Aplikace matematiky

Jiří Kobza

Методы типа Адамса с вторыми производными

Aplikace matematiky, Vol. 20 (1975), No. 6, 389–405

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/103607`

МЕТОДЫ ТИПА АДАМСА С ВТОРЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

Иржи Кобза*)

(Поступило в редакцию 21-ого августа 1972 г., переработаное 1-ого апреля 1974 г.)

В предлагаемой статье изучаются методы типа Адамса в форме (2) для численного решения задачи (1). В работах [4], [5], [6] изучались частные случаи, в работе [1] общая теория таких методов для случая $r, s \leqq 0$. В работе [3] изучена конкретная формула, в коротой $r = s = 1$, $m = n = 2$. Исследуется разрешимость задачи (2)–(3) и сходимость её решений к решению задачи (1). Методика исследования примыкается к работе [2], в которой изучены только методы с первой производной.

1.

1.1 Пусть имеется задача Коши для обыкновенного дифференциального уравнения

$$y' = f(x, y)\,, \quad y(a) = b\,. \tag{1}$$

Предположим, что

1° $f(x, y)$ обладает непрерывными частными производными первого порядка в прямоугольнике $\Pi = \{|x - a| \leqq A, |y - b| \leqq B\}$; тогда решение $y(x)$ задачи (1) существует и единственно по меньшей мере в промежутке $\langle a - H, a + H\rangle$, $H = \min(A, B/M_f)$, $M_f = \max\{|f(x, y)|, (x, y) \in \Pi\}$. Обозначим L_f постоянную Липшица функции f по отношению к y.

2° функция $g(x, y) = f_x(x, y) + f_y(x, y) \,.\, f(x, y)$, $\{g[x, y(x)] = y''(x)\}$, которая в силу 1° непрерывна и ограничена на Π, $|g(x, y)| \leqq M_g$, удовлетворяет здесь условию Липшица по отношению к y с постоянной L_g.

1.2 При численном решении задачи (1) будем искать значения $y(x_k)$ в точках равномерной сетки $x_k = a + kh$, $h > 0$ при помощи разностного уравнения

$$\sum_{\nu=0}^{m} \alpha_\nu y_{k-\nu} = h \sum_{\nu=0}^{n} \beta_\nu f_{k+r-\nu} + h^2 \sum_{\nu=0}^{l} \gamma_\nu g_{k+s-\nu} \tag{2}$$

*) Работа проведена во время стажировки в МГУ под руководством А. Д. Горбунова.

где $f_j = f(x_j, y_j)$, $g_j = g(x_j, y_j)$; $\alpha_\nu, \beta_\nu, \gamma_\nu$ — вещественные постоянные и $\alpha_0 \neq 0$; r, s — целые, m — натуральное, n, l — неотрыцательные целые числа. В формуле одновременно используются узлы

$$x_{k-q}, \ldots, x_k, \ldots, x_{k+t}\,; \quad q = \max(m, n - r, l - s)\,, \quad t = \max(0, r, s)\,.$$

Решением уравнения (2) в промежутке $\langle a, a + \bar{x}\rangle$, $0 \langle \bar{x} \leqq a + A$ при заданной сетке $\{x_k\}$ называем сеточную функцию $\{y_k\}_{k=0}^{N_h}$, $N_h = [(\bar{x} - a)/h]$, для которой $|y_k - b| \leqq B$ и которая удовлетворяет соотношению (2) для всех $k = 1, 2, \ldots, N_h$; для этого надо подходящим образом определить значения $y_j, j = -1, -2, \ldots$ $\ldots, -q + 1$ (начальные условия), y_{N_h+j}, $j = 1, 2, \ldots, t$ и соответвующие значения f_j, g_j в случае, когда $(x_j, y_j) \notin \Pi$.

Начальные условия для уравнения (2) заданы при помощи *начальной функции* $\eta_h(x)$, определенной для $x \in \langle a - h(q - 1), a\rangle$;

$$y_k = \eta_h(x_k)\,, \quad k = 0, -1, -2, \ldots, -q + 1$$

и предполагаются выполненными условия

а) $\eta_h(a) = b$, б) $(x, \eta_h(x)) \in \Pi$,

в) $\eta_h(x') - \eta_h(x'')| \leqq \varphi(|x' - x''|)$ при $|x' - x''| \leqq h$ с непрерывной функцией $\varphi(h)$ обладающей свойством: $\varphi(h) \to 0$ монотонно при $h \to 0$.

1.3 На коэффициенты $a_\nu, \beta_\nu, \gamma_\nu$ и параметры $m, n, l; r, s$ налагаются требования

I. *разрешимости задачи* (2)—(3); это значит возможность построения чисел $h_0, \bar{x}$ $(h_0 > 0, 0 < \bar{x} - a \leqq H)$ таких, что всякому $h \in (0, h_0\rangle$ сопоставляется определенное решение $\{y_k\}_{k=0}^{N_h}$, $N_h = [\bar{x} - a/h]$ задачи (2)—(3);

II. *сходимости*, которое для всех $k = 1, 2, \ldots, N_h$ твебует равномерное по k выполнение соотношения

$$|y(x_k) - y_k| \to 0 \quad \text{при} \quad h \to 0\,;$$

III. *максимальной аппроксимации*, состоящее в том, чтобы для всякого решения уравнения $y' = f(x, y)$ имело место соотнощение

$$\sum_{\nu=0}^{m} \alpha_\nu y(x_{k-\nu}) - \sum_{\nu=0}^{n} \beta_\nu f[x_{k+r-\nu}, y(x_{k+r-\nu})] -$$
$$- h^2 \sum_{\nu=0}^{l} \gamma_\nu g[x_{k+s-\nu}, y(x_{k+s-\nu})] = O(h^p),\,, \quad k = 0, 1, \ldots, N_h$$

с положительным числом p по возможности большим.

1.4 Лемма 1. *Пусть* $L[y] \equiv \sum_{\nu=0}^{m} \alpha_\nu y_{k-\nu}$ — *устойчивый оператор, числа* c_k, $k = 0, 1, 2, \ldots$ *определены соотношением*

$$\sum_{\nu=0}^{m} \alpha_\nu c_{k-\nu} = \begin{cases} 1 & \text{для} \quad k = 0\,, \\ 0 & \text{для} \quad k > 0 \end{cases} \quad c_{-1} = c_{-2} = \ldots = c_{-m} = 0\,. \tag{4}$$

Тогда 1° *существует постоянная* $C > 0$ *такая, что* $|c_k| \leqq C$;

2° *если* $\sum_{\nu=v}^{m} \alpha_\nu = 0$, *то для* $j \geqq 0$ *имеет место соотношение*

$$S = \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{\nu=1}^{m-i} \alpha_{i+\nu} c_{j-\nu} = -1 \tag{5}$$

Доказательство. 1° Определение устойчивости (по Дальквисту) приведено в [1], [2]; из него вытекает ограниченность c_k, так как они только членом $c_{-m} = 0$ отличаются от ограниченного решения однородного уравнения

$$\sum_{\nu=0}^{m} \alpha_\nu c_{k-\nu} = 0\,, \quad k = 1, 2, \ldots; \quad c_0 = 1/\alpha_0\,, \quad c_{-1} = c_{-2} = \\ = \ldots = c_{-m+1} = 0\,.$$

2° В силу наших предположений имеет место

$$c_{j-k-1} \sum_{i=0}^{m} \alpha_i = 0 = \sum_{\nu=0}^{m} \alpha_\nu c_{j-k-\nu}\,, \quad k = 1, 2, \ldots, j - m\,;$$

потому

$$S = \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{\nu=1}^{m-i} \alpha_{i+\nu} c_{j-\nu} = \sum_{\nu=1}^{m} c_{j-\nu} \sum_{i=\nu}^{m} \alpha_i = \sum_{\nu=1}^{m} c_{j-1-\nu} \sum_{i=\nu}^{m} \alpha_i = \ldots = \sum_{\nu=1}^{m} c_{m-\nu} \sum_{i=\nu}^{m} \alpha_i\,.$$

Так как

$$0 = \sum_{\nu=1}^{m} c_{m-\nu} \sum_{i=0}^{m} \alpha_i = S + \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{\nu=0}^{m} \alpha_\nu c_{k-\nu} = S + 1$$

в силу (4), то имеет место утверждение леммы.

2.

2.1 Лемма 2. *Пусть* $L[y] \equiv \sum_{\nu=0}^{m} \alpha_\nu y_{k-\nu}$ — *устойчивый оператор,* $\sum_{\nu=0}^{m} \alpha_\nu = 0$, c_k *определены по* (4).

Если $\{z_k\}_{k=1}^{N_h}$ *является решением задачи*

$$\sum_{\nu=0}^{m} \alpha_\nu z_{k-\nu} = hF_k\,, \quad z_i = \eta_h(x_i) \quad \text{для} \quad i = 0, -1, \ldots, -m + 1\,; \\ k = 1, 2, \ldots, N_h\,, \tag{6}$$

в которой $\eta_h(x)$ *обладает свойствами* а), б), в) *из* 1.2 *и* $|F_k| \leqq F$,
то $|z_j - z_0| \leqq M\varphi(h) + jhCF$ *для* $j = 1, 2, \ldots, N_h$,
где $M = \frac{1}{6}Cm(m^2 - 1) \,.\, \max\limits_{\nu} |\alpha_\nu|$ *и* C *определено в лемме* 1.

Доказательство. Умножим (6) на c_{j-k} и просуммируем по $k = 1, 2, \ldots, j$:

$$\sum_{k=1}^{j} c_{j-k} \sum_{\nu=0}^{m} \alpha_\nu z_{k-\nu} = h \sum_{k=1}^{j} c_{j-k} F_k \,. \tag{7}$$

Преобразованием суммы на левой стороне (7) в силу (4), (5) получается

$$\sum_{k=1}^{j} c_{j-k} \sum_{\nu=0}^{m} \alpha_\nu z_{k-\nu} = \sum_{i=0}^{m-1} z_{-i} \sum_{\nu=1}^{m-i} \alpha_{i+\nu} c_{j-\nu} + \sum_{i=1}^{j} z_i \sum_{\nu=0}^{m} \alpha_\nu c_{j-i-\nu} =$$
$$= \sum_{i=0}^{m-1} (z_{-i} - z_0) \sum_{\nu=1}^{m-i} \alpha_{i+\nu} c_{j-\nu} + z_j - z_0 \,.$$

По свойствам начальной функции $|z_0 - z_{-i}| \leqq i\varphi(h)$, $i = 1, 2, \ldots, m - 1$. После подстановки этих выражений в (7) и перехода к оценке молулей получаем утверждение леммы.

В 2.2 – 2.4 будем предполагать что $L[y]$ устойчив и уравнение (2) пронормировано так, что $\alpha_0 = 1$.

2.2 Пусть в (2) имеет место $r < 0, s < 0$ (*явные методы*); тогда для разрешимости задачи (2) – (3) достаточно выбрать числа $h_0, \bar{x}$ так, чтобы имело место $0 < h_0 \leqq h_1$,

$$0 < \bar{x} - a \leqq H \,, \quad 0 < h_1 < \min(\bar{x} - a, H/(q - 1)) \,, \tag{8}$$
$$M\varphi(h_1) + (\bar{x} - a)\, C[M_f \textstyle\sum|\beta_\nu| + h_1 M_g \sum|\gamma_\nu|] \leqq B$$

[и это всегда возможно в силу свойств функции $\varphi(h)$].

Доказательство. Пусть для $h_1, \bar{x}$ имеет место (8); положим

$$F_k = \sum_{\nu=0}^{n} \beta_\nu f_{k+r-\nu} + h \sum_{\nu=0}^{l} \gamma_\nu g_{k+s-\nu}, \quad k = 1, 2, \ldots, N_h.$$

Следовательно, $|F_k| \leqq M_f \sum|\beta_\nu| + h_1 M_g \sum|\gamma_\nu| = F$.
В силу леммы 2 можно осуществить вычисление y_k по рекрурентной формуле

$$y_k = -\sum_{\nu=1}^{m} \alpha_\nu y_{k-\nu} + h \sum_{\nu=0}^{n} \beta_\nu f_{k+r-\nu} + h^2 \sum_{\nu=0}^{l} \gamma_\nu g_{k+s-\nu}$$

с шагом $h \in (0, h_1)$ по меньшей мере для $k = 1$. Если мы уже вычислили y_k, $k = 1, 2, \ldots, j - 1$ и имеет место $jh \leqq \bar{x} - a$, $(x_k, y_k) \in \Pi$ для $k = 1, 2, \ldots, j - 1$, то по лемме 2, в силу (8), имеем $|y_j - y_0| \leqq M\varphi(h) + jhCF \leqq B$.
Поэтому $|y_k - y_0| \leqq B$ для всех $k = 1, 2, \ldots, N_h$.

2.3 Когда в уравнении (2) одно из чисел r, s равно нулю и второе неположительное (*неявные методы*), то (2) можно писать в форме

$$(9)\qquad \sum_{\nu=0}^{m} \alpha_\nu y_{k-\nu} = h \sum_{\nu=0}^{n} \beta_\nu f_{k-\nu} + h^2 \sum_{\nu=0}^{l} \gamma_\nu g_{k-\nu}\,, \quad \alpha_0 = 1\,, \quad |\beta_0| + |\gamma_0| > 0\,;$$

начальный отрезок определяется при помощи начальной функции $\eta_h(x)$. При известных уже $y_{k-1}, y_{k-2}, \ldots, y_{k-q}$ получается неявное уравнение относительно y_k, которое можно решить методом последовательных приближений:

1° Пусть числа $h_1, \bar{x}$ определены при помощи (8) и $h \in (0, h_1\rangle$; тогда для $x_k \leqq \bar{x}$ выбирается y_k^0 так, чтобы $(x_k, y_k^0) \in \Pi$ (по явной формуле, или просто $y_k^0 = y_{k-1}$).

2° Для $i = 0, 1, 2, \ldots$ определяем последовательность $\{y_k^i\}_{i=0}^{\infty}$ соотношением $\alpha_0 y_k^{i+1} + \sum_{\nu=1}^{m} \alpha_\nu y_{k-\nu} = h[\beta_0 f(x_k, y_k^i) + h\gamma_0 g(x_k, y_k^i) + \sum_{\nu=1}^{n} \beta_\nu f_{k-\nu} + h \sum_{\nu=1}^{l} \gamma_\nu g_{k-\nu}]$. Если обозначить $F_k^i = \beta_0 f(x_k, y_k^i) + h\gamma_0 g(x_k, y_k^i) + \sum_{\nu=1}^{n} \beta_\nu f_{k-\nu} + h \sum_{\nu=1}^{l} \gamma_\nu g_{k-\nu}$, то имеем $|F_k^0| \leqq M_f \sum |\beta_\nu| + h_1 M_g \sum |\gamma_\nu| = F$; из леммы 2 и (8) следует $(x_k, y_k^1) \in \Pi$. Поэтому тоже $|F_k^1| \leqq F, (x_k, y_k^2) \in \Pi$ и т. д. Значит, $(x_k, y_k^i) \in \Pi$ для всех $i = 0, 1, 2, \ldots$. Далее,

$$(10)\qquad |y_k^{i+1} - y_k| \leqq h|\beta_0|\,|f(x_k, y_k^i) - f(x_k, y_k)\,| + h^2|\gamma_0|\,|g(x_k, y_k^i) - g(x_k, y_k)| \leqq$$
$$\leqq h[|\beta_0|\, L_f + h|\gamma_0|\, L_g]\,|y_k^i - y_k|\,;$$

если $h \in (0, h_2\rangle$, где $h_2[|\beta_0|\, L_f + h_2|\gamma_0|\, L_g] < 1$, то $y_k^i \to y_k$, $(x_k, y_k) \in \Pi$ и y_k удовлетворяет (2). Описанный процесс можно последовательно осуществить для всех $k = 1, 2, \ldots, N_h = [(\bar{x} - a)/h]$. Таким образом мы для неявных методов доказали разрешимость задачи (2)–(3) с числами $h_0 = \min(h_1, h_2)$, $\bar{x}$, где $h_1, \bar{x}$ определены соотношением (8) и h_2 при помощи (10).

2.4 Пусть в уравнении (2) по меньшей мере одно из чисел r, s положительно (*строго неявные методы, методы с забеганием вперед*). Решение задачи (2)–(3) будем искать при помощи „*метода горизонтальных аппроксимаций*" (см. [2]), состоящего в следующем:

1° Пусть $h \in (0, h_1\rangle$ и для чисел $h_1, \bar{x}$ имеет место (8); полагаем $y_k^i = y_k$ для $k = 0, -1, \ldots, -q + 1$; $i = 0, 1, 2, \ldots$.

2° Определим y_k^0, $k = 1, 2, \ldots, N_h$ так, чтобы $(x, y_k^0) \in \Pi$ (при помощи явного метода, или просто положим $y_k^0 = b$).

3° Для $i = 0, 1, 2, \ldots, k = 1, 2, \ldots, N_h = [(\bar{x} - a)/h]$ пусть

$$(11)\qquad y_k^{i+1} = -\sum_{\nu=1}^{m} \alpha_\nu y_{k-\nu}^{i+1} + h \sum_{\nu=0}^{n} \beta_\nu f_{k+r-\nu}^i + h^2 \sum_{\nu=0}^{l} \gamma_\nu g_{k+s-\nu}^i\,;$$

здесь $f_j^i = f(x_j, y_j^i)$, $g_j^i = g(x_j, y_j^i)$ и полагаем $y_{N_h+j}^i = y_{N_h}^i$ для $j = 1, 2, \ldots, t$; $f_j^i = f_{j-1}^i$, $g_j^i = g_{j-1}^i$ для $j > [A/h]$.

Теорема 1. *Пусть* $0 < h_3 < 1/tA_0^tB_0(1 + 1/t)^{t+1}$, *где* $A_0 = \sum_{\nu=1}^{m} |\alpha_\nu| > 1$, $t = \max(r, s)$, $B_0 = L_f \sum|\beta_\nu| + h_3 L_g \sum|\gamma_\nu|$. *Тогда задача* (2)–(3) *для строго неявных методов разрешима методом горизонтальных аппроксимаций с числами* $h_0, \bar{x}$, *для которых имеет место:* $h_0 = \min(h_1, h_3)$; $h_1, \bar{x}$ *выполняют условия* (8).

Доказательство. 1° Пусть $h \in (0, h_0\rangle$ и величины y_j^{i+1} удовлетворяют соотношению (11) (этого можно добиться по крайней мере для $i = 0$). Если обозначить $F_k^i = \sum \beta_\nu f_{k+r-\nu}^i + h \sum \gamma_\nu g_{k+r-\nu}^i$, то $|F_k^0| \leqq M_f \sum|\beta_\nu| + h_0 M_g \sum|\gamma_\nu| \leqq F$. По лемме 2 и в силу (8), $(x_k, y_k^1) \in \Pi$ для всех $k = 1, 2, \ldots, N_h$; но тогда $|F_k^1| \leqq F$, и следовательно $(x, y_k^2) \in \Pi$ и т. д.. Значит, $(x_k, y_k^i) \in \Pi$ для всех $k = 1, 2, \ldots, N_h$; $i = 0, 1, 2, \ldots$.

2° Обозначим $\Delta_j^i = y_j^{i+1} - y_j^i$, $F_j = G_j = 0$ в случае $\Delta_j^{i-1} = 0$, $F_j = (f_j^i - f_j^{i-1})/\Delta_j^{i-1}$ и $G_j = (g_j^i - g_j^{i-1})/\Delta_j^{i-1}$ при $\Delta_j^{i-1} \neq 0$; тогда имеет место $|F_j| \leqq L_f$, $|G_j| \leqq L_g$. Из (11) следует

(12) $$\Delta_k^i = -\sum_{\nu=1}^{m} \alpha_\nu \Delta_{k-\nu}^i + h \sum_{\nu=0}^{n} \beta_\nu F_{k+r-\nu} \Delta_{k+r-\nu}^{i-1} + h^2 \sum_{\nu=0}^{l} \gamma_\nu G_{k+s-\nu} \Delta_{k+s-\nu}^{i-1},$$

$\Delta_k^i = 0$ при $k = 0, -1, \ldots, -q + 1$; Δ_k^0 при $k = 1, 2, \ldots, N_h$ ограничены в силу доказанного в 1°.

Для величин $d_k^i = \max_{j \leqq k} |\Delta_j^i|$, $i = 0, 1, \ldots$; $k = 1, 2, \ldots, N_h$ имеют место соотношения

(13) $$d_0^i = 0, \quad d_k^i \geqq 0, \quad d_{k-1}^i \leqq d_k^i, \quad d_k^0 = \max_{j \leqq k} |\Delta_j^0| \geqq 0,$$
$$d_k^i \leqq A_0 d_{k-1}^i + hB_0 d_{k+t}^{i-1}, \quad i = 0, 1, 2, \ldots; \quad k = 0, 1, \ldots, N_h$$

Решение задачи (13) мажорируется каждым решением задачи

(14) $$D_k^i = A_0 D_{k-1}^i + hB_0 D_{k+t}^{i-1},$$
$$D_k^i \geqq 0, \quad D_k^0 \geqq d_k^0, \quad k = 0, 1, \ldots, N_h; \quad i = 0, 1, 2, \ldots.$$

Решение задачи (14) будем искать в виде

$$D_k^i = \alpha^i D_k, \quad \alpha = \tau h B_0 > 0 \quad (\tau \text{ — параметр}).$$

После подстановки в (14) получим для D_k разностную задачу

(15) $$D_{k+t} - \tau D_k + \tau A_0 D_{k-1} = 0, \quad D_0 \geqq 0, \quad D_k \geqq d_k^0;$$

её характеристическое уравнение $\lambda^{t+1} - \tau\lambda + \tau A_0 = 0$ имеет при $\tau = tA_0^t(1 + 1/t)^{t+1} > 1$ корень $\lambda = A_0(1 + 1/t)$. Частное решение уравнения (15)

$$D_k = \Delta^\circ[A_0(1 + 1/t)]^{k-1}, \quad \Delta^0 = \max_k |\Delta_k^0| = d_{N_h}^0$$

удовлетворяет начальным условиям задачи (15), $\alpha = \tau h B_0 < 1$ в силу определения h_3. При k фиксированном $D_k^i = \alpha^i D_k$ стремится к нулю со скоростью геометрической прогрессии; то же имеет место для $|\Delta_k^i| = |y_k^{i+1} - y_k^i|$ и потому $y_k^i \to y_k$ при всех $k = 1, 2, \ldots, N_h$. Так как $(x_k, y_k^i) \in \Pi$ при $k = 0, 1, \ldots, N_h$, $i = 0, 1, 2, \ldots$, то и $(x_k, y_k) \in \Pi$; y_k удовлетворяют уравнению (2).

3. Необходимые условия сходимости

3.1 Лемма 3. *Если при $h \to 0$ имеет место $y_k \to y(x_k)$ равномерно для всех $x_k \in \langle a, \bar{x} \rangle$, то $\Delta y_{k-1} = y_k - y_{k-1} \to 0$ тоже равномерно по всем $k = 1, 2, \ldots, N_h$.*

Доказательство. В силу предложения и равномерной непрерывности $y(x)$ имеем $\Delta y_{k-1} = y_k - y_{k-1} = y_k - y(x_k) + y(x_k) - y(x_{k-1}) + y(x_{k-1}) - y_{k-1} \to 0$ равномерно по k.

Используя обозначения $\Delta y_j = y_{j+1} - y_j$, $A_\nu = \alpha_0 + \alpha_1 + \ldots + \alpha_\nu$, $\nu = 0, 1, \ldots \ldots, m - 1$, напишем уравнение (2) в форме

$$\sum_{\nu=0}^{m-1} A_\nu \Delta y_{k-\nu-1} + y_{k-m} \sum_{\nu=0}^{m} \alpha_\nu = h \sum_{\nu=0}^{n} \beta_\nu f_{k+r-\nu} + h^2 \sum_{\nu=0}^{l} \gamma_\nu g_{k+s-\nu}. \tag{16}$$

Если теперь $h \to 0$, то в силу леммы 3 и ограниченности слагаемых получим необходимое условие сходимости

$$\sum_{\nu=0}^{m} \alpha_\nu = 0. \tag{н$_0$}$$

3.2 При решении задачи (2)—(3) x_k, y_k зависят от параметра h. Обозначим через $\tilde{y}_h(x)$ кусочно-линейную функцию — полигон Эйлера с вершинами (x_k, y_k), $k = 0, 1, \ldots, N_h$. При фиксированном h каждое x однозначно определяет индекс $k = k(x, h)$ такой, что $x \in \langle x_{k-1}, x_k)$; для производной (правой производной в узле x_k) функции $\tilde{y}_h(x)$ имеет место соотношение

$$\tilde{y}_h'(x - \nu h) = \Delta y_{k-\nu-1}/h, \quad k - \nu - 1 = 0, 1, \ldots, N_h - 1.$$

Определим еще две кусочно-постоянные функции: для $x \in \langle x_k, x_{k+1})$ пусть $X_h(x) = x_k$, $Y_h(x) = y_k$. Из определения вытекает, что $X_h(x + jh) = x_{k+j}$, $Y_h(x + jh) = y_{k+j}$.

3.3 С помощью обозначений из 3.2 преобразуем (16) к виду

$$\sum_{\nu=0}^{m-1} A_\nu \tilde{y}'_h(x - \nu h) =$$
$$= \sum_{\nu=0}^{n} \beta_\nu f[X_h(x + (r - \nu) h), \quad Y_h(x + (r - \nu) h)] +$$
$$+ h \sum_{\nu=0}^{l} \gamma_\nu g[X_h(x + (s - \nu) h), \quad Y_h(x + (s - \nu) h], $$

где справа и слева интегрируемые функции от x; интегрируя в пределах $\langle a, x \rangle$, получим

$$\sum_{\nu=0}^{m-1} A_\nu \int_a^x \tilde{y}'_h(\xi - \nu h) \, \mathrm{d}\xi = \tag{17}$$
$$= \sum_{\nu=0}^{n} \beta_\nu \int_a^x f[X_h(\xi + (r - \nu) h), \quad Y_h(\xi + (r - \nu) h] \, \mathrm{d}\xi +$$
$$+ h \sum_{\nu=0}^{l} \gamma_\nu \int_a^x g[X_h(\xi + (s - \nu) h), \quad Y_h(\xi + (s - \nu) h)] \, \mathrm{d}\xi .$$

Если выполнено требование сходимости, то при $h \to 0$ $\tilde{y}(x) \to y(x)$, $Y_h(x) \to \to y(x)$, $X_h(x) \to x$ равномерно для всех $x \in \langle a, \bar{x} \rangle$. Совершив предельный переход в (17) и учитывая, что $\int_a^x y'(\xi) \, \mathrm{d}\xi = y(x) - y(a)$, получим

$$[y(x) - y(a)] \sum_{\nu=0}^{m-1} A_\nu = (\sum \beta_\nu) \int_a^x f(\xi, y(\xi)) \, \mathrm{d}\xi .$$

В силу уравнения (1) для выполнения этого необходимо, чтобы

$$\sum_{\nu=0}^{m-1} A_\nu = \sum_{\nu=0}^{n} \beta_\nu \tag{н$_1$}$$

(эквивалентные формы: $-\sum_{\nu=0}^{m} \nu\alpha_\nu = \sum_{\nu=0}^{n} \beta_\nu$, или $\sum_{\nu=0}^{m} (m - \nu) \alpha_\nu = \sum_{\nu=0}^{n} \beta_\nu$).

Из требования сходимости при $f(x, y) \equiv 1$ (или из устойчивости $L[y]$) вытекает, что должно быть $\sum_{\nu=0}^{n} \beta_\nu \neq 0$ (см. [1], [2]). Тем самым мы доказали, что имеет место

Теорема 2. *Для сходимости $y_k \to y(x_k)$ равномерной по $k = 1, 2, \ldots, N_h$ необходимо выполнение условий* (н$_0$), (н$_1$).

4. Аппроксимация

4.1 Определение (см. [2]). Обозначим через Ψ семейство функций $\psi(h)$, определенных для $h \in (0, h_0\rangle$ и таких, что $\psi(h) \to 0$ при $h \to 0$. Символом $O(\psi(h))$ обозначим функцию или семейство сеточных функций $z_h(x)$, определенных в точках

$$x_k = a + kh\,, \quad k = -q + 1, \dots, N_h\,; \quad h \in (0, h_0\rangle\,,$$

которые во всех этих точках удовлетворяют условию $|z_h(x_k)| = |z_k(h)| \leqq A|\psi(h)|$ (A независит от k, h) и говорим, что семейство $z_h(x)$ имеет порядок $\psi(h)$ по отношению к h. Если не существует функции $\bar{\psi}(h) \in \Psi$ такой, чтобы $|z_k(h)| \leqq \bar{A}|\bar{\psi}(h)\,\psi(h)|$, то говорим, что $z_h(x)$ имеет по h неулучшаемый порядок $\psi(h)$.

Определение. Скажем, что аппроксимация уравнения (1) уравнением (2) имеет порядок $\psi(h)$ по h, если для каждого решения $y(x)$ уравнения (1) имеет при фиксированной $\psi(h) \in \Psi$ место

$$(18) \qquad L_h[y] \equiv \sum_{\nu=0}^{m} \alpha_\nu y(x_{k-\nu}) - $$
$$- h \sum_{\nu=0}^{n} \beta_\nu f(x_{k+r-\nu}, y(x_{k+r-\nu})) - h^2 \sum_{\nu=0}^{l} \gamma_\nu g(x_{k+s-\nu}, y(x_{k+s-\nu})) = O(h\,\psi(h))\,.$$

Говоряг, что оператор $L_h[y]$ имеет степень p, если для всех $(p + 1)$-раз непрерывно дифференцируемых на $\langle a - H, a + H\rangle$ функций имеет $L_h[y]$ неулучшаемый порядок $h^p$$\{$т. е. $L_h[y] = O(h^{p+1})\}$.

Замечание. Если $y(x)$ является решением задачи (1), то функции

$$\psi_i(h) = \max\{|y^{(i)}(x_1) - y^{(i)}(x_2)|\,; \quad |x_1 - x_2| \leqq h \leqq h_0\,;$$
$$x_1, x_2 \in \langle x_{-q+1}, x_{N_h}\rangle\} \quad i = 1, 0$$

принадлежат семейству Ψ, так как $|\psi_0(h)| \leqq M_f h$, $|\psi_1(h)| \leqq L_f M_f h$. В общем случае, если $y(x) \in C^{(p)}\langle x_{-q+1}, x_{N_h}\rangle$, то

$$\psi_p(h) = \max\{|y^{(p)}(x_1) - y^{(p)}(x_2)\,; \quad |x_1 - x_2| \leqq h \leqq h_0\}\,, \quad p = 2, 3, \dots$$

принадлежит Ψ (функции типа модуля непрерывности).

Теорема 3. *Для того, чтобы порядок аппроксимации уравнения* (1) *уравнением* (2) *был по меньшей мере* $\psi_1(h)$ *необходимо и достаточно выполнение условий* (н_0), (н_1).

Доказательство следует из разложений

$$y(x_{k-\nu}) = y(x_k) - \nu h y'(x_k) + O(h\psi_1(h)), \quad hy'(x_{k+r-\nu}) = hy'(x_k) + O(h\psi_1(h)),$$

если их подставить в $L_h[y]$ и сравнить коэффициенты при h^j, $j = 0, 1$. Более высокой степени аппроксимации можно добиться, если функция $f(x, y)$ обладает частными производными высших порядков.

Теорема 4. *Если* $f(x, y)$ *обладает непрерывными частными производными порядка* $p - 1$, $p \geqq 2$, *то для того, чтобы порядок аппроксимации уравнения* (1) *уравнением* (2) *был по меньшей мере* $h^{p-1}\psi_p(h)$, *необходимо и достаточно выполнение условий*

$$(\mathrm{a}_0) \qquad \sum_{\nu=0}^{m} \alpha_\nu = 0$$

$$(\mathrm{a}_1) \qquad -\sum_{\nu=0}^{m} \nu\alpha_\nu = \sum_{\nu=0}^{n} \beta_\nu$$

$$(\mathrm{a}_2) \qquad \sum_{\nu=0}^{m} \nu^2\alpha_\nu = 2\sum_{\nu=0}^{n}(r-\nu)\,\beta_\nu + 2\,.\,1\sum_{\nu=0}^{l}\gamma_\nu$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$(\mathrm{a}_p) \qquad (-1)^p\sum_{\nu=0}^{m} \nu^p\alpha_\nu = p\sum_{\nu=0}^{n}(r-\nu)^{p-1}\,\beta_\nu + p(p-1)\sum_{\nu=0}^{l}(s-\nu)^{p-2}\,\gamma_\nu$$

Доказательство получится путем подстановки в $L_h[y]$ разложений

$$y(x_{k-\nu}) = \sum_{j=0}^{p}(-1)^j(\nu h)^j\, y^{(j)}(x_k)/j! + O(h^p\,\psi_p(h)),$$

$$hy'(x_{k+r-\nu}) = \sum_{j=0}^{p-1} h^{j+1}(r-\nu)^j\, y^{(j+1)}(x_k)/j! + O(h^p\,\psi_p(h)),$$

$$h^2y''(x_{k+s-\nu}) = \sum_{j=0}^{p-2} h^{j+2}(s-\nu)^j\, y^{(j+2)}(x_k)/j! + O(h^p\,\psi_p(h))$$

и сравнения коэффициентов при h^j, $j = 0, 1, \ldots, p$.

Замечание. 1° Условия $(\mathrm{н}_0), (\mathrm{н}_1)$ и $(\mathrm{a}_0), (\mathrm{a}_1)$ совпадают. 2° При заданных параметрах m, n, l соотношения $(\mathrm{a}_0), \ldots, (a_p)$ являются системой линейных уравнений относительно $m + n + l + 3$ искомых параметров α_ν, β_ν, γ_ν (решение зависит от r, s). Параметры α_ν обыкновенно выбирают так, чтобы $L[y]$ был устойчивым и чтобы выполнялось (a_0). При достаточной гладкости $f(x, y)$ можно определить β_ν, γ_ν так, чтобы $p \geqq n + l + 2$.

5. Сходимость

5.1 Основная лемма. *Пусть*

1° $L[y] \equiv \sum_{\nu=0}^{m} \alpha_\nu y_{k-\nu}$ — *устойчивный оператор;*

2° $|F_j| \leqq F, |G_j| \leqq G$ *для* $j = -q+1, \ldots, N_h + t, \ t = \max(0, r, s)$;

3° $\sum_{\nu=0}^{m} \alpha_\nu z_{k-\nu} - h \sum_{\nu=0}^{n} \beta_\nu F_{k+r-\nu} z_{k+r-\nu} - h^2 \sum_{\nu=0}^{l} \gamma_\nu G_{k+s-\nu} z_{k+s-\nu} = O(\psi(h)), \ \psi(h) \in \Psi,$

$k = 1, \ldots, N_h$.

Тогда а) *если* $\tilde{z}_k$ *является решением* (*неоднородного*) *уравнения* (19), *соответствующим начальным условиям* $\tilde{z}_k = 0, k = -q+1, \ldots, 0,$ *и в случае* $t > 0$ *равномерно ограниченным по отношению к* h, *то* $\tilde{z}_k = O(\psi(h)/h), \ k = 1, 2, \ldots N_h$;

б) *если* $\hat{z}_k$ *является решением уравнения однородного по отношению к* (19), *удовлетворяет начальным условиям* $\hat{z}_k = O(\varphi(h)), k = -q+1, \ldots, 0, \varphi(h) \in \Psi,$ *и в случае* $t > 0$ *значения* $\hat{z}_k$ *равномерно ограничены по* h *для всех* $k = 1, 2, \ldots, N_h$, *то* $\hat{z}_k = O(\varphi(h)), k = 1, 2, \ldots, N_h$.

Доказательство. а) Пусть $\tilde{z}_k$ имеет предполагаемые свойства; подставим его в (19) и получим тождество

$$\sum_{\nu=0}^{m} \alpha_\nu \tilde{z}_{k-\nu} = \tilde{H}_k \,, \tag{20}$$

$$\tilde{H}_k = h \sum_{\nu=0}^{n} \beta_\nu F_{k+r-\nu} \tilde{z}_{k+r-\nu} + h^2 \sum_{\nu=0}^{l} \gamma_\nu G_{k+s-\nu} \tilde{z}_{k+s-\nu} + O(\psi(h)) \,. \tag{21}$$

Соотношение (20) можно рассматривать как разностное уравнение относительно $\tilde{z}_k$ с вполне определенной правой частью $\tilde{H}_k$. По принципу Дюамеля (или умножая (20) на $c_{k-\nu}$ и суммируя по k)

$$\tilde{z}_k = \sum_{\nu=0}^{k-1} c_\nu H_{k-\nu} \,, \quad c_\nu \text{ определены в (4)} \,. \tag{22}$$

Подстановкой (21) в (22) и переходом к модулям, учитывая $k \leqq (\bar{x} - a)/h$, получим

$$|\tilde{z}_k| \leqq C \sum_{j=1}^{k} |\tilde{H}_j| \leqq hC \sum_{j=1}^{k} \{F \sum_{\nu=0}^{n} |\beta_\nu| \, |\tilde{z}_{j+r-\nu}| + hG \sum_{\nu=0}^{l} |\gamma_\nu| \, \tilde{z}_{j+s-\nu}|\} + \\ + O(\psi(h)/h) \,. \tag{23}$$

Для величин $Z_j = \max_{i \leqq j} |\tilde{z}_i|, \ Z_{-m+1} = \ldots = Z_0 = 0$ из (23) следует

$$Z_k \leqq hC\{F \sum |\beta_\nu| + hG \sum |\gamma_\nu|\} \sum_{j=1}^{k} Z_{j+t} + O(\psi(h)/h) \tag{24}$$

Если обозначить

$$(25)\qquad P' = \begin{cases} P = hC\{F\sum|\beta_\nu| + hG\sum|\gamma_\nu| & \text{при} \quad t \neq 0 \\ P/(1-P)\,, \quad 0 < P < 1 & \text{при} \quad t = 0\,, \end{cases}$$

$$Q' = \begin{cases} Q = O(\psi(h)/h) & \text{при} \quad t < 0 \\ Q/(1-P) = O(\psi(h)/h) & \text{при} \quad t = 0\,, \\ Q + P\sum_{i=k}^{k+t} Z_i & \text{при} \quad t > 0 \end{cases}$$

то (24) можно писать в форме

$$Z_k \leqq P' \sum_{i=0}^{k-1} Z_i + Q'\,,$$

из которой применением индукции следует

$$(26)\qquad Z_k \leqq Q'(1+P')^{k-1} \leqq Q' \exp\{(k-1)P'\} \leqq Q'E_k\,,$$

где

$$E_k = \exp\{(x_{k-1} - x_0)\,S\}\,,$$

$$S = \begin{cases} P/h & \text{при} \quad t \neq 0 \\ P/h\{1 - h_0C[F\sum|\beta_\nu| + h_0G\sum|\gamma_\nu|\}\,, \quad h \leqq h_0 & \text{при} \quad t = 0\,. \end{cases}$$

В силу (25) следует из (26) что утверждение а) имеет место в случае $t \leqq 0$, так как $|\tilde{z}_k| \leqq Z_k \leqq Q'E_k = O(\psi(h)/h)$. В случае $t > 0$ используем предположение ограниченности $\tilde{z}_k$; из $|\tilde{z}_k| \leqq B$, $k = -q+1, \ldots, N_h$ следует $Z_k \leqq \max\limits_{i \leqq k} |\tilde{z}_i| \leqq$ $\leqq B$ и $Q' = Q + P\sum\limits_{i=k}^{k+t} Z_i \leqq Q + (t+1)PB$. Повторяя оценку Z_k, Q', получим

$$Z_k \leqq Q'E_k = [Q + (t+1)PB]\,E_k\,, \quad Q' \leqq Q + (t+1)P[Q + (t+1)PB]\,E_k\,.$$

После n повторений, с $T = (t+1)PE_k = O(h)$, имеем

$$Z_k \leqq QE_k(1 + T + T^2 + \ldots + T^{n-1}) + T^nB\,,$$

$$Q' \leqq Q(1 + T + T^2 + \ldots + T^n) + T^{n+1}B/E_k\,.$$

Поэтому в силу (25) и (26) $|\tilde{z}_k| \leqq Z_k = O(\psi(h)/h)$.

б) После подстановки $\hat{z}_k$ в уравнение однородное по отношению к (19) получим тождество

$$(27)\qquad \sum_{\nu=0}^{m} \alpha_\nu \hat{z}_{k-\nu} = \hat{H}_k\,,$$

где

$$(28)\qquad \hat{H}_k = h\sum_{\nu=0}^{n} \beta_\nu F_{k+r-\nu}\hat{z}_{k+r-\nu} + h^2 \sum_{\nu=0}^{l} \gamma_\nu G_{k+s-\nu}\hat{z}_{k+s-\nu}\,.$$

Соотношение (27) является разностным уравнением относительно $\hat{z}_k$; если через u_k обозначить решение однородного уравнения $\sum_{\nu=0}^{m} \alpha_\nu u_{k-\nu} = 0$, соответствующее начальным условиям $u_k = \hat{z}_k = O(\varphi(h))$, $k = -m+1, \ldots, 0$, то с помощью фундаментальных решений $\zeta_k^{(i)}$, $i = 1, 2, \ldots, m$ этого уравнения (см. [2]) и решением u_k вполне определенных постоянных c_{ij} можно писать

$$u_k = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=0}^{m-1} c_{ij} \hat{z}_{-j} \zeta_k^{(i)} .$$

Из последнего и начальных условий для $\hat{z}_k$ следует

$$u_k = O(\varphi(h)).$$

Для величин v_k, определенных соотношением $v_k = \hat{z}_k - u_k$ имеем

$$\sum_{\nu=0}^{m} \alpha_\nu v_{k-\nu} = \sum_{\nu=0}^{m} \alpha_\nu \hat{z}_{k-\nu} - \sum_{\nu=0}^{m} \alpha_\nu u_{k-\nu} = \hat{H}_k , \tag{29}$$

$$v_k = 0 \quad \text{для} \quad k = -m+1, \ldots, 0 .$$

Если подставить вместо $\hat{H}_k$ из (28), то из (29) получим

$$\sum_{\nu=0}^{m} \alpha_\nu v_{k-\nu} = h \sum_{\nu=0}^{n} \beta_\nu F_{k+r-\nu}(u_{k+r-\nu} + v_{k+r-\nu}) + h^2 \sum_{\nu=0}^{l} \gamma_\nu G_{k+s-\nu}(u_{k+s-\nu} + v_{k+s-\nu}) =$$
$$= h \sum_{\nu=0}^{n} \beta_\nu F_{k+r-\nu} v_{k+r-\nu} + h^2 \sum_{\nu=0}^{l} \gamma_\nu G_{k+s-\nu} v_{k+s-\nu} + O(h\,\varphi(h)) .$$

Используя уже доказанную часть а) нашей леммы, получим $v_k = O(\varphi(h))$; из этого вытекает $\hat{z}_k = u_k + v_k = O(\varphi(h))$.

5.2 Теорема 5. (о сходимости). *Пусть для* $f(x, y)$, $g(x, y)$ *выполнены условия из* 1.1 *и*

1° $L[y]$ – *устойчивный оператор, задача* (2)–(3) *разрешима для всех* $h \in (0, h_0\rangle$, $x_k \in \langle a, \bar{x}\rangle$;

2° *выполнены необходимые условия сходимости* (н_0), (н_1).

Тогда при $h \to 0$ *имеет место* $|y(x_k) - y_k| \to 0$ *равномерно для* $k = 1, 2, \ldots, N_h = [(\bar{x} - a)/h]$.

Доказательство. Из условия 2° в силу теоремы 3 вытекает, что $L_h[y] = O(h\,\psi_1(h))$. Вычитая это соотношение из (2), получим для $\delta_k = y(x_k) - y_k$ уравнение

$$\sum_{\nu=0}^{m} \alpha_\nu \delta_{k-\nu} - h \sum_{\nu=0}^{n} \beta_\nu F_{k+r-\nu} \delta_{k+r-\nu} - h^2 \sum_{\nu=0}^{l} \gamma_\nu G_{k+s-\nu} \delta_{k+s-\nu} = O(h\,\psi_1(h)) ,$$

где величины F_j, G_j равны нулю, если $\delta_j = 0$, и для $\delta_j \neq 0$

$$F_j = [f(x_j, y(x_j)) - f(x_j, y_j)]/\delta_j\,, \quad G_j = [g(x_j, y(x_j)) - g(x_j, y_j)]/\delta_j\,;$$

в силу наших предположений они ограничены постоянными L_f, L_g. Для начальных значений δ_k, $k = -q + 1, \ldots, 0$ имеет место $|\delta_k| \leqq |y(x_k) - b| + |b - \eta_k(x_k)| \leqq (q - 1)[\psi_0(h) + \varphi(h)]$, $\delta_0 = 0$. Значит,

$$(31) \qquad \delta_k = O(\psi(h))\,, \quad \psi(h) = \psi_0(h) + \varphi(h) \in \Psi \quad \text{при} \quad k = -q + 1, \ldots, 0\,.$$

Задача (30)–(31) разрешима в силу разрешимости задач (1), (2)–(3) и определения δ_k; её решение будем искать в виде $\delta_k = \tilde{\delta}_k + \hat{\delta}_k$, где $\tilde{\delta}_k$ ограниченное по h решение уравнения (30), соответствующее начальным условиям $\tilde{\delta}_k = 0$, $k = -q + 1, \ldots, 0$. По основной лемме имеет место $\tilde{\delta}_k = O(\psi_1(h))$, $k = 1, 2, \ldots, N_h$. Функция $\hat{\delta}_k = \delta_k - \tilde{\delta}_k$, ограниченная по h в силу ограниченности δ_k, $\tilde{\delta}_k$, удовлетворяет уравнению однородному по отношению к (30) и начальным условиям $\hat{\delta}_k = \delta_k$, $k = -q + 1, \ldots, 0$. Из основной леммы и (31) вытекает, что $\hat{\delta}_k = O(\psi(h))$ при $k = 1, 2, \ldots, N_h$. Тогда $\delta_k = \tilde{\delta}_k + \hat{\delta}_k = O(\bar{\psi}(h))$, $\bar{\psi}(h) = \psi_0(h) + \psi_1(h) + \varphi(h) \in \Psi$, $k = 1, 2, \ldots, N_h$. Это и значит, что при $h \to 0$ имеет место $\delta_k \to 0$, $y_k \to y(x_k)$ равномерно относительно k.

Замечание. В силу свойств функций $\psi_0(h)$, $\psi_1(h)$ видно, что целесообразно выбирать $\eta_k(x)$ порядка по меньшей мере h.

5.3 Теорема 6. (мажорантная оценка погрешности метода). *Пусть*

1° $f(x, y) \in C^{(p)}(\Pi)$, $p \geqq 2$;

2° *задача* (2)–(3) *разрешима*;

3° $L_h[y] = O(h^{p+1})$;

4° $\delta_k = y(x_k) - y_k = O(h^p)$ при $k = -q + 1, \ldots, 0$.

Тогда $\delta_k = O(h^p)$ *при* $k = 1, 2, \ldots, N_h$.

Доказательство. Вычитая (2) из $L_h[y] = O(h^{p+1})$, получим для δ_k уравнение

$$(32) \qquad \sum_{\nu=0}^{m} \alpha_\nu \delta_{k-\nu} - h \sum_{\nu=0}^{n} \beta_\nu F_{k+r-\nu} \delta_{k+r-\nu} - h^2 \sum_{\nu=0}^{l} \gamma_\nu G_{k+s-\nu} \delta_{k+s-\nu} = O(h^{p+1})$$

(F_j, G_j определены в (30)), с начальными значениями из условия 4°. Эта задача разрешима; её решение представим в виде $\delta_k = \tilde{\delta}_k + \hat{\delta}_k$, где $\tilde{\delta}_k$ является решением уравнения (32) с начальными условиями $\tilde{\delta}_k = 0$, $k = -q + 1, \ldots, 0$.

По основной лемме имеем $\tilde{\delta}_k = O(h^p)$, $k = 1, 2, \ldots, N_h$. $\hat{\delta}_k$ – это решение однородного уравнения с начальными условиями $\hat{\delta}_k = \delta_k = O(h^p)$ при $k = -q + 1, \ldots, 0$ и по основной лемме $\hat{\delta}_k = O(h^p)$ при $k = 1, 2, \ldots, N_h$. Поэтому $\delta_k = \tilde{\delta}_k + \hat{\delta}_k = O(h^p)$.

Теорема 7. (асимптотическое разложение погрешности метода). *Пусть*

1° $L[y]$ — *устойчивый оператор,*

2° $f(x, y) \in C^{(2p+1)}(\Pi)$

3° $\delta_k = y(x_k) - y_k = y(x_k) - \eta_h(x_k) = O(h^{p+1})$ при $k = -q + 1, \ldots, 0$.

Тогда имеет место разложение

$$\delta_k = \frac{C_{p+1}}{\sum \beta_\nu} h^p \exp\left[\Phi(x)\right] . \int_{x_0}^{x} y^{(p+1)}(\xi) \exp\left[-\Phi(\xi)\right] \mathrm{d}\xi + O(h^{p+1}),$$

$$\Phi(x) = \left[\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\right]_{y = y(x)} .$$

Доказательство использует основную лемму и вспомагательное дифференциальное уравнение $(\mathrm{d}u/\mathrm{d}x) = \Phi(x)u + \varkappa h^p y^{(p+1)}(x)$, $u(x_0) = 0$ с решением $u(x) = \varkappa h^p \exp\left[\Phi(x)\right] . \int_{x_0}^{x} y^{(p+1)}(\xi) \exp\left[-\Phi(\xi)\right] d\xi$; проводится оно аналогично доказательству в [2], стр. 166.

6. Примеры формул

(см. тоже лит. [5]; в скобках остаточный член).

$p = 3$:

$$y_k - y_{k-1} = \frac{h}{3}(2f_{k-1} + f_{k-2}) + \frac{5}{6}h^2 g_{k-1}\,; \quad \left[\frac{h^4}{72} y^{(4)}\right]$$

$$y_k - y_{k-1} = \frac{h}{3}(f_k + 2f_{k-1}) + \frac{1}{6}h^2 g_{k-1}\,; \quad \left[-\frac{h^4}{72} y^{(4)}\right]$$

$p = 4$:

$$y_k - y_{k-1} = \frac{h}{2}(-f_{k-1} + 3f_{k-2}) + \frac{h^2}{12}(17g_{k-1} + 7g_{k-2}); \quad \left[\frac{31}{720} h^5 y^{(5)}\right]$$

$$y_k - y_{k-1} = \frac{h}{2}(f_k + f_{k-1}) + \frac{h^2}{12}(-g_k + g_{k-1})\,; \quad \left[\frac{h^5}{720} y^{(5)}\right]$$ — см. лит. [4], [6] ;

$$y_k = \frac{1}{2}(y_{k-1} + y_{k-2}) + \frac{h}{4}(-f_{k-1} + 7f_{k-2}) + \frac{h^2}{8}(11g_{k-1} + 2g_{k-1})\,; \quad \left[\frac{7}{160} h^5 y^{(5)}\right]$$

$$y_k = \frac{1}{2}(y_{k-1} + y_{k-2}) + \frac{h}{16}(5f_k + 16f_{k-1} + 3f_{k-2}) + \frac{h^2}{8} g_{k-1}\,; \quad \left[-\frac{h^5}{120} y^{(5)}\right]$$

$p = 5$:

$$y_k - y_{k-2} = \frac{2h}{15}(32f_{k-1} - 73f_{k-2} + 56f_{k-3}) + \frac{2h^2}{5}(7g_{k-2} + 6g_{k-3})\,; \quad \left[\frac{7}{450}h^6 y^{(6)}\right]$$

$$y_k - y_{k-2} = \frac{2h}{15}(2f_k + 8f_{k-1} + 5f_{k-2}) + \frac{2h^2}{15}(2g_{k-1} + g_{k-2})\,; \quad \left[-\frac{h^6}{900}y^{(6)}\right]$$

$$y_k - y_{k-1} = \frac{1}{12}(y_{k-1} - y_{k-2}) + \frac{h}{9}\left(\frac{127}{32}f_k + \frac{22}{5}f_{k-1} - \frac{19}{60}f_{k-2}\right) +$$
$$+ \frac{h^2}{15}\left(-11g_k + \frac{107}{48}g_{k-1}\right); \quad \left[\frac{23h^6}{86\,400}y^{(6)}\right]$$

$$y_k - y_{k-1} = \frac{1}{6}(y_{k-1} - y_{k-2}) + \frac{h}{144}(61f_k + 192f_{k-1} - 5f_{k-2}) +$$
$$+ \frac{h^2}{72}(-4g_k + 13g_{k-1})\,; \quad \left[\frac{h^6}{8\,640}y^{(6)}\right]$$

$$y_k - y_{k-1} = \frac{1}{4}(y_{k-1} - y_{k-2}) + h\left(\frac{13}{32}f_k + \frac{2}{5}f_{k-1} - \frac{9}{160}f_{k-2}\right) +$$
$$+ \frac{h^2}{80}(-4g_k + 17g_{k-1})\,; \quad \left[\frac{-h^6}{28\,800}y^{(6)}\right]$$

$p = 6$

$$y_k - y_{k-1} = \frac{h}{240}(11f_{k+1} + 128f_k + 101f_{k-1}) + \frac{h^2}{240}(-3g_{k+1} - 40g_k + 13g_{k-1})\,;$$
$$\left[\frac{h^7}{9\,450}y^{(7)}\right] - \text{см. лит. [3];}$$

$$y_k - y_{k-1} = \frac{1}{120}(y_{k-1} - y_{k-2}) + \frac{h}{28\,800}(1901f_{k+1} + 14\,725f_k + 11\,907f_{k-1}) +$$
$$+ \frac{h^2}{28\,800}(-187g_{k+1} - 6044g_k + 2197g_{k-1})\,; \quad [\sim 3\,.\,10^{-6}h^7 y^{(7)}]$$

$p = 8$:

$$y_k - y_{k-1} = \frac{1}{12}(y_{k-1} - y_{k-2}) + \frac{h}{362\,880}(-8939f_{k+1} + 184\,599f_k +$$
$$+ 168\,507f_{k-1} - 11\,527f_{k-2}) +$$
$$+ \frac{h^2}{362\,880}(1241g_{k+1} - 7389g_k + 12\,753g_{k-1} - 501g_{k-2})\,; \quad [\sim 10^{-5}h^9 y^{(9)}]$$

Литература

[1] *Dahlquist G.*, Stability and error bounds in the numerical integration of ordinary differential equations. Trans. Royal. Inst. Technology, Stockholm, 1959, Nr 130.

[2] *Горбунов А. Л.*, Разностные уравнения и разностные методы решения задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Ротапринт ВЦ МГУ, Москва 1967.

[3] *Urabe M.*, An implicit high-order method for numerical solution of initial-value problem for ordinary diff. equations. Numerische Mathematik, Bd *15* (1970), 151—164.

[4] *Milne W. E.*, Numerical solution of ordinary diff. equations. J. Wiley, New York 1953.

[5] *Jankovič V.*, Vzorce pre numerické riešenie diferenciálnej rovnice $y' = f(t, x)$, ktoré obsahujú vyššie derivácie. Aplikace matematiky *10* (1965), 469—482.

[6] *Ralston A.*, A first course in numerical analysis. McGraw-Hill, New York 1965.

Souhrn

METODY ADAMSOVA TYPU S DRUHÝMI DERIVACEMI

JIŘÍ KOBZA

K numerickému řešení úlohy $y' = f(x, y)$, $y(a) = b$ se používají metody Adamsova typu

$$\sum_{\nu=0}^{m} \alpha_\nu y_{k-\nu} = h \sum_{\nu=0}^{n} \beta_\nu f_{k+r-\nu} + h^2 \sum_{\nu=0}^{l} \gamma_\nu g_{k+s-\nu}\,, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

kde

$$y_k = \eta_h(x_k)\,, \quad k = -q + 1, \ldots, -1, 0\,; \quad q = \max(m, n - r, l - s)\,;$$

$$[g = f_x + f \,.\, f_y;\ f_j = f(x_j, y_j),\ g_j = g(x_j, y_j)]\,.$$

Jsou odvozeny podmínky řešitelnosti diferenční úlohy, aproximace a konvergence studovaných metod.

Адрес автора: Jiří Kobza, I. P. Pavlova 85, 775 00 Olomouc.