die Werte $M(j)$ kann man auch mit Hilfe der mittleren Wartezeit $\mathbf{E}[W]$ herleiten. Einerseits ist der Mittelwert $\mathbf{E}[W]$ bekanntlich (s. [4], S. 90–91) von der Warteordnung unabhängig, so daß er in unserem System $M/M/n$ mit der Vašíčekschen Warteordnung immer derselbe ist wie bei der natürlichen Warteordnung, also (s. [4], S. 107, oder [1], S. 99)

$$\mathbf{E}[W] = \Pi(n\mu - \lambda)^{-1} . \tag{5.17}$$

Andererseits kann man aber den Mittelwert $\mathbf{E}[W]$ mit Hilfe der Wahrscheinlichkeiten q_j und $P(k, j)$, bzw. der Mittelwerte $M(j)$, audrücken: ein Kunde $\mathscr{K}$, der nicht ohne Warten bedient wird (man hat immer $\mathbf{P}\{W = 0\} = 1 - \Pi$) und wirklich Schlange steht, wird in der Schlange *durchschnittlich* die Zeit $m(n\mu)^{-1}$ verweilen, wo m die Anzahl der Kunden ist, die bedient werden (die Bedienung vollenden) müssen, bevor unser Kunde $\mathscr{K}$ selbst in die Bedienung eingenommen wird. Es gilt also

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[W] &= (n\mu)^{-1} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} (k + j)\, q_j\, P(k, j) = \\ &= (n\mu)^{-1} \sum_{j=1}^{\infty} j q_j \sum_{k=0}^{\infty} P(k, j) + (n\mu)^{-1} \sum_{j=1}^{\infty} q_j \sum_{k=1}^{\infty} k\, P(k, j) = \\ &= (n\mu)^{-1} \Big[\sum_{j=1}^{\infty} j q_j + \sum_{j=1}^{\infty} q_j\, M(j)\Big] . \end{aligned} \tag{5.18}$$

Die erste Summe in der letzten Zeile bedeutet den mittleren Platz, den ein in das System neu eintreffende Kunde in der Schlange einnimmt,[5]) die zweite Summe stellt die mittlere Anzahl seiner passiven Überholungen (5.13) dar. Wir setzen jetzt in (5.18) für q_j nach (5.4) ein und erhalten so

$$\mathbf{E}[W] = \Pi(n\mu)^{-1} \sum_{j=1}^{\infty} \left[M(j) + j\right] \left[R_{j-1} \varrho^{j-1} - R_j \varrho^j\right] . \tag{5.19}$$

---

[5]) Wir möchten noch einmal daran errinnern, daß die Wahrscheinlichkeiten q_j als unbedingt erklärt wurden, also ohne die Wartzeit als positiv anzunehmen; man sollte sie eigentlich noch mit der Wahrscheinlichkeit $q_0 = 1 - \Pi$ der unmittelbaren Bedienung ohne Warten ergänzen.

Durch Vergleichen mit (5.17) ergibt sich aus (5.19) die Formel

$$(5.20) \qquad \sum_{j=1}^{\infty} [M(j) + j] [R_{j-1}\varrho^{j-1} - R_j\varrho^j] = (1 - \varrho)^{-1},$$

welche, wie man leicht einsieht, mit (5.16) gleichwertig ist.

Wenn wir hier anstatt der mittleren Anzahl der passiven Überholungen (5.13) die mittlere Anzahl (5.12) der aktiven Überholungen setzen, erhalten wir aus (5.20) die Identität

$$(5.21) \qquad \sum_{j=1}^{\infty} \{j[R_{j-1}\varrho^{j-1} - R_j\varrho^j] + S_j\varrho^j - \varrho^{j-1}\} = 0.$$

Auf den ersten Blick könnte man den Eindruck haben, daß man eine der Formel (5.18) für $\mathbf{E}[W]$ ähnliche Formel mit Hilfe der Wahrscheinlichkeiten q_j und $P(k, j)$ auch für die Verteilungsfunktion, bzw. charakteristische Funktion der Wartezeit W herleiten könnte. Das ist leider nicht so, da W von dem Schicksal des Kunden in der Warteschlange auf eine kompliziertere Weise abhängt, also nicht nur von der Gesamtanzahl $k + j$ der Kunden, die ihn überholt haben oder vom Anfang an in der Schlange vor ihm standen. Das werden wir jedoch noch ausführlicher in dem folgenden Absatz an konkreten Beispielen zeigen.

Es ist zwar leicht zu sehen, daß man ohne Schwierigkeiten folgende Gleichungen für die Wartezeitverteilungsfunktion $F_j(t)$ des Kunden, der eben als j-ter in der Schlange steht, schreiben kann

$$(5.22) \qquad F_j(t) = \int_0^t (\lambda + n\mu)\, e^{-(\lambda+n\mu)(t-z)} \left[\frac{n\mu}{\lambda + n\mu} F_{j-1}(z) + \right.$$
$$\left. + \frac{\lambda R_j}{\lambda + n\mu} F_j(z) + \frac{\lambda S_j}{\lambda + n\mu} F_{j+1}(z)\right] \mathrm{d}z\,.$$[6]

Aus (5.22) ergeben sich aber nach einer Umformung nur die Differentialgleichungen für $F_j(t)$, die schon O. Vašíček in [3] (S. 62, Gleichung (2)) abgeleitet hat.

6. Beispiele der Vašíčekschen Warteordnungen

Die allgemeinen Ergebnisse des vorigen Absatzes wollen wir jetzt an einigen einfachen Beispielen illustrieren und ergänzen. Besonders aufmerksam werden wir die inverse Warteordnung untersuchen.

[6]) Die Wartezeit besteht zunächst aus dem Zeitabschnitt, während dessen sich die Anzahl der im System anwesenden Kunden nicht ändert — dieser Zeitabschnitt ist exponentialverteilt mit dem Parameter $\lambda + n\mu$ — und weiter aus der Wartezeit eines Kunden, der in der Schlange als $(j - 1)$-ter, j-ter oder $(j + 1)$-ter steht, je nachdem, wo er sich nach der ersten Änderung der Kundenanzahl befindet.

1. Ein fast triviales Beispiel der Vašíčekschen Warteordnungen ist die *natürliche Warteordnung*, für die $r_1 = r_2 = \ldots = 0$ ist, also $R_0 = R_1 = R_2 = \ldots = 1$. Die Gleichung (5.8) lautet in diesem Falle

$$P(k, j) = (1 - p)\, P(k, j - 1) + p\, P(k, j)\,,$$

so daß $P(k, j) = P(k, j - 1)$ für $j = 1, 2, 3, \ldots$ gelten muß. Zusammen mit den Bedingungen (5.9) ergibt diese Gleichheit das erwartete Ergebnis: es ist $P(0, j) = 1$ für $j = 1, 2, 3, \ldots$ und $P(k, j) = 0$ für alle $k > 0$ (ohne Rücksicht auf den Wert von j).

In einem System mit natürlicher Warteordnung überholen sich die Kunden in der Schlange überhaupt nicht; demgemäß erhalten wir auch aus (5.5) und (5.11) die zu erwartenden Ergebnisse $P_{\text{akt}}(k) = 0 = P_{\text{pas}}(k)$ für alle $k = 1, 2, 3, \ldots$; und auch die anderen Formeln geben die für das gewöhnliche System $M/M/n$ wohlbekannten Ergebnisse.

2. Wesentlich interessanter ist schon der andere Grenzfall der *inversen Warteordnung*, die durch $r_1 = 1$, $r_2 = r_3 = \ldots = 0$ charakterisiert ist. Es gilt hier $R_j = 0$ für alle $j > 0$ und die Gleichung (5.8) lautet

$$P(k, j) = (1 - p)\, P(k, j - 1) + p\, \mathrm{P}(k - 1, j + 1)\,. \tag{6.1}$$

Als Randbedingungen kommen dazu noch (5.9) und

$$P(0, j) = (1 - p)^j\,, \quad j = 0, 1, 2, \ldots, \tag{6.2}$$

was aus (5.10) folgt.

Als Lösung der Gleichung (6.1) mit den Randbedingungen (5.9) und (6.2) bekommen wir [7])

$$\begin{aligned} P(k, j) &= p^k(1 - p)^{k+j} \binom{2k + j}{k} \frac{j}{2k + j} = \\ &= \frac{\varrho^k}{(1 + \varrho)^{2k+j}} \binom{2k + j}{k} \frac{j}{2k + j}\,. \end{aligned} \tag{6.3}$$

Der Ansatz $R_0 = 1$, $R_j = 0$ $(j > 0)$ in (5.4) ergibt zunächst $q_1 = \Pi$, $q_j = 0$ $(j > 1)$ und dann mit (5.5) das fast offenbare Ergebnis

$$P_{\text{akt}}(k) = p_{n+k} = p_n \varrho^k = \Pi\, \varrho^k(1 - \varrho)\,;$$

aus (5.11) erhält man dann

$$P_{\text{pas}}(k) = \Pi\, P(k, 1) = \Pi\, p^k(1 - p)^{k+1} \binom{2k}{k} (k + 1)^{-1}\,. \tag{6.4}$$

---

[7]) Allgemeine Lösungsmethoden für Gleichungen dieses Typs werden z.B. in [5] untersucht.

Wir berechnen nun die entsprechenden Mittelwerte (5.12) und (5.13): die *mittlere Anzahl der aktiven Überholungen* ist gemäß (5.12) gleich

$$\text{(6.5)} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} k p_{n+k} = p_n \varrho(1-\varrho)^{-2} = \Pi \varrho(1-\varrho)^{-1} ;$$

das ist natürlich auch die mittlere Anzahl γ der in der Schlange stehenden Kunden (die mittlere Schlangenlänge – vgl. [4], Formel (4.15) auf S. 105). Die *mittlere Anzahl der passiven Überholungen* ist nach (5.13) gleich

$$\text{(6.6)} \qquad \Pi \sum_{k=1}^{\infty} k\, P(k, 1) = \Pi\, M(1) .$$

Wenn wir jetzt (6.6) mit (6.5) vergleichen, sehen wir, daß $M(1) = \varrho(1-\varrho)^{-1}$ sein soll.

Dieses Ergebnis können wir auch unmittelbar berechnen: wenn wir in (5.14) nach (6.3) einsetzen, erhalten wir

$$M(1) = \sum_{k=1}^{\infty} p^k(1-p)^{k+1} \binom{2k+1}{k} \frac{k}{2k+1} =$$

$$= (1-p) \sum_{k=1}^{\infty} [p(1-p)]^k \binom{2k}{k} - p^{-1} \sum_{k=1}^{\infty} [p(1-p)]^{k+1} \binom{2k}{k} \frac{1}{k+1} =$$

$$= (1-p)\, 2p(1-2p)^{-1} - (2p)^{-1}[1 - 2p + 2p^2 - 1 + 2p] =$$

$$= p(1-2p)^{-1} = \varrho(1-\varrho)^{-1} ,$$

so daß die Mittelwerte (6.5) und (6.6) wirklich gleich sind. Nichtsdestoweniger ist die unmittelbare Berechnung des Mittelwertes $M(j)$ durch Einsetzen von (6.3) in (5.14), wie man ersieht, nicht sehr vorteilhaft, nicht einmal in dem einfachsten Fall $j = 1$, und um so weniger also für $j > 1$. Den Mittelwert $M(1)$ erhalten wir jedoch viel leichter aus (5.16), wenn wir nur beachten, daß $R_0 = 1$, $R_j = 0$, $S_j = 1$ für $j > 0$ gilt. Für $j > 0$ können wir dann die Mittelwerte $M(j)$ schrittweise aus (5.15) berechnen: wir haben da

$$M(1) - M(0) = M(1) = \varrho(1-\varrho)^{-1}$$

und dann auch ganz allgemein

$$M(j+2) - M(j+1) = M(j+1) - M(j) , \quad j = 0, 1, 2, \ldots ,$$

so daß wir endgültig zur Formel

$$\text{(6.7)} \qquad M(j) = j\, \varrho(1-\varrho)^{-1} , \quad j = 0, 1, 2, \ldots$$

übergehen können. Ganz natürlich ergibt dann auch die Formel (5.18) für die mittlere Wartezeit das bekannte Ergebnis

$$\mathrm{E}[W] = (n\mu)^{-1}[\Pi + \Pi\, M(1)] = \Pi(n\mu - \lambda)^{-1}\,,$$

– vgl. (5.17).

Die Verteilung der Wartezeit W in Systemen des Typs $M/M/n$ mit inverser Warteordnung ist nicht nur an sich interessant, sondern auch wegen ihres Zusammenhanges mit der Verteilung der *Betriebsperioden* (s. [4], S. 107–108; [2], § 4.8). Wie wir aber schon im vorigen Absatz bemerkt haben, genügen die Wahrscheinlichkeiten $P(k, j)$ nicht, um diese Verteilung auszudrücken. An dem Beispiel der inversen Warteordnung wollen wir nun einen anderen Weg zeigen, der zum Untersuchen des Schicksals eines Kunden in der Schlange geeignet ist (vgl. auch [2], § 4.9).

Wenn ein Kunde $\mathscr{K}$ in das System eintrifft und sich in die Schlange einreiht, nimmt er hier den ersten Platz ein; dann wechselt er seinen Platz, und zwar immer in den Augenblicken, in denen sich die Anzahl der im System anwesenden Kunden ändert: jedes Eintreffen eines neueren Kunden bedeutet für unseren Kunden $\mathscr{K}$ eine Verschiebung um einen Rang zurück, jeder Austritt eines bedienten Kunden aus dem System bedeutet für $\mathscr{K}$ eine Verschiebung um einen Rang vorwärts. Diese sukzessiven Verschiebungen unseres Kunden in der Schlange können wir auch als eine *Irrfahrt* des Kunden $\mathscr{K}$ in der Schlange auffassen; wir sehen wirklich leicht ein, daß diese Verschiebungen eine homogene Markovsche Kette mit den Übergangswahrscheinlichkeiten p_{ij} realisieren:

$$p_{00} = 1\,, \quad p_{0j} = 0 \quad \text{für} \quad j > 0\,,$$

$$p_{ii+1} = \lambda(\lambda + n\mu)^{-1} = p\,, \quad p_{ii-1} = 1 - p \quad \text{für} \quad i > 0\,,$$

$$p_{ij} = 0 \quad \text{für} \quad |i - j| > 1\,.$$

Den nullten Platz in der Schlange interpretieren wir dabei als das Erreichen der Bedienung; 0 ist also der absorbierende Zustand der Kette. Für die Anfangsverteilung $P_k(0)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, der Kette nehmen wir an:

$$P_0(0) = 1 - \Pi\,, \quad P_1(0) = \Pi\,, \quad P_k(0) = 0 \quad \text{für} \quad k > 1\,,$$

was bedeutet, daß wir auch die Möglichkeit der sofortigen Bedienung ohne Warten in Betracht nehmen.

Für unsere Zwecke sind dann die Wahrscheinlichkeiten

$$B(k) = P_0(k) - P_0(k - 1)\,, \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

besonders wichtig, die besagen, daß die Irrfahrt des Kunden in der Schlange nach genau k Schritten zu Ende geht (der Kunde $\mathscr{K}$ verläßt die Schlange und wird in die Bedienung eingenommen). Wir setzen natürlich $B(0) = P_0(0) = 1 - \Pi$.

Da jetzt aber die Zeitdauer der einzelnen Schritte dieser Irrfahrt, d.h. die Intervalle zwischen den Zeitpunkten der Änderungen der Kundenanzahl im System $M/M/n$ bekanntlich voneinander unabhängige Zufallsgrößen sind, alle mit derselben Exponentialverteilung mit dem Parameter $\lambda + n\mu$, so wird die gesamte Irrfahrtsdauer – d.h. die Wartezeit W des Kunden $\mathscr{K}$ – *mit genau k Schritten* eine Zufallsgröße mit Erlang-Verteilung mit den Parametern k und $\lambda + n\mu$ sein. Es gilt also

$$(6.8) \qquad \mathbf{P}\{W = 0\} = 1 - \Pi\,,$$

$$\mathbf{P}\{W > w\} = \sum_{k=1}^{\infty} B(k)\, e^{-(\lambda + n\mu)w} \sum_{j=0}^{k-1} (\lambda + n\mu)^j/j!\,, \quad w \geqq 0\,,$$

oder aber für die charakteristische Funktion χ der Größe W

$$(6.9) \qquad \chi(s) = \mathbf{E}[e^{isW}] = \sum_{k=0}^{\infty} B(k)\,(\lambda + n\mu)^k\,(\lambda + n\mu - is)^{-k}\,.$$

Es bleibt nur noch die Wahrscheinlichkeiten $B(k)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, zu berechnen; das werden wir jetzt auch tun. Wir fangen dabei mit der Bemerkung an, daß jeder Übergang der Kette vom Zustand 1 zum Zustand 0 nur aus einer *ungeraden* Anzahl von Schritten bestehen kann, so daß notwendigerweise $B(2k) = 0$ ist für alle $k = 1, 2, 3, \ldots$. Durch einfache und im wesentlichen wohlbekannte kombinatorische Überlegungen (vgl. [2], § 4.9) erhalten wir dann für ungerade Anzahl der Schritten

$$(6.10) \quad B(2k + 1) = \Pi(1 - p)\,[p(1 - p)]^k \binom{2k}{k} (k + 1)^{-1}\,, \quad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Wenn wir dies in (6.9) einsetzen, so bekommen wir

$$(6.11) \quad \chi(s) = 1 - \Pi + \sum_{k=0}^{\infty} B(2k + 1)\,(\lambda + n\mu)^{2k+1}\,(\lambda + n\mu - is)^{-2k-1} =$$

$$= 1 - \Pi + \Pi \frac{\lambda + n\mu - is}{p(\lambda + n\mu)} \sum_{k=0}^{\infty} [p(1 - p)\,(\lambda + n\mu)^2\,(\lambda + n\mu - is)^{-2}]^k \binom{2k}{k} \frac{1}{k + 1} =$$

$$= 1 - \Pi + \Pi \frac{\lambda + n\mu - is}{2p(\lambda + n\mu)} [1 - \{1 - 4p(1 - p)\,(\lambda + n\mu)^2\,(\lambda + n\mu - is)^{-2}\}^{1/2}] =$$

$$= 1 - \Pi + \frac{\Pi}{2\varrho} \left\{1 + \varrho - \frac{is}{n\mu} - \left[\left(1 + \varrho - \frac{is}{n\mu}\right)^2 - 4\varrho\right]^{1/2}\right\},$$

(vgl. [2], S. 66–67). Die zugehörige Verteilungsfunktion hat O. Vašíček in [3] aus der Formel (6.11) durch inverse Fourier-Transformation abgeleitet; es ist aber auch möglich sie aus (6.8) zu gewinnen, indem man für $B(k)$ nach (6.10) einsetzt; es ist so

$$(6.12)\qquad \mathbf{P}\{W > w\} = e^{-(\lambda+n\mu)w} \sum_{k=0}^{\infty} B(2k+1) \sum_{j=0}^{2k} (\lambda + n\mu)^j\, w^j/j! =$$

$$= \frac{\Pi}{1+\varrho}\, e^{-(\lambda+n\mu)w} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1} \binom{2k}{k} \frac{\varrho^k}{(1+\varrho)^{2k}} \sum_{j=0}^{2k} \frac{(\lambda+n\mu)^j\, w^j}{j!},$$

(vgl. [3], S. 67).

Das Verfahren, das wir eben im Fall der inversen Warteordnung angeführt haben, könnte natürlich auch bei allgemeinen Vašíčekschen Warteordnungen benutzt werden, mit dem Unterschied, daß die Markovsche Kette, die die Irrfahrt des Kunden $\mathscr{K}$ in der Schlange beschreibt, andere Übergangswahrscheinlichkeiten und auch eine andere Anfangsverteilung hätte. In gewöhnlicher Schreibweise wäre dies

$$p_{00} = 1\,, \quad p_{0j} = 0 \quad \text{für} \quad j > 0\,,$$

$$p_{ii+1} = pS_i\,, \quad p_{ii} = pR_i\,, \quad p_{ii-1} = 1 - p \quad (i > 0)\,,$$

$$p_{ij} = 0 \quad \text{für} \quad |i - j| > 0\,;$$

$$P_0(0) = 1 - \Pi = q_0\,, \quad P_j(0) = q_j \quad \text{für} \quad j = 1, 2, 3, \ldots.$$

Aber im allgemeinen Fall ist es nicht mehr so leicht die Wahrscheinlichkeiten $B(k)$ zu berechnen, von denen ja das ganze Verfahren abhängt; damit ist die Anwendbarkeit der ganzen Methode wesentlich begrenzt.

3. In [3] hat O. Vašíček auch die folgende interessante „*gemischte*“ Warteordnung untersucht: ein neu eintreffender Kunde, der wirklich warten muß, reiht sich mit fester Wahrscheinlichkeit ϑ, $0 \leqq \vartheta \leqq 1$, auf dem ersten Platz in die Schlange ein, mit der Wahrscheinlichkeit $1 - \vartheta$ stellt er sich an das Schlangenende. Mit anderen Worten: es handelt sich um eine Vašíčeksche Warteordnung mit $r_1 = \vartheta$, $r_2 = r_3 = \ldots = 0$, so daß $S_k = \vartheta$ und $R_k = 1 - \vartheta$ für alle $k \geqq 1$ ist.[8])

Die Gleichung (5.8) nimmt für die gemischte Warteordnung folgende Form an

$$(6.13)\qquad P(k, j) = (1-p)\, P(k, j-1) + p\vartheta\, P(k-1, j+1) + p(1-\vartheta)\, P(k, j)\,;$$

die Randbedingungen sind (5.9) und

$$P(0, j) = (1-p)^j\, (1 - p + p\vartheta)^{-j}\,, \quad j = 0, 1, 2, \ldots.$$

[8]) Für die möglichen Interpretationen dieser Warteordnung siehe z.B. [4], S. 98.

Als Lösung der Gleichung (6.13) unter den gegebenen Annahmen erhalten wir (vgl. [5])

$$(6.14) \qquad P(k, j) = \frac{p^k \vartheta^k (1-p)^{k+j}}{(1-p+p\vartheta)^{2k+j}} \binom{2k+j}{k} \frac{j}{2k+j} = $$
$$= \frac{\varrho^k \vartheta^k}{(1+\varrho\vartheta)^{2k+j}} \binom{2k+j}{k} \frac{j}{2k+j},$$

was ohne Zweifel an die Formel (6.3) errinnert.

Das ist aber ganz natürlich, denn die inverse Warteordnung ist nur ein Spezialfall der gemischten Warteordnung, und zwar mit $\vartheta = 1$: wenn wir $\vartheta = 1$ in (6.14) einsetzen, bekommen wir wirklich (6.3). Aber auch die natürliche Warteordnung ist ein Spezialfall der gemischten Warteordnung, und zwar für $\vartheta = 0$; setzen wir in (6.14) überall $\vartheta = 0$ ein, so wird $P(k, j) = 0$ für alle $k > 0$ – vgl. den Anfang dieses Absatzes. Die gemischten Warteordnungen bilden also einen einfachen *stetigen Übergang* von der natürlichen zu der inversen Warteordnung.

Wir wollen jetzt noch andere Eigenschaften der gemischten Warteordnung untersuchen; auch hier werden Analogien mit der inversen Warteordnung auftreten. Die Formel (5.5) gibt wieder das – anschaulich offenbare – Ergebnis:

$$P_{\text{akt}}(k) = \vartheta p_{n+k} = \Pi \vartheta \, \varrho^k (1-\varrho), \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

mit

$$P_{\text{akt}}(0) = 1 - \Pi \vartheta \varrho,$$

so daß wir nach (5.12) für die *mittlere Anzahl der aktiven Überholungen* den Ausdruck

$$(6.15) \qquad \sum_{k=1}^{\infty} k \vartheta p_{n+k} = \vartheta p_n \sum_{k=1}^{\infty} k \varrho^k = \Pi \vartheta \, \varrho (1-\varrho)^{-1} = \Pi \sum_{k=1}^{\infty} S_k \varrho^k$$

erhalten.

Die Berechnung der Erwartungswerte $M(j)$ ist ein wenig schwieriger: setzen wir (6.14) in (5.14) ein, so ergibt sich im allgemeinen

$$M(j) = \sum_{k=1}^{\infty} k \, P(k, j) = \frac{j}{(1+\varrho\vartheta)^j} \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{\vartheta\varrho}{(1+\varrho\vartheta)^2}\right]^k \binom{2k+j-1}{k-1}.$$

Wenn wir uns aber nur mit $M(1)$ begnügen, wird für diesen Spezialfall die Berechnung viel einfacher:

$$M(1) = \frac{1}{1+\varrho\vartheta} \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{\varrho\vartheta}{(1+\varrho\vartheta)^2}\right]^k \binom{2k}{k} \frac{k}{k+1} = \frac{\varrho}{1-\varrho\vartheta}$$

(vgl. das entsprechende Ergebnis für die inverse Warteordnung). Die Fortsetzung ist dann analog wie im Punkt 2: für $j > 1$ berechnen wir die Mittelwerte $M(j)$ nicht direkt nach der Formel (5.14), sondern aus der Gleichung (5.15); das allgemeine Ergebnis ist hier wieder – vgl. die Formel (6.7) – durch den Ausdruck

$$M(j) = j\vartheta\varrho(1 - \varrho\vartheta)^{-1} \tag{6.16}$$

gegeben.

Die Ausdrücke für die Wahrscheinlichkeiten $P_{\text{pas}}(k)$ sind noch komplizierter; gemäß (5.4) ist

$$\begin{aligned} q_1 &= \Pi(1 - \varrho + \varrho\vartheta) = \Pi(1 - \vartheta)(1 - \varrho) + \Pi\vartheta\,, \\ q_j &= \Pi(1 - \vartheta)(1 - \varrho)\,\varrho^{j-1}\,, \quad j = 2, 3, 4, \ldots, \end{aligned} \tag{6.17}$$

so daß wir durch Einsetzen dieser Werte und (6.14) in (5.11) für $k = 1, 2, 3, \ldots,$ die Ausdrücke

$$\begin{aligned} P_{\text{pas}}(k) &= \frac{\Pi\varrho^k\vartheta^{k+1}}{(1 + \varrho\vartheta)^{2k+1}}\binom{2k}{k}\frac{1}{k+1} + \\ &+ \frac{\Pi(1 - \vartheta)(1 - \varrho)\,\varrho^k\vartheta^k}{(1 + \varrho\vartheta)^{2k}}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{j\varrho^{j-1}}{(1 + \varrho\vartheta)^j}\binom{2k + j}{k}\frac{1}{2k + j} \end{aligned} \tag{6.18}$$

bekommen. Mit Hilfe von (6.16) und (6.17) läßt sich jedoch der Mittelwert (5.13) berechnen; es ist

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\infty} q_j\, M(j) &= \Pi\vartheta^2\,\varrho(1 - \varrho\vartheta)^{-1} + \Pi(1 - \vartheta)(1 - \varrho)\,\vartheta\,\varrho(1 - \varrho\vartheta)^{-1}\sum_{j=1}^{\infty} j\varrho^{j-1} = \\ &= \Pi\vartheta\,\varrho(1 - \varrho)^{-1}\,, \end{aligned}$$

was auch mit (6.15) übereinstimmt. Vollständigkeitshalber geben wir noch die Wahrscheinlichkeit $P_{\text{pas}}(0)$ an, die die Kunden vielleicht auch interessieren könnte:

$$\begin{aligned} P_{\text{pas}}(0) &= 1 - \Pi + \sum_{j=1}^{\infty} q_j\, P(0, j) = \\ &= 1 - \Pi + \Pi\,\vartheta(1 + \varrho\vartheta)^{-1} + \Pi(1 - \vartheta)(1 - \varrho)(1 + \varrho\vartheta)^{-1}\sum_{j=1}^{\infty}\varrho^{j-1}(1 + \varrho\vartheta)^{1-j} = \\ &= 1 - \Pi\vartheta\,\varrho(1 + \varrho\vartheta)^{-1}(1 - \varrho + \varrho\vartheta)^{-1}\,. \end{aligned} \tag{6.19}$$

Unsere Untersuchungen der gemischten Warteordnung werden wir mit einer Bemerkung über die Interpretation ihres Zusammenhanges mit der inversen Warteordnung abschliessen. Wir betrachten einen Kunden $\mathscr{K}$ der sich schon in der Schlange an einem gewissen Platz eingereiht hat. Dann werden alle auf ihn bezogenen Wahrscheinlichkeiten, Mittelwerte und Eigenschaften des Systems überhaupt, *welche von der Anzahl und dem Schicksal der neueren Kunden, die sich in die Schlange erst hinter ihn einreihen, nicht abhängen,* immer dieselbe sein, wie in einem System mit inverser Warteordnung, aber mit einem Inputprozeß mit dem Parameter $\vartheta\lambda$ anstatt λ. Zu solchen Größen gehören z.B. die Wahrscheinlichkeiten $P(k, j)$, die Mittelwerte $M(j)$, die Wahrscheinlichkeit $P_{\text{pas}}(0)$, aber auch die Verteilung der Wartezeit des Kunden, der auf einem gewißen Platz in der Schlange steht, und der zugehörige Erwartungswert (s. [3], Absatz F3), usw. Wir sehen wirklich leicht ein, daß wir die entsprechenden Formeln für die gemischte Warteordnung aus den Formeln für die inverse Warteordnung erhalten, wenn wir nur dort überall $\vartheta\lambda$ statt λ schreiben.

7. Das System $M/M/1$ mit relativen Prioritäten

Zu Kundenüberholungen kommt es natürlich auch in solchen Systemen, wo die Kunden nicht alle derselben Gattung (nicht gleichwertig) sind, sondern in mehrere Rangklassen zerfallen, zwischen denen eine Vorranghierarchie erklärt ist: Kunden, die zu einer höheren Vorrangklasse gehören, reihen sich im Augenblicke ihres Eintreffens in die Schlange vor alle schon wartenden Kunden der niedrigeren Klasse ein, aber erst nach allen Kunden der höheren Klassen.

In diesem letzten Absatz wollen wir uns ganz kurz mit dem Fall eines $M/M/1$ – Systems befassen, in welches Kunden von *zwei* verschiedenen Kategorien eintreffen: gewöhnliche und Vorrangkunden. Es handelt sich dabei um einen *relativen* Vorrang (s. [1], S. 158; „non-preemptive priority" – vgl. auch [4], S. 92–96), der sich nur bei dem Einreihen in die Warteschlange bemerkbar macht, ohne jedoch den Verlauf der schon begonnenen Bedienung zu beeinflussen. Das bedeutet, daß es sich also wieder nur um eine neue Art der Warteordnung im Sinne von [4] (S. 89 und 93) handelt. Wir setzen voraus, daß die Prozesse, die die Ankünfte der Kunden der beiden Klassen in das System beschreiben, zwei unabhängige homogene Poissonprozesse sind, mit dem Parameter λ_2 für gewöhnliche und λ_1 für Vorrangkunden. Die Bedienungszeiten haben alle dieselbe Exponentialverteilung mit dem Parameter μ, das für beide Klassen gleich ist. Wir betrachten wieder nur ein System im Gleichgewicht, so daß notwendigerweise $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 < \mu$ sein muß.

Wie in dieser Arbeit überhaupt, interessieren uns auch hier vor allem die Änderungen der Kundenreihenfolge. Unter den gegebenen Voraussetzungen ist die ganze Situation noch ziemlich übersichtlich, denn es gibt im System nur eine Bedienungsstelle, so daß die Kunden sich nur bei dem Einreihen in die Warteschlange überholen können; weiterhin gilt innerhalb jeder Klasse die natürliche Warteordnung (Kunden gleicher Klasse werden in der Reihenfolge ihrer Ankunft bedient). Daraus folgt unmittelbar: 1. *kein Vorrangkunde kann überholt werden*; 2. *kein gewöhnlicher*

Kunde kann jemanden überholen. Die Frage ist nur, wieviel Vorrangkunden einen gewöhnlichen Kunden überholen werden, oder umgekehrt, wieviel gewöhnliche Kunden ein Vorrangkunde selbst überholen wird.

Die Antwort auf die erste Frage läßt sich leicht mit Hilfe der Ergebnisse geben, die wir im vorigen Absatz gewonnen haben. Ein gewöhnlicher Kunde $\mathscr{K}$ findet mit der Wahrscheinlichkeit (5.3), $k = 0, 1, 2, \ldots, \varrho = \lambda/\mu$, im Zeitpunkt seines Eintreffens in das System genau k andere Kunden (der beiden Klassen zusammen) an, und falls er warten muß, d.h. falls $k > 0$ ist, reiht er sich als letzter, also k-ter, in die Warteschlange ein. Die neueren gewöhnlichen Kunden reihen sich nach der natürlichen Ordnung erst hinter ihn ein; die neueren Vorrangkunden überholen ihn. Auf ihre innere Reihenfolge kommt es aber gar nicht an; die Verteilung der passiven Überholungen unseres Kunden wird also dieselbe sein, auch wenn wir für die Vorrangkunden die (nur innerhalb ihrer Klasse geltende) inverse Warteordnung voraussetzen. Dann ist aber der Kunde $\mathscr{K}$ in derselben Situation, wie ein Kunde in der Schlange bei der gemischten Warteordnung, die wir eben im dritten Teil des vorigen Absatzes untersucht haben: jeder neuere Kunde reiht sich entweder als erster (wenn er ein Vorrangkunde ist) oder als letzter (falls er ein gewöhnlicher ist) ein; die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten sind bekanntlich $\vartheta = \lambda_1/\lambda$, bzw. $1 - \vartheta = \lambda_2/\lambda$ (vgl. auch die Fußnote[8]) auf der Seite 93 in [4]). Man kann also die Formel (6.14) anwenden; aus ihr und aus (5.3) ergibt sich der folgende Ausdruck für die Verteilung der Anzahl der passiven Überholungen eines gewöhnlichen Kunden

$$(7.1)\qquad P_{\text{pas}}(k) = \sum_{j=1}^{\infty} (1 - \varrho)\, \varrho^j \varrho_1^k (1 - \varrho_1)^{-2k-j} \binom{2k + j}{k} \frac{j}{2k + j} =$$

$$= \frac{(1 - \varrho)\, \varrho_1^k}{(1 - \varrho_1)^{2k}} \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{\varrho}{1 - \varrho_1}\right)^j \binom{2k + j}{k} \frac{j}{2k + j}, \quad k = 1, 2, 3, \ldots,$$

wo natürlich $\varrho_1 = \lambda_1/\mu = \vartheta\varrho$ ist. Den Wahrscheinlichkeiten (7.1) entspricht der Erwartungswert (die *mittlere Anzahl der passiven Überholungen eines gewöhnlichen Kunden*)

$$(7.2)\qquad (1 - \varrho) \sum_{j=1}^{\infty} j \left(\frac{\varrho}{1 - \varrho_1}\right)^j \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\varrho_1}{1 - \varrho_1}\right)^k \binom{2k + j}{k} \frac{k}{2k + j}.$$

Die Antwort auf die zweite Frage, die wir uns gestellt haben, scheint auf den ersten Blick sehr leicht zu sein, denn die Anzahl der aktiven Überholungen eines Vorrangkunden ist eindeutig schon in dem Augenblick bestimmt, in dem der Kunde in das System eintrifft: sie ist nämlich der Anzahl der gewöhnlichen Kunden gleich, die eben in der Schlange warten. Es ist aber nicht so einfach, die Verteilung dieser Anzahl zu finden; der bequemste Weg dazu wäre wahrscheinlich die Lösung des üblichen Differentialgleichungssystems für die Gleichgewichtswahrscheinlichkeitsverteilung des (zweidimensionalen) Markovschen Prozesses, der den Verlauf des Bedienungssystems beschreibt. Das möchten wir jedoch schon lieber dem Leser überlassen und uns hier nur damit begnügen, daß wir den Erwartungswert der Anzahl der gewöhnlichen Kunden in der Schlange angeben: er ist offenbar der Differenz zwischen dem Erwartungswert der Anzahl aller Kunden und dem Erwartungswert der Anzahl der Vorrangkunden allein gleich, also (vgl. [4], S. 83)

$$\frac{\varrho^2}{1-\varrho} - \frac{\varrho_1^2}{1-\varrho_1} = \frac{\varrho^2(1-\vartheta)(1+\vartheta-\varrho\vartheta)}{(1-\varrho)(1-\varrho\vartheta)}\,; \tag{7.3}$$

dies ist auch die *mittlere Anzahl der aktiven Überholungen eines Vorrangkunden.*

Literatur

[1] *F. Ferschl:* Zufallsabhängige Wirtschaftsprozesse. Physica-Verlag, Wien—Würzburg 1964.

[2] *J. Riordan:* Stochastic Service Systems. J. Wiley, New York 1962.

[3] *O. Vašíček:* Jedna speciální čekací disciplína v systému hromadné obsluhy. Aplikace matematiky, *10* (1965), 59—71.

[4] *F. Zítek:* Ztracený čas. Academia, Praha 1969.

[5] *F. Zítek:* Aritmetické vlastnosti kombinačních čísel. (Im Druck).

Souhrn

O POŘADÍ ZÁKAZNÍKŮ V SYSTÉMECH HROMADNÉ OBSLUHY

FRANTIŠEK ZÍTEK

Vzájemné pořadí zákazníků na výstupu ze systému hromadné obsluhy se obecně nemusí shodovat s pořadím, v jakém zákazníci do systému přišli. V tomto článku se sledují změny v pořadí zákazníků v systémech typu $M/M/n$ způsobené jednak vzájemným předstihováním při paralelní obsluze na více linkách, jednak vlivem frontového režimu. Podrobněji se přitom probírají: systém $M/M/2$ s řádným režimem, systém $M/M/2$ se ztrátami (bez fronty), systém $M/M/\infty$; dále systém $M/M/n$ s frontovým režimem Vašíčkova typu (viz [3]) a systém $M/M/1$ se slabými přednostmi a dvěma kategoriemi zákazníků. Jsou nalezeny výrazy pro rozložení pravděpodobností počtu předstižení (aktivních i pasivních) a příslušné střední hodnoty.

Anschrift des Verfassers: Dr. *František Zítek,* CSc., Matematický ústav ČSAV v Praze, Žitná 25, Praha 1.