

Aplikace matematiky

Boro Döring

Iterative Lösung gewisser Randwertprobleme und Integralgleichungen

Aplikace matematiky, Vol. 24 (1979), No. 1, 1–31

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/103776>

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1979

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

ITERATIVE LÖSUNG GEWISSER RANDWERTPROBLEME
UND INTEGRALGLEICHUNGEN

BORO DÖRING

(Eingegangen am 28. Juli 1976)

1. EINLEITUNG

Die durch Quasilinearisation bei nichtlinearen Randwertproblemen für gewöhnliche Differentialgleichungen entstehende Funktionenfolge ist bekanntlich bei gleicher Ausgangsfunktion identisch mit der Newton-Folge der zu dem Randwertproblem äquivalenten Integralgleichung (vgl. Antosiewicz [1]). Man kann zeigen, daß dies auch für eine Reihe von Verallgemeinerungen des Newton-Verfahrens zutrifft. Deshalb liegt es nahe, die Tatsache auszunutzen, daß sich die Folge näherungsweise günstiger z. B. mittels Runge-Kutta-Verfahren bestimmen läßt, während man Existenz-, Eindeutigkeits- und Konvergenzaussagen vorteilhafter über die Integralgleichung gewinnt. Zudem lassen sich diese Aussagen zugleich für die oben genannten Randwertprobleme und für die wichtige Klasse von Hammersteinschen Integralgleichungen formulieren. Für das Newton-Verfahren und seine numerisch konkurrenzfähigen Varianten dritter Ordnung zur näherungsweise Lösung der Gleichung $F(x) = \theta$ gibt es eine Reihe von Konvergenzsätzen, die in der Regel – in ihrer Eigenschaft als spezielle konstruktive Fixpunktsätze – zugleich die Existenz einer Lösung der vorgelegten Gleichung sichern. Insbesondere im Hinblick auf die näherungsweise Lösung der vorgeannten Problemklassen stellen sich unter anderem die folgenden beiden Fragen. Einmal sollten die zur Auswahl stehenden Verfahren möglichst einheitliche, gleich schwache Voraussetzungen aufweisen, zum anderen möchte man ein Kriterium dafür haben, welche Variante zur Lösung einer gegebenen Gleichung am günstigsten ist, insbesondere, wann ein Iterationsverfahren dritter Ordnung weniger Rechenaufwand erfordert als das Newton-Verfahren. Diese Frage läßt sich für Klassen von eng verwandten Verfahren und einheitlich formulierbare Probleme, wie etwa die hier vorliegenden, einigermaßen zufriedenstellend beantworten, wenn hinreichend scharfe apriori-Schranken bekannt sind, da man dann den Computer weitgehend a priori entscheiden lassen kann, welches Verfahren er zur

Lösung eines bestimmten Problems wählen soll. Was die erste der beiden erwähnten Fragen betrifft, so ist bezüglich miteinander vergleichbarer Sätze vom Kantorowitsch-Typ für drei in der Praxis bewährte Verfahren – neben dem Newton-Verfahren das Tschebyscheff-Verfahren und ein Mehrpunktverfahren dritter Ordnung, bei dem jeder Iterationsschritt aus einem Newton-Schritt und einem weiteren Schritt mit unveränderter Ableitung besteht – folgendes zu sagen. Während das Produkt aus den oberen Schranken für die Normen der zweiten Ableitung, der Inversen der ersten Ableitung und der Newton-Korrektur beim Newton-Verfahren und bei dem erwähnten Mehrpunkt-Verfahren $< \frac{1}{2}$ sein kann, wird bei einem analogen Satz für das Tschebyscheff-Verfahren hier $\leq \frac{1}{3}$ verlangt ([9], Satz 1). Deshalb ist es wünschenswert, die sonstigen Voraussetzungen dieses Satzes möglichst weit abzuschwächen.

In der vorliegenden Note wird zunächst – in Abschnitt 2 – ein derartiger Satz bewiesen, der mit sehr schwachen Bedingungen an die zweite Ableitung auskommt und dennoch weitgehend die gleichen Aussagen liefert wie der oben erwähnte Satz. Die Struktur des Satzes kommt dem Anwender entgegen, der unter möglichst schwachen und zugleich einfach zu realisierenden, einheitlichen Voraussetzungen möglichst viele der Aussagen wünscht, die er bei der Lösung einer konkreten Operatorgleichung $F(x) = \theta$ braucht: Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung, Konvergenz- und Konvergenz-Ordnung bzw. -Geschwindigkeit sowie eine obere a posteriori – und apriori-Schranke neben einer unteren a posteriori-Schranke. Balázs [2] und Shafiyev [18] haben ebenfalls Aussagen über das Tschebyscheff-Verfahren unter schwachen Bedingungen an die zweite Ableitung erhalten, jedoch sind deren Bedingungen von wesentlich komplizierterer Gestalt, und die Struktur dieser Sätze entspricht nicht den gerade erwähnten Forderungen der Praxis.

Für zwei der drei Iterationsverfahren, die in der vorliegenden Note zur näherungsweise Lösung von Randwertproblemen und Integralgleichungen herangezogen werden, sind scharfe apriori-Schranken bekannt ([12], [14], [15]); dies trifft nicht zu für das Tschebyscheff-Verfahren. Deshalb und um ein Auswahl-Kriterium der oben genannten Art zu erhalten, wird in Abschnitt 3 eine apriori-Schranke für das Tschebyscheff-Verfahren angegeben, die, besonders von $n = 3$ an, eine wesentliche Verbesserung einer in [9] gegebenen apriori-Schranke darstellt und die sich im Vergleich zu den vorerwähnten anderen scharfen apriori-Schranken als konkurrenzfähig erweist (vgl. Abschnitt 6).

In Abschnitt 4 wird zunächst der Satz aus Abschnitt 2 auf die Lösung einer sehr allgemeinen Klasse von Zweipunkt-Randwertproblemen bei Systemen von nicht-linearen Differentialgleichungen mit nichtlinearen Randbedingungen angewandt, um dann Lösungsaussagen bei einem bei der Erwärmung bzw. Abkühlung eines Stabes auftretenden Rand-Eigenwert-Problem zu liefern, wobei Ergebnisse von Bosarge und Falb [4] verallgemeinert werden. In Abschnitt 5 wird ein allgemeiner Satz über die Lösung von Hammersteinschen Integralgleichungen gegeben. Ferner werden Lösungsaussagen für eine spezielle derartige Gleichung, die einen Parameter enthält,

gewonnen. Die Anwendung der vorangehenden Sätze auf eine zweite spezielle nicht-lineare Integralgleichung führt zu einer Verallgemeinerung von Ergebnissen von Wille [21].

In Abschnitt 6 wird ein Kriterium formuliert und begründet, das – unter Heranziehung der apriori-Schranke von Abschnitt 3 – eine apriori-Entscheidung gestattet, welches der drei hier betrachteten Iterationsverfahren zur näherungsweise Lösung der Randwertprobleme und Integralgleichungen aus Abschnitt 4 und 5 im Hinblick auf den numerischen Aufwand das günstigste ist. Bei den Beispielen dieser Abschnitte erweist sich dies als für das Tschebyscheff-Verfahren zutreffend. Die Diskussion der numerischen Resultate ergibt, daß, wenn man von der mit den beiden Verfahren dritter Ordnung erzielten Genauigkeit ausgeht, diese in der Regel einen um etwa 20% geringeren Rechenaufwand erfordert als das Newton-Verfahren. Alle drei Verfahren erweisen sich als numerisch stabil.

In dieser Note wird des öfteren auf die frühere Arbeit [9] des Verfassers bezug genommen, die verwandte Aussagen über das Tschebyscheff-Verfahren enthält. Deshalb wird diese Arbeit jeweils kurz mit „I“ zitiert. Im Zusammenhang mit Zahlenergebnissen werden im folgenden drei modifizierte Gleichheitszeichen benutzt: \doteq bedeutet gewöhnliche Rundung, \doteq stets Aufrundung und \doteq stets Abrundung, z. B. $\pi \doteq 3,15$; $\sqrt{(10)} \doteq 3,1$.

2. EIN SATZ ÜBER DAS TSCHEBYSCHJEFF-VERFAHREN UNTER SCHWACHEN BEDINGUNGEN AN DIE ZWEITE ABLEITUNG

Seien X, Y zwei beliebige Banach-Räume, S eine abgeschlossene Kugel in X mit dem Mittelpunkt x_0 , deren Radius nachfolgend spezifiziert wird, X_F eine offene Teilmenge von X mit $X_F \supset S$ und $F : X_F \rightarrow Y$ ein nicht notwendig linearer Operator, der auf S dreimal differenzierbar ist. Die Begriffe differenzierbar und Ableitung werden hier und im folgenden im Fréchet'schen Sinne verstanden. Für $x_n \in S$ ($n \in \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$) verwenden wir die Abkürzen:

$$(2.1) \quad F_n := F(x_n); \quad F_n^{(j)} := F^{(j)}(x_n) \quad (j = 1, 2, 3); \quad f_n := F'(x_n);$$

wobei $F^{(j)}(x_n)$ die j -te Ableitung von F im Punkte x_n sei. Das Nullelement eines Raumes wird mit Θ bezeichnet außer in \mathbb{R} , wo hierfür 0 geschrieben wird.

Im folgenden beweisen wir einen Satz von der in der Einleitung genannten Art über das Tschebyscheff-Verfahren zur iterativen Lösung der Gleichung $F(x) = \Theta$ unter schwachen Bedingungen an die zweite Ableitung: F'' braucht – im Gegensatz zur dritten Ableitung – nicht über die Kugel S , sondern nur an der Ausgangsnäherung x_0 abgeschätzt zu werden. Die Bedeutung dieser Tatsache für die praktische Realisierung der Abschätzung ist klar. Es zeigt sich aber, daß hierdurch auch weitergehende Existenzaussagen möglich sind als dies bei Abschätzung von F'' über die Kugel S der Fall ist. Darauf kommen wir bei den Anwendungen zurück.

Der Satz kann statt für S in analoger Form auch für eine konvexe Teilmenge von X bzw. X_F bewiesen werden. Die unerhebliche Beschränkung auf eine Kugel rührt von dem Wunsch her, die Voraussetzungen in einer möglichst brauchbaren Gestalt für den Anwender zu formulieren.

Satz 1. Falls $x_0 \in X_F$ so gewählt werden kann, daß (V 1)–(V 3) gilt,

$$(V 1) \exists f_0^{-1} = [F'(x_0)]^{-1} : Y \rightarrow X \text{ mit } \|f_0^{-1}\| \leq \beta (>0),$$

$$(V 2) \text{ der Operator } F : X_F \rightarrow Y \text{ ist dreimal differenzierbar auf der Kugel } S := \\ := \{x \in X \mid \|x - x_0\| \leq \frac{14}{9}\zeta\}, \text{ wobei } \zeta \text{ eine positive Zahl ist, so daß } \zeta_0 := \\ := \|f_0^{-1}F_0\| \leq \zeta,$$

$$(V 3) \beta K_2 \zeta \leq \frac{1}{3}, \text{ wobei } \|F''(x_0)\| \leq K_2$$

$$\beta K_3 \zeta \leq \frac{6}{37}, \text{ wobei } \|F'''(x)\| \leq K_3 \quad \forall x \in S,$$

dann

(B 1) existiert die durch das Tschebyscheff-Verfahren (= TV)

$$(2.2a) \quad F_{n-1} + F'_{n-1}c_{n-1} = \Theta \Rightarrow c_{n-1}$$

$$(2.2b) \quad F_{n-1} + F'_{n-1}d_{n-1} + \frac{1}{2}F''_{n-1}c_{n-1}^{(2)} = \Theta \Rightarrow d_{n-1}$$

$$(2.2c) \quad x_n := x_{n-1} + d_{n-1} \quad n = 1, 2, \dots$$

definierte Folge $\{x_n\}$, und es ist $x_n \in S$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Ferner gilt:

(B 2) Die Folge $\{x_n\}$ konvergiert, und zwar gilt $x^* := \lim x_n \in S$.

(B 3) $F(x^*) = \Theta$.

(B 4) TV konvergiert (mindestens) von der Ordnung 3.

(B 5) In S gibt es außer x^* keine andere Lösung der Gleichung $F(x) = \Theta$.

(B 6) Es gelten für alle $n \in \mathbb{N}$ bzw. \mathbb{N}_0 die Fehlerabschätzungen

$$(2.3a) \quad \|x^* - x_n\| < \frac{14}{9} \cdot \frac{\zeta}{2^n} (\beta\gamma\zeta) 3^n - 1 \quad (n \in \mathbb{N}_0)$$

$$(2.3b) \quad \gamma := 2M_2 \sqrt{\left(\frac{8}{5} \cdot \frac{M_3}{\beta M_2^2} + \frac{13}{6} \left(1 + \frac{14}{3} \frac{M_3}{M_2} \zeta\right)^2\right)}; \quad M_j := \frac{K_j}{j!} \quad (j = 2, 3)$$

$$(2.4a) \quad \|x^* - x_n\| < \frac{14}{9} \beta_n (M_3 + \frac{12}{5} \beta_n M_{n-1}^2) \|x_n - x_{n-1}\|^3 \quad (n \in \mathbb{N})$$

$$(2.4b) \quad \beta_n := \frac{\beta_{n-1}}{1 - \eta_{n-1}} \quad (n \in \mathbb{N}); \quad \beta_0 := \beta$$

$$(2.4c) \quad \mu_n := \mu_{n-1} + \frac{7}{2}M_3\zeta_{n-1} \quad (n \in \mathbb{N}); \quad \mu_0 := M_2$$

$$(2.4d) \quad \eta_n := \frac{7}{3}\beta_n\zeta_n(\mu_n + \frac{7}{4}M_3\zeta_n); \quad \zeta_n := \|f_n^{-1}F_n\| \quad (n \in \mathbb{N}_0)$$

$$(2.5a) \quad \|x^* - x_n\| \leq \frac{14}{9}\beta_n\{M_3\|d_{n-1}\|^3 + \mu_{n-1}\|d_{n-1} - c_{n-1}\|(\|d_{n-1}\| + \|c_{n-1}\|)\} \quad (n \in \mathbb{N})$$

$$(2.5b) \quad d_{n-1} = x_n - x_{n-1}; \quad c_{n-1} := f_{n-1}^{-1}F_{n-1} \quad (n \in \mathbb{N})$$

$$(2.6) \quad \|x^* - x_n\| > \frac{\zeta_n}{1 + \eta_n} \quad (n \in \mathbb{N})$$

In den *a posteriori*-Schranken kann μ_{n-1} ersetzt werden durch $\frac{1}{2}\|F''_{n-1}\|$, ebenso β_n durch $\|f_n^{-1}\|$ (vgl. 2.1).

Bemerkungen. 1. Es sind zwei obere *a posteriori*-Schranken angegeben worden, weil jede gegenüber der anderen gewisse Vorteile besitzt. Wesentlicher Vorteil von (5) ist – wie im Beweis zu sehen sein wird – die schärfste der angegebenen Schranken zu sein. In (2.4) kommt im Exponenten der Norm von $x_n - x_{n-1}$ die Ordnung der Konvergenz zum Ausdruck; überdies ist (2.4) von einfacherer Gestalt als (2.5) und vor allem unempfindlicher gegen Rundungsfehler.

2. Die zu Teil II von Satz 1 in *I* analoge Ersetzung des Faktors $14/9$ in (4a) bzw. (5a) durch einen gewissen, i. allg. kleineren Faktor konnte unter den vorliegenden Voraussetzungen nicht bewiesen werden. Und zwar ist es die Ungleichung (2.20) in *I*, die sich hier trotz schärfster Abschätzungen nicht verifizieren ließ. Dies ist möglich, wenn man die Schranke in (V 3) weiter verkleinert.

3. Die Voraussetzungen lassen sich noch dadurch abschwächen, daß man die Bedingungen $\|f_0^{-1}\| \leq \beta$ und (V 3) zusammenfaßt.

4. Die Schranke $6/37$ in (V 3) ist beweistechnisch bedingt; mit $6/36 = 1/6$ läßt sich der Beweis ohne Verschärfung der übrigen Voraussetzungen in der vorliegenden Form nicht durchführen.

Wir beweisen (B 1), indem wir durch vollständige Induktion zeigen, daß die obigen Voraussetzungen auch für jedes andere Element der Folge $\{x_n\}$ erfüllt sind, genauer, daß für alle $n \in \mathbb{N}_0$ folgendes gilt

$$(A 1)_n \quad \exists f_n^{-1} : Y \rightarrow X \quad \text{mit} \quad \|f_n^{-1}\| \leq \beta_n,$$

$$(A 2)_n \quad \beta_n\mu_n\zeta_n \leq \frac{1}{6}; \quad \beta_nM_3\zeta_n^2 \leq \frac{1}{37}; \quad \|F''_n\| \leq 2\mu_n,$$

$$(A 3)_n \quad S_n := \{x \in X \mid \|x - x_n\| \leq \frac{14}{9}\zeta_n\} \subset S \quad (S_{-1} := S).$$

Aus (A 3)_n folgt dann trivialerweise $x_n \in S$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

(A 1)₀–(A 3)₀ sind nach Voraussetzung (V 1)–(V 3) erfüllt.

$$(A 1)_{n-1} - (A 3)_{n-1} \Rightarrow (A 1)_n - (A 3)_n:$$

(A 1)_n. Aus (2.2b) folgt mit der Induktionsannahme (d. h. u. a. $x_{n-1} \in S$) und (V 2) *

$$(2.7) \quad \|d_{n-1}\| \leq \frac{7}{6}\zeta_{n-1}.$$

Der koniare*) Operator $U_n := I - f_{n-1}^{-1}f_n$ bildet den Banach-Raum X in sich ab. Wegen (A 3)_n gilt

$$\| [F'(x_n) - F'(x_{n-1})] - [F''(x_{n-1})(x_n - x_{n-1})] \| \leq 3M_3 \|x_n - x_{n-1}\|^2$$

und mit (A 2)_{n-1} sowie (2.7)

$$\|F'(x_n) - F'(x_{n-1})\| \leq \frac{7}{3}(\mu_{n-1} + \frac{7}{4}M_3\zeta_{n-1})\zeta_{n-1}$$

und damit

$$(2.8) \quad \|U_n\| \leq \eta_{n-1} = \frac{7}{3}(\beta_{n-1}\mu_{n-1}\zeta_{n-1}) + \frac{49}{12}(\beta_{n-1}M_3\zeta_{n-1}^2) \leq \frac{665}{666} \cdot \frac{1}{2} < \frac{1}{2} < 1.$$

Also existiert nach dem Banach-Lemma die koniare Inverse $(I - U_n)^{-1} = [f_{n-1}^{-1}f_n]^{-1}$ und damit auch f_n^{-1} mit der Abschätzung

$$\|f_n^{-1}\| \leq \frac{\|f_{n-1}^{-1}\|}{1 - \eta_{n-1}} \leq \frac{\beta_{n-1}}{1 - \eta_{n-1}} = \beta_n.$$

Wegen (2.8) hat man

$$(2.9) \quad \|f_n^{-1}\| \leq \beta_n < 2\beta_{n-1} \quad \text{bzw.} \quad \beta_n < 2^n\beta \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

(A 2)_n. Mit (A 2)_{n-1}, (A 3)_{n-1}, (2.7) und (2.4c) ergibt sich

$$\|F_n''\| \leq \|F_{n-1}''\| + \|F_n'' - F_{n-1}''\| \leq 2\mu_{n-1} + K_3\|d_{n-1}\| \leq 2\mu_n.$$

Die anderen beiden Ungleichungen von (A 2)_n folgen aus (2.9), (A 2)_{n-1} und

$$(2.10) \quad \zeta_n < \frac{1}{4}\zeta_{n-1}.$$

Zum Beweis dieser Ungleichung wird $\zeta_n = \|f_n^{-1}F_n\|$, d. h. F_n möglichst scharf durch ζ_{n-1} abgeschätzt, was man durch Taylorentwicklung von F bei x_{n-1} mit der dritten Ableitung im Restglied erreicht. Man findet

$$(2.11) \quad \|F_n\| \leq M_3\|d_{n-1}\|^3 + \mu_{n-1}\|d_{n-1} - c_{n-1}\|(\|d_{n-1}\| + \|c_{n-1}\|) < \\ < (\frac{8}{5}M_3 + \frac{13}{6}\beta_{n-1}\mu_{n-1}^2)\zeta_{n-1}^2$$

und zusammen mit (A 2)_{n-1} die Ungleichung (2.10).

(A 3)_n ist klar.

(B 2). Aus (2.10)

$$\zeta_{n+j} \leq \frac{1}{4^j}\zeta_n \leq \frac{\zeta}{4^{n+j}} \quad \forall n, j \in \mathbb{N}_0.$$

*) Wir nennen einen beschränkten linearen Operator abkürzend koniar.

$\{x_n\}$ ist eine Cauchy-Folge, denn

$$\|x_{n+p} - x_n\| \leq \frac{7}{8} \sum_{j=0}^{p-1} \zeta_{n+j} < \frac{14}{9} \zeta_n \quad \forall n \in \mathbb{N}_0 \wedge \forall p \in \mathbb{N},$$

woraus durch Grenzübergang

$$(2.12) \quad \|x^* - x_n\| \leq \frac{14}{9} \zeta_n \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$$

folgt. Deswegen und wegen der Abgeschlossenheit von S_n gilt $x^* := \lim x_n \in S_n$ und damit wegen (B 1) auch $x^* \in S$.

(B 3) ist klar.

(B 4). Wir drücken den Fehler der n -ten Näherung abschätzend durch den Fehler der $(n-1)$ -ten Näherung aus. Mit der Taylorformel und $d_{n-1}^* := x^* - x_{n-1}$ erhält man nach einiger Rechnung

$$\|x^* - x_n\| \leq \|f_{n-1}^{-1}\| \{M_3 \|d_{n-1}^*\|^3 + \mu_{n-1} \|d_{n-1}^* - c_{n-1}\| (\|d_{n-1}^*\| + \|c_{n-1}\|)\}$$

und – anders als bei Abschätzung von F'' über S –

$$(2.13) \quad \begin{aligned} \|d_{n-1}^* - c_{n-1}\| &\leq \mu_{n-1}^* \|f_{n-1}^{-1}\| \cdot \|d_{n-1}^*\|^2; \\ \mu_{n-1}^* &:= \mu_{n-1} + M_3 \|d_{n-1}^*\|; \quad n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

und damit

$$(2.14) \quad \|x^* - x_n\| \leq \tilde{M}_{3,n-1} \|x^* - x_{n-1}\|^3 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

wobei

$$\tilde{M}_{3,n-1} := \|f_{n-1}^{-1}\| M_3 + \mu_{n-1} \mu_{n-1}^* \|f_{n-1}^{-1}\|^2 (2 + \mu_{n-1}^* \|f_{n-1}^{-1}\| \cdot \|d_{n-1}^*\|).$$

(B 4) ist bewiesen, falls noch gezeigt wird, daß der Vorfaktor $\tilde{M}_{3,n-1}$ bezüglich n gleichmäßig beschränkt ist. Man zeigt leicht induktiv, daß für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$(2.15) \quad \mu_n = M_2 + \frac{7}{2} M_3 \sum_{j=0}^{n-1} \zeta_j \leq M_2 + \frac{14}{3} M_3 \zeta.$$

Also ist die Folge $\{\mu_n\}$ gleichmäßig beschränkt bzgl. $n \in \mathbb{N}_0$. Wir zeigen, daß dies auch für die Folge $\{f_n^{-1}\}$ zutrifft.

Hierzu verfahren wir ähnlich wie beim Beweis von (A 1)_n. Wir betrachten den koniaren Operator $\tilde{U}_n : X \rightarrow X$,

$$\tilde{U}_n := I - f_0^{-1} f_n = -f_0^{-1} (f_n - f_0)$$

und erhalten analog zum Beweis von (A 1)_n

$$\|[F'(x_n) - F'(x_0)] - [F''(x_0)(x_n - x_0)]\| \leq \frac{1}{2} K_3 \|x_n - x_0\|^2.$$

Durch Abschätzung der Differenz links nach unten erhält man mit (A 1)_{n-1}, (V 3), $x_n \in S$

$$(2.16) \quad \begin{aligned} \|\tilde{U}_n\| &\leq \beta\{K_2\|x_n - x_0\| + \frac{1}{2}K_3\|x_n - x_0\|^2\} \leq \\ &\leq \frac{14}{9}\{(\beta\zeta K_2) + \frac{1}{2}\frac{14}{9}(\beta K_3\zeta^2)\} < 1. \end{aligned}$$

Nach dem Banach-Lemma existiert somit die koniare Inverse $(I - \tilde{U}_n)^{-1} = (f_0^{-1} f_n)^{-1}$ und es folgt analog zum Beweis von (A 1)_n mit (2.16)

$$\|f_n^{-1}\| \leq \|(f_0^{-1} f_n)^{-1}\| \cdot \|f_0^{-1}\| \leq \frac{\beta}{1 - \|\tilde{U}_n\|} \leq \frac{333}{95} \cdot \beta \quad \forall n \in \mathbb{N}_0.$$

(B 5) wird dadurch bewiesen, daß über die Ungleichung

$$(E)_n \quad \|\tilde{x} - x_n\| < \frac{14}{9} \cdot \frac{\zeta}{4^n} \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$$

lim $\|\tilde{x} - x_n\| = 0$ für jede Lösung \tilde{x} von $F(x) = \Theta$ in S gezeigt wird. Die Schwierigkeit besteht darin, daß man mit einer Aussage für hinreichend große $n \in \mathbb{N}$ mit (2.14) nicht durchkommt, da von $\tilde{x} \in S$ auszugehen ist. (So konnte auch die Gültigkeit von (E)₁ nicht nachgewiesen werden.) Wir beschränken uns auf die Angabe einiger Zwischenergebnisse der längeren Rechnung. Aus $\tilde{x} \in S$ und (V 3) folgt durch scharfe Abschätzung

$$\beta\mu_0^*\zeta \leq \frac{139}{18 \cdot 37}; \quad \tilde{M}_{3,0}\zeta^2 < \frac{4}{37}; \quad \|\tilde{x} - x_1\| < \frac{296 \ 352}{296 \ 703} \cdot \frac{11}{27} \zeta < \frac{11}{27} \zeta$$

und

$$\beta\mu_1^*\zeta < \frac{2992}{2997} \cdot \frac{3}{11} < \frac{3}{11}; \quad \tilde{M}_{3,1}\zeta^2 \leq \frac{1490 \ 656}{1490 \ 841} \cdot \frac{11}{16} < \frac{11}{16}; \quad \|\tilde{x} - x_2\| < \frac{14}{9} \cdot \frac{\zeta}{4^2}$$

womit man (E)₂ hat. Entsprechend für den Induktionsschritt (E)_{n-1} \Rightarrow (E)_n ($n = 3, 4, \dots$):

$$\beta\mu_{n-1}\zeta \leq \frac{65}{222}; \quad \beta\mu_{n-1}^*\zeta < \frac{3}{10}; \quad \tilde{M}_{3,n-1}\zeta^2 < \frac{1}{5} \cdot 4^{n-1},$$

$$\|\tilde{x} - x_n\| \leq (\tilde{M}_{3,n-1}\zeta^2) \left(\frac{14}{9}\right)^2 \cdot \frac{4}{4^{2n-2}} \left(\frac{14}{9} \cdot \frac{\zeta}{4^n}\right) < \frac{14}{9} \cdot \frac{\zeta}{4^n}.$$

(B 6). Die aposteriori-Schranke (2.5) folgt unmittelbar aus $\zeta_n \leq \beta_n \|F_n\|$, (2.12) und (2.11). Die beiden anderen oberen Schranken ergeben sich hieraus durch weitere Abschätzung. Um die Schranke (2.4) herzuleiten, schätzen wir die in (2.11) auftretende Differenz $d_{n-1} - c_{n-1}$ wie folgt aus der Differenz von (2.2b) und (2.2a) ab:

$$\begin{aligned} F'_{n-1}(d_{n-1} - c_{n-1}) &= -\frac{1}{2}F''_{n-1}c_{n-1}^2 = \\ &= \frac{1}{2}[F''_{n-1}d_{n-1}(d_{n-1} - c_{n-1}) + F''_{n-1}(d_{n-1} - c_{n-1})c_{n-1}] - \frac{1}{2}F''_{n-1}d_{n-1}^2, \end{aligned}$$

also

$$\|d_{n-1}\| \|c_{n-1}\| \leq \beta_{n-1} \mu_{n-1} (\|d_{n-1}\| + \|c_{n-1}\|) \|d_{n-1} - c_{n-1}\| + \beta_{n-1} \mu_{n-1} \|d_{n-1}\|^2.$$

Unter Beachtung von (2.8) erhält man hieraus mit (2.7) und (2.4b)

$$\begin{aligned} \|d_{n-1} - c_{n-1}\| &\leq \frac{\beta_{n-1} \mu_{n-1} \|d_{n-1}\|^2}{1 - \frac{13}{6} \beta_{n-1} \mu_{n-1} \zeta_{n-1}} < \frac{\beta_{n-1} \mu_{n-1} \|d_{n-1}\|^2}{1 - \frac{7}{3} \beta_{n-1} (\mu_{n-1} + \frac{7}{4} M_3 \zeta_{n-1}) \zeta_{n-1}} = \\ &= \beta_n \mu_{n-1} \|d_{n-1}\|^2. \end{aligned}$$

Hiermit und mit $\|c_{n-1}\| \leq \|d_{n-1} - c_{n-1}\| + \|d_{n-1}\|$ sowie (2.7) und (2.9) erhält man aus (2.11)

$$\begin{aligned} \|F_n\| &\leq M_3 \|d_{n-1}\|^3 + \beta_n \mu_{n-1}^2 \|d_{n-1}\|^2 [2 \|d_{n-1}\| + \beta_n \mu_{n-1} \|d_{n-1}\|^2] \leq \\ &\leq \{M_3 + \beta_n \mu_{n-1}^2 [2 + 2 \cdot \frac{7}{6} (\beta_{n-1} \mu_{n-1} \zeta_{n-1})]\} \|d_{n-1}\|^3 \leq \\ &\leq \{M_3 + 2 \beta_n \mu_{n-1}^2 [1 + \frac{7}{36}]\} \|d_{n-1}\|^3 = \{M_3 + \frac{21.5}{21.6} \cdot \frac{12}{5} \beta_n \mu_{n-1}^2\} \|d_{n-1}\|^3 < \\ &< \{M_3 + \frac{12}{5} \beta_n \mu_{n-1}^2\} \|d_{n-1}\|^3. \end{aligned}$$

Zum Nachweis der Gültigkeit der unteren aposteriori-Schranke (2.6) schätzen wir (2.13) nach unten ab und erhalten so mit (2.12) und (2.4d)

$$\begin{aligned} \zeta_n &\leq \|d_{n-1}^*\| + \mu_n^* \beta_n \|d_n^*\|^2 = (1 + \beta_n \mu_n^* \|d_n^*\|) \|d_n^*\| \leq \\ &\leq [1 + \beta_n (\mu_n + M_3 \cdot \frac{14}{9} \zeta_n) \frac{14}{9} \zeta_n] \|d_n^*\| = \\ &= [1 + \frac{14}{9} \beta_n \zeta_n (\mu_n + \frac{14}{9} M_3 \zeta_n)] \|d_n^*\| < (1 + \eta_n) \|x^* - x_n\|. \end{aligned}$$

Im Hinblick auf (2.12) genügt es, zur Herleitung der apriori-Schranke (2.3) die Ungleichung

$$(S)_n \quad \zeta_n \leq \frac{1}{2^n} \zeta (\beta \gamma \zeta)^{3^{n-1}} \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$$

zu beweisen. $\zeta_0 \leq \zeta$ nach Voraussetzung (V 2).

(S)_{n-1} \Rightarrow (S)_n: Mit $\beta_n \geq \beta_{n-1} \geq \dots \geq \beta$, (2.11), (2.9), (2.15), (2.3b) und (S)_{n-1} haben wir für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \zeta_n &\leq \beta_n \left(\frac{8}{5} M_3 + \frac{13}{6} \beta_{n-1} \mu_{n-1}^2 \right) \zeta_{n-1}^3 \leq (2^n \beta) (2^{n-1} \beta) \left\{ \frac{8}{5} \frac{M_3}{2^{n-1} \beta} + \right. \\ &+ \frac{13}{6} \left(M_2 + \frac{14}{3} M_3 \zeta \right)^2 \left. \right\} \zeta_{n-1}^3 \leq 2^{2n-3} \beta^2 \left[4M_2^2 \sqrt{\left(\frac{8}{5} \frac{M_3}{M_2^2 \beta} + \frac{13}{6} \left(1 + \frac{14}{3} \frac{M_3}{M_2} \zeta \right)^2 \right)} \right] \\ &\cdot \left\{ \frac{1}{2^{3n-3}} \zeta^2 (\beta \gamma \zeta)^{(3^{n-1}-1)3} \right\} \zeta = \frac{1}{2^n} \zeta (\beta \gamma \zeta)^{3^{n-1}}. \end{aligned}$$

Die Ersetzungs-Bemerkung am Schluß der Formulierung des Satzes ist klar. Damit ist Satz 1 vollständig bewiesen.

3. EINE APRIORI SCHRANKE FÜR DAS TSCHEBYSCHJEFF-VERFAHREN

Bei der Durchführung der numerischen Lösung von Operatorgleichungen verschiedenen Typs werden in der Regel aposteriori-Schranken verwendet, weil diese im allgemeinen wesentlich besser sind als apriori-Schranken. Jedoch stellt sich mit dem Ausbau der Theorie der Iterationsverfahren die Frage, einen Computer apriori entscheiden zu lassen, welches Iterationsverfahren für eine gegebene Aufgabe oder eine Klasse von Problemen das günstigste ist. Hieraus ergeben sich zwei Forderungen. Erstens müssen die Voraussetzungen in den verwendeten Sätzen zu den verschiedenen zur Diskussion stehenden Verfahren von einheitlicher Bauart sein, etwa vom Kantorowitsch-Typ, zum anderen müssen die apriori-Schranken möglichst scharf und ohne nennenswerten zusätzlichen numerischen Aufwand berechenbar sein. Der folgende Satz mit der darin gegebenen apriori-Schranke erfüllt diese Forderungen. Die Schranke stellt, besonders von $n = 3$ an, eine wesentliche Verbesserung der in I gegebenen apriori-Schranke dar und erweist sich im Vergleich zu scharfen apriori-Schranken bei verwandten Verfahren als konkurrenzfähig (vgl. Abschnitt 6). Balázs [2] und Shafiyev [20] haben zwar ebenfalls apriori-Schranken für TV angegeben, doch sind deren Voraussetzungen sehr kompliziert und nicht vom einfachen NV-Typ, insbesondere hängt dort der Kugelradius von den Schranken für die höheren Ableitungen ab (und die Schranken natürlich wiederum vom Radius), so daß ihre Anwendung auf erhebliche numerische Schwierigkeiten stößt.

Die allgemeinen Gesichtspunkte der Struktur sowie die Bezeichnungen des folgenden Satzes sind die gleichen wie sie zu Anfang des vorigen Abschnitts dargelegt wurden.

Satz 2. Falls $x_0 \in X_F$ so gewählt werden kann, daß (V 1)–(V 3) gilt

$$(V 1) \exists f_0^{-1} : Y \rightarrow X \text{ mit } \|f_0^{-1}\| \leq \beta (> 0),$$

(V 2) der Operator $F : X_F \rightarrow Y$ ist zweimal Lipschitz-stetig differenzierbar auf der in Satz 1 definierten Kugel S ,

$$(V 3) \beta K_j \zeta^{j-1} \leq \frac{1}{3} \quad (j = 2, 3), \text{ wobei}$$

$$\|F''(x)\| \leq K_2, \quad \|F''(x) - F''(y)\| \leq K_3 \|x - y\| \quad \forall x, y \in S,$$

dann konvergiert die TV-Folge $\{x_n\}$ (mindestens) von der Ordnung 3 gegen die durch $x^* := \lim x_n$ bestimmte einzige Lösung von $F(x) = \Theta$ in S , und es gilt für alle $n \in \mathbb{N}_0$

$$(3.1a) \quad \|x^* - x_n\| \leq \frac{14}{9} \Theta_n \zeta (\beta \gamma \zeta)^{3^n - 1}$$

wobei

$$\gamma := \frac{18}{11} \sqrt{\left(\frac{8}{5} \cdot \frac{M_3}{\beta} + \frac{13}{6} M_2^2 \right)}$$

und

$$(3.1b) \quad \Theta_n := \begin{cases} \left(\frac{11}{18}\right)^n & n = 0, 1 \\ \left(\frac{27}{13}\right)^{(3^{n-2}+1)/2} \cdot \left(\frac{11}{18}\right)^{5 \cdot 3^{n-2}} \cdot \varkappa_1^2(\varkappa_2 \varkappa_1^2)^{3^{n-2}-1} & n \in \mathbb{N} \setminus \{1\} \end{cases}$$

mit $\varkappa_i := \gamma_i/\gamma$ ($i = 1, 2$) und

$$(3.1c) \quad \gamma_1 := \frac{18}{11} \sqrt{\left(\frac{8}{5} \cdot \frac{M_3}{\beta} + \frac{39}{11} M_2^2\right)}; \quad \gamma_2 := \frac{27}{13} \sqrt{\left(\frac{8}{5} \frac{M_3}{\beta} + \frac{9}{2} M_2^2\right)}.$$

Der Beweis der Aussage ohne die Schranke verläuft analog dem von Satz 1. Wir notieren lediglich eine nachher benötigte Ungleichung [vgl. (2.11)]

$$(3.2) \quad \zeta_n \leq \|f_n^{-1}\| \left(\frac{8}{5} M_3 + \frac{13}{6} \|f_{n-1}^{-1}\| M_2^2\right) \zeta_{n-1}^3 \quad (n \in \mathbb{N})$$

und weisen darauf hin, daß Ungleichung (2.12) hier ebenfalls gilt.

Um die Gültigkeit der Schranke (3.1) zu verifizieren, beachten wir die folgende, auch für sich interessante Aussage. Unter den Voraussetzungen des Satzes gilt:

$$(3.3a) \quad \|f_n^{-1}\| \leq \begin{cases} \beta & n = 0 \\ \frac{18}{11} \beta & \text{für } n = 1 \\ \frac{27}{13} \beta & n \in \mathbb{N} \setminus \{1\} \end{cases}$$

(3.3a) ist klar. Um (3.3b) zu sehen, schätzen wir die Norm des im Beweisteil (B 4) von Satz 1 eingeführten, X in sich abbildenden koniären Operators $\tilde{U}_n = I - f_0^{-1} f_n$ anders ab als dort und erhalten wegen $x_n \in S$ mit (V 1)–(V 3) für $n \in \mathbb{N}$

$$\|\tilde{U}_n\| \leq \beta K_2 \|x_n - x_0\| \leq \frac{14}{9} (\beta K_2 \zeta) \leq \frac{14}{27}$$

und damit

$$\|f_n^{-1}\| = \|[f_0^{-1} f_n]^{-1} f_0^{-1}\| \leq \frac{\beta}{1 - \|\tilde{U}_n\|} \leq \frac{27}{13} \beta.$$

Die Schranke (3.1) ist wegen der Gültigkeit von (2.12) gewonnen mit

$$(S)_n \quad \zeta_n \leq \Theta_n \zeta (\beta \gamma \zeta)^{3^n - 1}.$$

$$(S)_0. \quad \zeta_0 \leq \zeta \text{ nach Voraussetzung (V 2).}$$

$$(S)_1. \quad \text{Aus (3.2) folgt mit (3.3a).}$$

$$\zeta_1 \leq \frac{18}{11} \beta \left(\frac{8}{5} M_3 + \frac{13}{6} \beta M_2^2\right) \zeta^3 = \frac{11}{18} \beta^2 \gamma^2 \zeta^3.$$

$$(S)_2. \quad (3.2) \text{ liefert mit (3.3)}$$

$$\zeta_2 \leq \frac{27}{13} \beta^2 \gamma^2 \left(\frac{11}{18}\right)^2 \left\{ \left(\frac{11}{18}\right)^3 \zeta^3 (\beta \gamma \zeta)^6 \right\} = \frac{27}{13} \left(\frac{11}{18}\right)^5 \varkappa_1^2 (\beta \gamma \zeta)^{3^2 - 1}.$$

$(S)_{n-1} \Rightarrow (S)_n$. (3.2) führt mit $(S)_{n-1}$ für $n = 3, 4, \dots$ auf

$$\begin{aligned} \zeta_n &\leq \frac{27}{13} \beta \left(\frac{8}{5} M_3 + \frac{9}{2} \beta M_2^2 \right) \Theta_{n-1}^3 \zeta^3 (\beta \gamma \zeta)^{(3^{n-1}-1) \cdot 3} \leq \\ &\leq \frac{13}{27} \kappa_2^2 \Theta_{n-1}^3 \zeta (\beta \gamma \zeta)^{3^{n-1}} = \\ &= \left(\frac{27}{13} \right)^{(3^{n-2}+1)/2} \left(\frac{11}{18} \right)^{5 \cdot 3^{n-2}} (\kappa_2 \kappa_1^2)^{3^{n-2}-1} \kappa_1^2 \zeta (\beta \gamma \zeta)^{3^{n-1}}. \end{aligned}$$

Damit ist Satz 2 bewiesen.

Bei der in I angegebenen apriori-Schranke ist $\Theta_n := (11/18)^n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. In Tab. 1 sind die numerischen Werte der alten und der neuen Schranke für die folgenden drei Beispiele

(1) $x^3 = 10$, $x_0 := 2$;

(2) $x(t) + \frac{1}{2} \int_0^1 t \cos x(\tau) d\tau = t$, $x_0(t) := t \in [0, 1]$;

(3) $Ay = \lambda By$, $A := \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, $x_0 := (y_0, \lambda_0) = (-0,59; 1; 0,7)$

für $n = 1(1) 5$ – jeweils in der letzten Ziffer gerundet – zusammengestellt.

Tab. 1. Vergleich von apriori-Schranken beim Tschebyscheff-Verfahren.

n	$(11/18)^n$	Θ_n		
		Beispiel 1	Beispiel 2	Beispiel 3
1	0,61111	0,61111	0,61111	0,61111
2	0,37346	0,27146	0,24112	0,28967
3	0,22822	0,02953	0,01754	0,03914
4	0,13947	$3,8 \cdot 10^{-5}$	$6,8 \cdot 10^{-6}$	$9,7 \cdot 10^{-5}$
5	0,08523	$8,1 \cdot 10^{-14}$	$3,8 \cdot 10^{-16}$	$1,5 \cdot 10^{-12}$

Man sieht, daß die neue Schranke vor allem von $n = 3$ an wesentlich besser ist als die früher angegebene. Dies liegt daran, daß $\|f_n^{-1}\|$ [durch (3.3)] für diese n wesentlich schärfer abgeschätzt worden ist als in I.

4. ZWEIPUNKT-RANDWERTPROBLEME

Wir betrachten die folgende Klasse von nichtlinearen Zweipunkt-Randwertproblemen bei Systemen von gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung

$$(4.1) \quad \dot{x}(t) = \varphi(t, x(t)) \in \mathbb{R}^m \quad t \in [0, 1] \quad g(x(0)) + h(x(1)) = c \in \mathbb{R}^m.$$

Diese Problemklasse, die in den Anwendungen, z. B. in der nichtlinearen Kontrolltheorie [11], eine bedeutende Rolle spielt, ist von Bosarge und Falb [4] im Hinblick auf die iterative Lösung mit gewissen Mehrpunktverfahren von (ganzzahliger) Ordnung $k \geq 2$ untersucht worden. Wir wenden den Satz 1 über das Tschebyscheff-Verfahren (= TV) aus Abschnitt 2 auf Randwertprobleme vom Typ (4.1) an. Je nach der Gestalt der Funktion φ ist der numerische Aufwand zur iterativen Lösung von (4.1) nach TV geringer als bei Verwendung eines Mehrpunktverfahrens dritter Ordnung und umgekehrt, was man leicht an Hand einer geeigneten Formulierung der Verfahren erkennt (vgl. hierzu Abschnitt 6). An dem nachfolgenden Beispiel eines Temperaturverteilungsproblems zeigt sich, daß die durch Anwendung von Satz 1 auf Randwertprobleme bei Systemen von gewöhnlichen Differentialgleichungen bzw. Differentialgleichungen höherer Ordnung sich ergebenden Bedingungen für die Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung dieses Randwertproblems und die Konvergenz des betrachteten Iterationsverfahrens schwächer sind als jene von Bosarge und Falb [4]. Aussagen und Beweis des weiter unten gegebenen konstruktiven Existenzsatzes über die Lösbarkeit der nichtlinearen Aufgabe (4.1) beziehen sich zum Teil auf die Lösbarkeit des linearen Randwertproblems

$$(4.2) \quad \dot{x}(t) = A(t)x(t) + k(t) \quad t \in [0, 1] \quad Mx(0) + Nx(1) = d,$$

wobei $A(t)$, M , N gegebene $m \times m$ -Matrizen und $k(t)$, d gegebene m -Vektoren sind, die in den Bedingungen zur Lösbarkeit von (4.1) eine gewisse Rolle spielen. Sei $\varphi(t)$ eine Fundamentalmatrix des homogenen linearen Systems $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$. Wir führen die Bezeichnung

$$\psi(t, \tau) := \varphi(t) \varphi^{-1}(\tau) \quad t, \tau \in [0, 1]$$

ein. Mit $L(\mathbb{R}^m)$ bezeichnen wir den Banachraum der \mathbb{R}^m in sich abbildenden Matrizen bzw. beschränkten linearen Operatoren. (Wir identifizieren hier diese beiden Klassen von Objekten miteinander.) Den Banachraum der stetigen Abbildungen $x : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^m$ bezeichnen wir mit $C_m[0, 1]$.

Dann gilt [5], [11] das

Lemma. *Die Abbildung $A : [0, 1] \rightarrow L(\mathbb{R}^m)$ sei stetig, $k \in C_m[0, 1]$ und $\det [M + N \psi(t, 0)] \neq 0$. Dann hat das System (4.2) eine eindeutig bestimmte Lösung $x^* \in C_m^1[0, 1]$, und es gilt*

$$x^*(t) = H(t)c + \int_0^1 G(t, \tau) k(\tau) d\tau \quad t \in [0, 1]$$

wobei

$$H(t) := \psi(t, 0) Q \quad t \in [0, 1]; \quad Q := [M + N \psi(1, 0)]^{-1}$$

ist und die Greensche Matrix $G(t, \tau)$ gegeben ist durch

$$G(t, \tau) := \begin{cases} H(t) M \psi(0, \tau) & 0 \leq \tau < 1, \\ -H(t) N \psi(1, \tau) & t < \tau \leq 1. \end{cases}$$

Sei ζ eine positive Zahl und x_0 eine gewisse Funktion aus $C_m[0, 1]$. Soweit im folgenden eine Normspezifizierung des Banachraumes $C_m(0, 1]$ erforderlich ist, wird dabei die übliche Supremumsnorm zugrunde gelegt:

$$x \in C_m[0, 1], \quad \|x\| := \sup_{i=1(1)m} \sup_{t \in [0, 1]} |x_i(t)|$$

wobei $x_i \in C[0, 1]$ [$i = 1(1)m$] die i -te Komponentenfunktion von x ist, d. h. $x(t) = [x_1(t), \dots, x_m(t)] \in \mathbb{R}^m$. Analog $u = (u_1, \dots, u_m) \in \mathbb{R}^m$. Ohne zu Mißverständnissen Anlaß zu geben, setzen wir $x_0 := (x_1^{(0)}, \dots, x_m^{(0)})$. Wir führen die Mengen ein:

$$S := \{x \in C_m[0, 1] \mid \|x - x_0\| < \varrho\} \subseteq \frac{14}{9}\zeta\},$$

$$D := \{(t, u) \in [0, 1] \times \mathbb{R}^m \mid \sup_{i=1(1)m} |u_i - x_i^{(0)}(t)| < \varrho\}, \quad \text{wobei } \varrho > \frac{14}{9}\zeta.$$

$$D_g := \{u \in \mathbb{R}^m \mid \sup_{i=1(1)m} |u_i - x_i^{(0)}(0)| < \varrho\},$$

$$D_h := \{u \in \mathbb{R}^m \mid \sup_{i=1(1)m} |u_i - x_i^{(0)}(1)| < \varrho\}.$$

Die Fréchet-Ableitung einer Abbildung in einem Punkt kennzeichnen wir durch Vorsetzen von D, D^2 , usw. vor den Wert der Abbildung in diesem Punkt. Sind mehrere Variable vorhanden, so deuten wir die Nummer der Variablen, bezüglich der die Ableitung zu bilden ist, durch einen unteren Index an, z. B. ist $D_2^2\varphi(\tau, u_0)$ die zweite „partielle“ Ableitung von φ nach der 2. Variablen an der Stelle u_0 bzw. (τ, u_0) . Die Argumente eines multilinearen Operators setzen wir der Übersichtlichkeit halber ohne Klammern in geordneter Reihenfolge hinter die Ableitung. Analog für höhere Ableitungen. Im Hinblick auf die Anwendungen beschränken wir uns auf höchstens quadratische Nichtlinearitäten in den Randbedingungen (4.1), d. h. die zweiten Ableitungen der Abbildungen g und h werden als konstant angenommen. Man kann zwar auf diese Einschränkung ohne weiteres verzichten, jedoch werden dadurch die Voraussetzungen hinsichtlich ihrer Gestalt verkompliziert.

Auf diesen Vorbereitungen aufbauend formulieren wir den folgenden Satz über die eindeutige Lösbarkeit des Randwertproblems (4.1) in der Kugel S und die Konvergenz des Tschebyscheff-Verfahrens hierfür.

Satz 3. Die Abbildung $A : [0, 1] \rightarrow L(\mathbb{R}^m)$ in (4.2) sei stetig und

$$\det [M + N\psi(1, 0)] \neq 0.$$

Falls sich $x_0 = (x_1^{(0)}, \dots, x_m^{(0)}) \in C_m[0, 1]$ so finden läßt, daß gilt,

(\checkmark 1) die Abbildungen $\varphi, D_2\varphi, D_2^2\varphi : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ sowie $g, Dg, D^2g : D_g \rightarrow \mathbb{R}^m$ und $h, Dh, D^2h : D_h \rightarrow \mathbb{R}^m$ sind stetig mit konstanten zweiten Ableitungen von g und h auf D_g bzw. D_h .

$$(\tilde{V} 2) \quad \|H(t) [Dg(x_0(0)) - M]\| + \|H(t) [Dh(x_0(1)) - N]\| + \\ + \int_0^1 \|G(t, \tau) [D_2\varphi(\tau, x_0(\tau)) - A(\tau)]\| d\tau \leq \mu < 1 \quad \forall t \in [0, 1]$$

wobei die Abbildungen H, G, M, N im vorstehenden Lemma erklärt sind,

$$(\tilde{V} 3) \quad \|x_0(t) - H(t) [c - g(x_0(0)) - h(x_0(1)) + Mx_0(0) + Nx_0(1)] - \\ - \int_0^1 G(t, \tau) [\varphi(\tau, x_0(\tau)) - A(\tau) x_0(\tau)] d\tau\| \leq \alpha \quad \forall t \in [0, 1],$$

$$(4.3) \quad \|H(t) D^2g(x_0(0))\| + \|H(t) D^2h(x_0(1))\| + \\ + \int_0^1 \|G(t, \tau) D_2^2\varphi(\tau, x_0(\tau))\| d\tau \leq K_2 \quad \forall t \in [0, 1],$$

$$(4.4) \quad \int_0^1 \|G(t, \tau) D_2^3\varphi(\tau, x(\tau))\| d\tau \leq K_3 \quad \forall t \in [0, 1] \wedge \forall x \in S$$

$$\beta K_2 \zeta \leq \frac{1}{3} \quad \beta K_3 \zeta^2 \leq \frac{6}{37},$$

wobei $\beta := 1/(1 - \mu)$ und der Radius der Kugel S bestimmt ist durch $\frac{14}{9}\zeta := \frac{14}{9}\alpha\beta$, dann existiert in dem Parallelepiped S genau eine Lösung $x^* \in C_m[0, 1]$ des Randwertproblems (4.1), die TV-Folge $\{x_n\}$ (vgl. (2.2)) konvergiert (mindestens) kubisch gegen x^* , und es gelten die Fehlerabschätzungen von Satz 1. (Die Normen in $(\tilde{V} 2)$, (4.3) und (4.4) sind zur $C_m[0, 1]$ -Norm zugeordnete Matrix-Normen).

Zusatz. Sind $g_{ij}^{(k)}(t), h_{ij}^{(k)}(t), G_{ij}^{(k)}(t, \tau)$ die Repräsentanten der bilinearen Abbildungen $H(t) D^2g(x_0(0)), H(t) D^2h(x_0(1)), G(t, \tau) D_2^2\varphi(\tau, x_0(\tau))$ und $G_{ijk}^{(2)}(t, \tau, x)$ der der trilinearen Abbildung $G(t, \tau) D_2^3\varphi(\tau, x(\tau))$, so sind (4.3) und (4.4) erfüllt, wenn gilt

$$\sup_{k=1(1)m} \left\{ \sum_{i,j=1}^m (|g_{ij}^{(k)}(t)| + |h_{ij}^{(k)}(t)|) + \int_0^1 |G_{ij}^{(k)}(t, \tau)| d\tau \right\} \leq K_2 \quad \forall t \in [0, 1], \\ \sup_{\lambda=1(1)m} \sum_{i,j,k=1}^m \int_0^1 |G_{ijk}^{(\lambda)}(t, \tau, x)| d\tau \leq K_3 \quad \forall t \in [0, 1] \wedge \forall x \in S.$$

Beweis. Unter den getroffenen Voraussetzungen lautet das zum Randwertproblem (4.1) äquivalente System nichtlinearer Integralgleichungen

$$(4.5) \quad [F(x)](t) := x(t) - H(t) [c - g(x(0)) - h(x(1)) + Mx(0) + Nx(1)] - \\ - \int_0^1 G(t, \tau) [\varphi(\tau, x(\tau)) - A(\tau) x(\tau)] d\tau = 0 \quad t \in [0, 1].$$

Zum Beweis dieses Darstellungssatzes sei etwa auf Falb und de Jong [11] verwiesen. Wir erwähnen lediglich, daß er in der einen Richtung durch Rückführung von (4.1) auf ein lineares Randwertproblem vom Typ (4.2) erfolgt und daß sich die Stetigkeitsvoraussetzungen noch etwas abschwächen lassen, was aber im vorliegenden

Fall keine wesentlichen Vorteil bringt. Wir sehen die linke Seite des Integralgleichungssystems (4.5) als Wert der Abbildung $F : X_F \rightarrow C_m[0, 1]$ an mit $X_F := \{x \in C_m[0, 1] \mid \|x - x_0\| < \varrho\}$ und verifizieren hierfür das Erfülltsein der Voraussetzungen von Satz 1. Dazu beachtet man, daß die Bedingung (\tilde{V} 2) im Hinblick auf das Banach-Lemma impliziert, daß das System linearer Integralgleichungen

$$c_0(t) + H(t) \{ [Dg(x_0(0)) - M] c_0(0) + [Dh(x_0(1)) - N] c_0(1) \} - \int_0^1 G(t, \tau) [D_2\varphi(\tau, x_0(\tau)) - A(\tau)] c_0(\tau) d\tau = -[F(x_0)](t) \quad t \in [0, 1]$$

in $C_m[0, 1]$ eindeutig lösbar ist und damit die Bedingung (V 1) von Satz 1 erfüllt ist mit $\beta := 1/(1 - \varkappa)$. Es ist $\|f_0^{-1}F_0\| \leq \|f_0^{-1}\| \|F_0\|$ (bzgl. der Bedeutung von f_0 und F_0 siehe den Anfang von Abschnitt 2). Die erste Bedingung in (\tilde{V} 3) besagt $\|F_0\| \leq \alpha$. Da dort $\zeta := \alpha\beta$ gesetzt wurde, ist mit (\tilde{V} 1) auch (V 2) von Satz 1 erfüllt. Unter Beachtung von

$$[F''(x_0)uv](t) = H(t) [D^2g(x_0(0))u(0)v(0) + D^2h(x_0(1))v(1)] - \int_0^1 G(t, \tau) D_2^2\varphi(\tau, x_0(\tau))u(\tau)v(\tau) d\tau; \quad u, v \in C_m[0, 1]; \quad t \in [0, 1]$$

sowie wegen der vorausgesetzten konstanten zweiten Ableitungen der Abbildungen g und h ($u, v, w \in C_m[0, 1]$)

$$[F'''(x)uvw](t) = - \int_0^1 G(t, \tau) D_2^3\varphi(\tau, x(\tau))u(\tau)v(\tau)w(\tau) d\tau \quad t \in [0, 1]$$

folgt (V 3) von Satz 1 aus (\tilde{V} 3).

Damit ist Satz 3 bewiesen. Der Zusatz ist klar.

Für die Anwendungen besonders wichtig ist der Fall einer gewöhnlichen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit inhomogenen linearen Randbedingungen erster Art

$$(4.6) \quad \ddot{x}(t) = \varphi(t, x(t)) \quad t \in [0, 1] \quad x(0) = a \quad x(1) = b,$$

wodurch z. B. Gleichungen vom Duffing- und Lienard-Typ und Temperaturverteilungsprobleme erfaßt werden. Hierfür formulieren wir Satz 3 sinngemäß unter etwas schwächeren Voraussetzungen.

Sei mit $x_0 \in C[0, 1]$ und einer positiven Zahl ζ

$$S := \{x \in C[0, 1] \mid |x(t) - x_0(t)| \leq \frac{1}{9}\zeta \quad \forall t \in [0, 1]\}$$

$$D := \{(t, u) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq t \leq 1; |u - x_0(t)| < \varrho\}, \quad \text{wobei } \varrho > \frac{1}{9}\zeta.$$

Dann gilt

Satz 4. Falls sich $x_0 \in C[0, 1]$ so finden läßt, daß

(\bar{V} 1) die stetige Funktion $\varphi : D \rightarrow \mathbb{R}$ stetige partielle Ableitungen bezüglich des zweiten Arguments bis zur dritten Ordnung einschließlich besitzt,

$$(\bar{V} 2) \int_0^1 |G(t, \tau) D_2 \varphi(\tau, x_0(\tau))| d\tau \leq \mu < 1 \quad \forall t \in [0, 1],$$

$$\text{wobei } G(t, \tau) := \begin{cases} -(1-t)\tau & 0 \leq \tau \leq t \leq 1, \\ -(1-\tau)t & 0 \leq t \leq \tau \leq 1, \end{cases}$$

$$(\bar{V} 3) |x_0(t) - a - (b-a)t - \int_0^1 G(t, \tau) \varphi(\tau, x_0(\tau)) d\tau| \leq \alpha \quad \forall t \in [0, 1],$$

$$\int_0^1 |G(t, \tau) D_2^2 \varphi(\tau, x_0(\tau))| d\tau \leq K_2 \quad \forall t \in [0, 1], \quad \beta K_2 \zeta \leq \frac{1}{3}, \quad \beta := 1/(1-\mu),$$

$$\zeta := \alpha\beta,$$

$$\int_0^1 |G(t, \tau) D_2^3 \varphi(\tau, x(\tau))| d\tau \leq K_3 \quad \forall t \in [0, 1] \wedge \forall x \in S, \quad \beta K_3 \zeta^2 \leq \frac{6}{37},$$

dann konvergiert die TV-Folge $\{x_n\}$, definiert durch (2.2) (mindestens) kubisch gegen die einzige Lösung des Randwertproblems (4.1) in dem $\frac{14}{9}\zeta$ -Streifen S um x_0 , und es gelten die Fehlerabschätzungen von Satz 1.

Der Beweis besteht darin, die Voraussetzungen von Satz 1 für die durch die linke Seite der bekanntlich zu (4.1) äquivalenten Integralgleichung

$$(4.7) \quad [F(x)](t) := x(t) - a - (b-a)t - \int_0^1 G(t, \tau) \varphi(\tau, x(\tau)) d\tau = 0 \quad t \in [0, 1]$$

gegebenen Abbildung $F : X_F \rightarrow C[0, 1]$ mit $X_F := \{x \in C[0, 1] \mid \|x - x_0\| < \varrho\}$ zu verifizieren. Da dies analog zum Beweis von Satz 3 geschieht, können wir hier auf die Darlegung von Einzelheiten verzichten.

Wir gehen nachfolgend kurz auf die Bedeutung von TV zur Lösung der Integralgleichung (4.7) bzw. des Randwertproblems (4.6) ein. TV zur Lösung von (4.7) lautet ($n \in \mathbb{N}_0$; $t \in [0, 1]$):

$$(4.8) \quad c_n(t) - \int_0^1 G(t, \tau) D_2 \varphi(\tau, x_n(\tau)) c_n(\tau) d\tau = p_n(t),$$

$$d_n(t) - \int_0^1 G(t, \tau) D_2 \varphi(\tau, x_n(\tau)) d_n(\tau) d\tau = q_n(t),$$

$$x_{n+1}(t) := x_n(t) + d_n(t)$$

wobei

$$p_n(t) := a + (b-a)t - x_n(t) + \int_0^1 G(t, \tau) \varphi(\tau, x_n(\tau)) d\tau,$$

$$q_n(t) := p_n(t) + \frac{1}{2} \int_0^1 G(t, \tau) D_2^2 \varphi(\tau, x_n(\tau)) c_n^2(\tau) d\tau.$$

Jeder Iterationsschritt besteht also darin, das Paar von linearen Fredholmschen Integralgleichungen zweiter Art (4.8) einmal zu lösen. Wesentlich für die numerische Auswertung ist dabei, daß beide Gleichungen denselben Kern enthalten; sie unterscheiden sich lediglich in den „rechten Seiten“. Andererseits läßt sich TV auch direkt auf die Randwertaufgabe (4.6) anwenden, wobei man statt des Integraloperators

(4.7) einen Differentialoperator zu betrachten hat. Bei Verwendung des Newton-Verfahrens statt TV ist dieses Verfahren in der Literatur bekannt [1], [3], [6] und wird oft als Quasilinearisation bezeichnet. Es läuft praktisch darauf hinaus, φ bezüglich der zweiten Variablen an der „Stelle“ x_n nach Taylor zu entwickeln und nur die ersten beiden Summanden der Reihe zu berücksichtigen. Ohne auf diesbezügliche Einzelheiten einzugehen, sei hier das Ergebnis der analogen Anwendung von TV auf (4.6) angegeben ($n \in \mathbb{N}_0$; $t \in [0, 1]$):

$$(4.9) \quad \begin{aligned} \ddot{c}_n(t) - D_2\varphi(t, x_n(t)) c_n(t) &= \varphi(t, x_n(t)) - \ddot{x}_n(t) \quad c_n(0) = a \quad c_n(1) = b \\ \ddot{d}_n(t) - D_2\varphi(t, x_n(t)) d_n(t) &= \varphi(t, x_n(t)) + \frac{1}{2} D_2^2\varphi(t, x_n(t)) c_n^2(t), \\ d_n(0) &= a \quad d_n(1) = b, \\ x_{n+1}(t) &:= x_n(t) + d_n(t). \end{aligned}$$

Bei jedem Iterationsschritt ist hiernach zunächst ein lineares Randwertproblem für c_n und anschließend ein solches für d_n zu lösen, wobei die beiden Differentialgleichungen dadurch ausgezeichnet sind, daß sie sich – analog zu (4.8) lediglich in den „rechten Seiten“ unterscheiden.

Es läßt sich zeigen, daß die durch (4.8) erzeugte Folge $\{x_n\}$ bei gleichem Ausgangselement x_0 mit der durch (4.9) erzeugten identisch ist. (Antosiewicz [1] hat dies für die Newton-Folge gezeigt.)

Beispiel. Die stationäre Temperaturverteilung in einem homogenen Stab der Länge l wird durch das nichtlineare Randwertproblem

$$(4.10) \quad \ddot{x}(t) = \lambda\varphi(x(t)) \quad x(0) = x_0 \quad x(1) = x_1 \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$

beschrieben [6], [13]. Dabei ist φ eine gegebene Funktion der Über- bzw. Untertemperatur $x(t)$, t die Koordinate in der Stabachse und λ eine gegebene Konstante. Wir beschränken uns auf den wichtigen Sonderfall $\varphi(x(t)) := \exp[x(t)]$ und normieren oBdA die Randbedingungen auf $x(0) = x(1) = 0$.

Dann gilt

Satz 5. Sei $\lambda \in \mathbb{R}$ und $0 < \lambda \leq \lambda^*$, wobei $\lambda^* \doteq 1,213$ die einzige positive Wurzel der Gleichung

$$\frac{37}{6} \left(\frac{\lambda}{4 - \lambda} \right)^3 \exp \left[\frac{14}{9} \cdot \frac{\lambda}{4 - \lambda} \right] = 1$$

ist. Dann konvergiert TV mit $x_0(t) := 0 \quad \forall t \in [0, 1]$ (mindestens) kubisch gegen die einzige Lösung $x^* \in C[0, 1]$ des Randwertproblems

$$(4.11) \quad \ddot{x}(t) = \lambda e^{x(t)} \quad x(0) = x(1) = 0$$

in

$$S := \left\{ x \in C[0, 1] \mid |x(t)| \leq \frac{7}{18} \cdot \frac{\lambda}{1 - \lambda/4} \right\},$$

und es gilt die Fehlerabschätzung

$$(4.12) \quad |x^*(t) - x_n(t)| < \frac{14}{9} \beta_n (M_3 + \frac{12}{5} \beta_n \mu_{n-1}^2) \sup_{t \in [0,1]} |x_n(t) - x_{n-1}(t)|^3 \quad \forall t \in [0, 1],$$

wobei

$$M_3 := \frac{\lambda}{24} \cdot \exp \left[\frac{7}{18} \cdot \frac{\lambda}{1 - \lambda/4} \right]$$

ist und die positiven reellen Zahlen β_n, μ_n durch die Rekursionsformeln (2.4b), (2.4c) mit $\beta_0 := (1 - \lambda/4)^{-1}$, $\mu_0 := \lambda/8$ zu berechnen sind. Speziell gilt im Falle $\lambda := 1$

$$(4.12') \quad 1,333 \cdot 10^{-5} < |x^*(t) - x_1(t)| \leq 19,26 \cdot 10^{-5} \quad \forall t \in [0, 1].$$

Bemerkungen. 1. Das Randwertproblem (4.10) ist von Bosarge und Falb [4] iterativ nach einem Mehrpunktverfahren dritter Ordnung behandelt worden. Dabei wird jedoch für λ nur ein wesentlich kleinerer Bereich erfaßt als im vorliegenden Satz, und zwar $0 < \lambda \leq 0,9$.

2. Auch bei Anwendung des in der Einleitung erwähnten Satzes 1 von I, bei dem die zweite Ableitung über die ganze Kugel S abgeschätzt werden muß, ergibt sich ein kleinerer möglicher Variationsbereich des Parameters λ .

3. Die Wahl der Ausgangsnäherung $x_0(t) = 0 \quad \forall t \in [0, 1]$ wird durch die Randbedingungen nahegelegt.

4. Die in Satz 5 genannte Fehlerschranke entspricht der Schranke (2.4a). Stattdessen kann unter denselben Voraussetzungen auch die hinsichtlich ihrer Berechnung aufwendigere, jedoch etwas schärfere Schranke (2.5a) verwendet werden.

Den Beweis von Satz 5 führen wir, indem wir die Voraussetzungen von Satz 4 verifizieren. Man kommt im vorliegenden Fall aber auch durch Anwendung von Satz 3 zum Ziel, wenn man eine passend gewichtete Supremumsnorm wählt. Die Aussagen des Satzes werden allerdings dann nur bezüglich der Menge $S \cap \{x \in C[0, 1] \mid |\dot{x}(t)| \leq \frac{14}{9}\zeta, t \in [0, 1]\}$ erhalten. Dabei ist $A(t)$ als die Koeffizientenmatrix jenes Systems zu nehmen, das aus dem linearen Problem $\ddot{x}(t) = 0, t \in [0, 1], x(0) = a, x(1) = b$ hervorgeht.

Für die Randwertaufgabe (4.10) ist D lediglich der durch die q -Bedingung gegebene Teil von \mathbb{R}^2 . Die Aussagen des Satzes bleiben unter dieser rein formalen Änderung in den Voraussetzungen ($\bar{\nabla} 1$)–($\bar{\nabla} 3$) erhalten. Im vorliegenden Beispiel kann für q eine beliebige, hinreichend große positive Zahl genommen werden. ($\bar{\nabla} 1$) ist also klar. Durch Abschätzung erhält man $\mu = \lambda/4 \leq \lambda^*/4 < 1$, womit ($\bar{\nabla} 2$) erfüllt ist. Ferner

$$\alpha := K_2 := \frac{\lambda}{4} \Rightarrow \text{„Kugelradius“} \quad \frac{14}{9} \zeta = \frac{7}{18} \cdot \frac{\lambda}{1 - \lambda/4}; \quad \beta = \frac{1}{1 - \mu},$$

$$\int_0^1 \lambda G(t, \tau) e^{x(\tau)} d\tau \leq \lambda \exp \left[\frac{7}{18} \cdot \frac{\lambda}{1 - \lambda/4} \right] \cdot \sup_{0 \leq \tau \leq 1} \int_0^1 G(t, \tau) d\tau =$$

$$= \frac{\lambda}{4} \cdot \exp \left[\frac{14}{9} \cdot \frac{\lambda}{4 - \lambda} \right] =: K_3,$$

$$\beta K_2 \zeta = \left(\frac{\lambda}{4 - \lambda} \right)^2 \quad \text{und} \quad \beta K_3 \zeta^2 = \left(\frac{\lambda}{4 - \lambda} \right)^3 \exp \left[\frac{14}{9} \cdot \frac{\lambda}{4 - \lambda} \right] := h(\lambda).$$

Die Funktion $\lambda \mapsto (\lambda/(4 - \lambda))^2$ steigt für $0 < \lambda < 4$ monoton. Demnach ist unter Berücksichtigung der Voraussetzung $0 < \lambda \leq \lambda^* \doteq 1,213$:

$$\left(\frac{\lambda}{4 - \lambda} \right)^2 \leq \left(\frac{\lambda^*}{4 - \lambda^*} \right)^2 < \left(\frac{1,3}{4 - 1,3} \right)^2 < \frac{1}{3}.$$

Wegen $h'(\lambda) > 0$ für $0 < \lambda < 4$ ist die surjektive und stetige Funktion $h : (0,4) \rightarrow \mathbb{R}_+$ streng monoton steigend und damit bijektiv. Also hat die Gleichung $h(\lambda) = 6/37$ im Intervall $(0,4)$ genau eine Lösung λ^* , die sich – z. B. nach dem Banachschen Fixpunktsatz über die Iteration $\lambda_{n+1} := \frac{37}{6} \lambda_n v_n^3 \exp \left[\frac{14}{9} v_n \right]$, $v_n := \lambda_n / (4 - \lambda_n)$ – ergibt zu $\lambda^* \doteq 1,21286\ 59227$. Damit ist auch die Voraussetzung ($\sqrt{3}$) von Satz 3 verifiziert.

Im Hinblick auf Bemerkung 4 ist die Fehlerschranke für den Sonderfall $\lambda = 1$ – der, wie gesagt, von Bosarge und Falb [4] nicht erfaßt wird – gemäß (2.5a) berechnet worden. Die numerische Rechnung ergibt

$$\beta_1 \doteq 1,4004; \quad \mu_0 = M_2 = \frac{1}{8}; \quad M_3 \doteq 0,049755,$$

$$\zeta \doteq 0,113182; \quad \|d_0\| \doteq 0,113717; \quad \|d_0 - c_0\| \doteq 0,0005359,$$

$$\zeta_1 \doteq 1,33313 \cdot 10^{-5}; \quad \eta_1 \doteq 6,31 \cdot 10^{-5}$$

und damit

$$1,333 \cdot 10^{-5} < \|x^* - x_1\| \leq$$

$$\leq \frac{14}{9} \beta_1 \{M_3 \|d_0\|^3 + \mu_0 \|d_0 - c_0\| (\|d_0\| + \zeta_0)\} \doteq 19,26 \cdot 10^{-5}.$$

Damit ist Satz 5 bewiesen.

Es sei angemerkt, daß die Schranke (4.12) geringfügig höher liegt; hiernach ist $\|x^* - x_1\| < 0,00032\ 77$ gegenüber dem wirklichen Fehler von $\|x^* - x_1\| \doteq 0,00001\ 33314$. Die TV-Folge $\{x_n\}$ wurde entsprechend (4.8) berechnet nach ($n \in \mathbb{N}_0$; $t \in [0, 1]$):

$$(4.13) \quad \ddot{c}_n(t) - e^{x_n(t)} c_n(t) = e^{x_n(t)} - \ddot{x}_n(t); \quad c_n(0) = c_n(1) = 0,$$

$$\ddot{d}_n(t) - e^{x_n(t)} d_n(t) = e^{x_n(t)} - \ddot{x}_n(t) + \frac{1}{2} e^{x_n(t)} c_n^2(t); \quad d_n(0) = d_n(1) = 0$$

$$x_{n+1}(t) := x_n(t) + d_n(t),$$

wobei zur numerischen Lösung dieser linearen Differentialgleichungen das Runge-Kutta-Verfahren herangezogen worden ist. Die Lösung des vorliegenden Rand-

wertproblems (4.11) ist in [4] für $\lambda = 0,2(0,2) 2$ und $t = 0(0,1) 1$ auf 7 Dezimalen nach dem Komma genau tabelliert.

5. INTEGRALGLEICHUNGEN

Für nichtlineare Integralgleichungen, etwa vom Hammerstein-Typ,

$$(5.1) \quad x(t) + \int_0^1 K(t, \tau) \varphi(\tau, x(\tau)) \, d\tau = g(t) \quad t \in [0, 1]$$

– $oBdA$ wurde als Integrationsintervall $[0, 1]$ genommen – gilt offenbar der

Satz 6. *Es seien die Voraussetzungen von Satz 4 erfüllt, wobei in $(\bar{V} 2)$ und $(\bar{V} 3)$ die Greensche Funktion $G : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ durch den Kern $K : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ von Gleichung (5.1) und in $(\bar{V} 3)$ die Funktion $t \mapsto a + (b - a)t$ durch die Funktion $t \mapsto g(t)$ ersetzt werde. Dann hat die nichtlineare Integralgleichung (5.1) in S (s. vor Satz 4) genau eine (auf $[0, 1]$ stetige) Lösung x^* , die durch die (mindestens) kubisch konvergente TV-Folge $\{x_n\}$ bestimmt werden kann.*

Wir untersuchen zwei konkrete Gleichungen vom Hammerstein-Typ.

Beispiel 1.

$$(5.2) \quad x(t) - \lambda \int_0^1 e^{t\tau} \cos x(\tau) \, d\tau = 4t^4 - 8t^3 + 5t^2 - t + 1 =: g(t) \quad t \in [0, 1].$$

Zur Wahl einer geeigneten Ausgangsnäherung beachten wir, daß sich wegen der alternierenden Vorzeichen auf der rechten Seite die ersten und die nächsten beiden Glieder in $[0, 1]$ teilweise aufheben, so daß die Festlegung $x_0(t) := 1 \, \forall t \in [0, 1]$ sinnvoll erscheint. Damit gilt

Satz 7. *Sei $\lambda \in \mathbb{R}$ und $0 < \lambda \leq \lambda^*$, wobei $\lambda^* \doteq 0,283$ die einzige positive Wurzel der Gleichung*

$$\frac{\lambda(e-1)}{1-\lambda(e-1)\sin 1} \left[\frac{\lambda(e-1)\cos 1}{1-\lambda(e-1)\sin 1} \right]^2 = \frac{6}{37}$$

ist. Ferner sei $x_0(t) := 1 \, \forall t \in [0, 1]$. Dann gibt es unter den Funktionen $x \in C[0, 1]$ mit $|x(t) - 1| \leq \frac{14}{9}\lambda(e-1)\cos 1/[1-\lambda(e-1)\sin 1]$ eine stetige, x^ , die die Integralgleichung (5.2) löst und gegen die die TV-Folge $\{x_n\}$ (mindestens) kubisch konvergiert mit der Fehlerabschätzung (4.12), wobei jedoch $\beta := 1/[1-\lambda(e-1)\sin 1]$, $\mu_0 := (\lambda/2)(e-1)\cos 1$ und $M_3 := (\lambda/6)(e-1)$ ist.*

Beweis. Wir verifizieren die Voraussetzungen von Satz 6. Es ist

$$\lambda \int_0^1 e^{t\tau} |\sin x_0(\tau)| \, d\tau = \lambda(e-1)\sin 1 =: \mu < 1 \quad \forall t \in [0, 1] \wedge \forall \lambda \in (0, \lambda^*),$$

$$\lambda \int_0^1 e^{t\tau} |\cos x_0(\tau)| d\tau = \lambda(e-1) \cos 1 =: K_2; \quad \lambda \int_0^1 e^{t\tau} |\sin x(\tau)| d\tau \leq \lambda(e-1) =: K_3,$$

$$\left| x_0(t) - g(t) - \lambda \int_0^1 e^{t\tau} \cos x_0(\tau) d\tau \right| = \left| g(t) - 1 + \lambda(\cos 1) \frac{e^t - 1}{t} \right| \leq$$

$$\leq \lambda(e-1) \cos 1 =: \alpha \quad \forall t \in [0, 1].$$

Die letzte Abschätzung ergibt sich so. Man kann zeigen, daß $g(t) \leq 1 \quad \forall t \in [0, 1]$ gilt. Da ferner $t \mapsto \lambda(\cos 1)(e^t - 1)/t$ für jedes feste $\lambda \in (0, \lambda^*)$ auf $(0, 1]$ eine stetige, streng monoton wachsende Funktion und $t = 1$ eine Nullstelle von g ist, ergibt sich die Behauptung. Weiter ist mit $\zeta := \alpha\beta$

$$\beta K_3 \zeta^2 = \frac{\lambda(e-1)}{1 - \lambda(e-1) \sin 1} \left[\frac{\lambda(e-1) \cos 1}{1 - \lambda(e-1) \sin 1} \right]^2 =: \Lambda(\lambda).$$

Offenbar ist die surjektive und stetige Funktion $\Lambda: (0, \lambda^{**}) \rightarrow \mathbb{R}_+$ mit $\lambda^{**} := 1/[(e-1) \sin 1] \doteq 0,692$ monoton steigend und damit bijektiv. Also hat die Gleichung $\Lambda(\lambda) = 6/37$ auf dem Intervall $(0, \lambda^{**})$ genau eine Lösung λ^* , die sich berechnet zu $\lambda^* \doteq 0,283$. Die restlichen Voraussetzungen sind ebenfalls erfüllt. Damit ist Satz 7 bewiesen.

Anknüpfend an Bemerkung 2 zu Satz 5 sei erwähnt, daß die Voraussetzungen von Satz 1 auch im vorliegenden Beispiel schwächer sind als bei Anwendung von Satz 1 aus I.

Im Zusammenhang mit der Frage, ob die Gleichung (5.2) auch für $\lambda > \lambda^*$ eine eindeutige Lösung besitzt, wird man auf die sicher für den relativ kleinen λ -Bereich, für den die Aussagen von Satz 7 gemacht worden sind, mitverantwortliche Tatsache geführt, daß die Norm von $f_0^{-1}F_0$ aufgespalten worden ist: Im Beweis von Satz 4 bzw. Satz 1 wurde die Ungleichung $\|f_0^{-1}F_0\| \leq \|f_0^{-1}\| \|F_0\|$ benutzt. Man könnte dies vermeiden, indem man die Newtonkorrektur $f_0^{-1}F_0 = -c_0$ berechnet, d. h. die lineare Integralgleichung ($t \in [0, 1]$):

$$c_0(t) + \lambda \sin 1 \int_0^1 e^{t\tau} c_0(\tau) d\tau = 4t^4 - 8t^3 + 5t^2 - t + \frac{e^t - 1}{2t} \cos 1$$

löst. Die analytische Lösung über die Neumannsche Reihe führt bei der Berechnung der iterierten Kerne auf Exponentialintegrale. Die numerische Lösung von (5.3) gestattet nur Aussagen für spezielle Zahlenwerte von λ . Auf diese Weise zeigen wir, daß die Gleichung (5.2) auch noch für $\lambda = \frac{1}{2}$ eindeutig iterativ lösbar ist. Es wird vermutet, daß aufgrund analoger Überlegungen die Aussagen von Satz 7 für $0 < \lambda < \lambda^{**}$ gesichert werden können. Darauf soll hier jedoch nicht weiter eingegangen werden.

Für $\lambda := \frac{1}{2}$ ergibt die numerische Rechnung $\beta \doteq 1,4505$, $\zeta = \zeta_0 \doteq 0,3068$, ferner $\|F''(x_0)\| = \frac{1}{2} \cos 1(e-1) \doteq 0,4642 =: K_2$ und $K_3 := \frac{1}{2}(e-1) \doteq 0,8592$. Damit

$$\beta K_2 \zeta \doteq 0,2066 < \frac{1}{3}; \quad \beta K_3 \zeta^2 \doteq 0,1174 < 0,1621 = \frac{6}{37}.$$

Daraus folgen die Aussagen von Satz 1 für den aus $C[0, 1]$ in $C[0, 1]$ abbildenden, durch

$$[F(x)](t) := x(t) - \frac{1}{2} \int_0^1 e^{t\tau} \cos x(\tau) d\tau - g(t) \quad \forall t \in [0, 1]$$

gegebenen Integraloperator. Auch in diesem Falle wird bei Abschätzung von $|\cos x(t)|$ durch 1 die Norm $\|F''(x)\| \leq \frac{1}{2}(e - 1) =: K_2$, $\beta K_2 \zeta = 0,382 > \frac{1}{3}$, so daß Satz 1 von I nicht anwendbar ist.

Als Schranke für den Fehler des Elements x_2 der TV-Folge $\{x_n\}$ ergibt sich

$$\begin{aligned} 6,77 \cdot 10^{-11} < \|x^* - x_2\| &\leq \\ &\leq \frac{14}{9} \beta_2 \{M_3 \|d_1\|^3 + \mu_1 \|d_1 - c_1\| (\|d_1\| + \|c_1\|)\} \leq 61,33 \cdot 10^{-11} \end{aligned}$$

gegenüber dem wirklichen Fehler $\|x^* - x_2\| \doteq 6,773 \cdot 10^{-11}$.

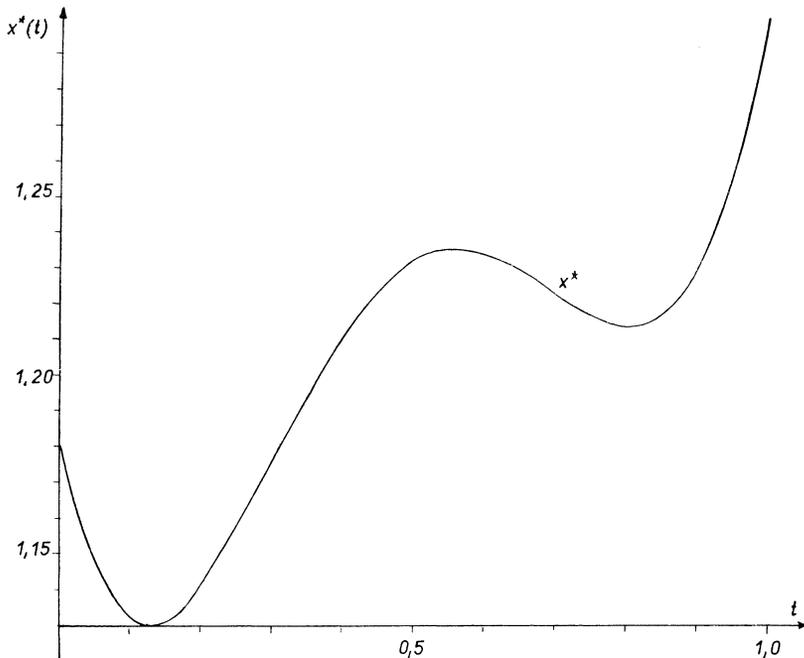


Abb. 1. Graph der Lösung $x^*: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ der Integralgleichung (5.2) für $\lambda = \frac{1}{2}$.

In Abb. 1 ist der Graph der Lösungsfunktion $x^*: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dargestellt. In Tab. 2 ist die Lösung x^* für $t = 0(0,05) 1$ tabelliert.

Tab. 2. Lösung der Integralgleichung Bspl. 1.

t	$x^*(t)$	t	$x^*(t)$
0	1,18045 89674	0,50	1,23115 17829
0,05	1,14633 18887	0,55	1,23474 60030
0,10	1,13169 94116	0,60	1,23390 08326
0,15	1,13146 70142	0,65	1,22952 44504
0,20	1,14114 03969	0,70	1,22321 53724
0,25	1,15682 54922	0,75	1,21681 24664
0,30	1,17522 84737	0,80	1,21329 49670
0,35	1,19365 57673	0,85	1,21588 24916
0,40	1,21001 40612	0,90	1,22848 50566
0,45	1,22281 03173	0,95	1,25561 30946
0,50	1,23115 17829	1,00	1,30237 74725

Beispiel 2. Wille [21] hat mit Hilfe eines Satzes über konvexe Operatoren in halbgeordneten Räumen die Existenz und Eindeutigkeit einer L_2 -Lösung x^* der Integralgleichung ($t \in [0, 1]$):

(5.4)

$$[F(x)](t) := x(t) + \int_0^1 \left\{ \left[1 + \frac{1}{6} \cos^2(t + \tau) \right] x^2(t) + \left(3 + \frac{t + \tau}{12} \right) x(\tau) \right\} d\tau + 1 = 0$$

mit $\|x^*\|_{L_2} \leq 1$ sowie die Konvergenz des Newton-Verfahrens hierfür bewiesen. Wir zeigen, daß diese Lösung stetig ist und grenzen sie mit Hilfe einer Fehlerabschätzung scharf ein.

Während bei den vorangehenden Beispielen Satz 1 mit der schwachen Bedingung an die zweite Ableitung dem „Standardsatz“ (Satz 1) über TV in I überlegen war, ist dies im vorliegenden Beispiel nicht der Fall. Denn die zweite Ableitung ist konstant und somit kann durch Abschätzung von $F''(x)$ lediglich an der Ausgangsnäherung nichts gewonnen werden.

Die Wahl einer geeigneten Startfunktion für ein Iterationsverfahren ist im allgemeinen schwierig. Bei Integralgleichungen kann man jedoch oft durch grobe Näherungsbetrachtung zum Erfolg kommen, zumal die Bedingungen (V 3) von Satz 1 relativ schwach sind. Der Gleichung (5.4) sieht man unmittelbar an, daß die Lösung negativ sein muß. Nun denke man sich zunächst das Verfahren der sukzessiven Approximation angewandt. Der Bau der Gleichung legt die Startfunktion 0 nahe. In (5.4) eingesetzt liefert dies als nächste Näherung $x_1(t) = -1$. Einsetzen ergibt mit grober Rechnung $x(t) \approx +1$, also einen Ergebniswert, der wesentlich weiter vom eingesetzten Wert entfernt liegt als dies bei Einsetzen von 0 der Fall war. Also wird die Lösung wesentlich näher an 0 als an -1 liegen, weswegen wir $x_0(t) := -\frac{1}{3}$ wählen. Die numerische Rechnung liefert $\beta \doteq 1,738$; $K_2 = \frac{7}{3}$; $\zeta \doteq 0,076709 \Rightarrow \Rightarrow \beta K_2 \zeta \doteq 0,311081 < \frac{1}{3}$.

Damit liegt die eindeutige Lösung x^* in

$$S := \{x \in C[0, 1] \mid |x(t) + \frac{1}{3}| \leq 0,1194 \quad \forall t \in [0, 1]\}.$$

Als Fehlerabschätzung von x_2 der TV-Folge $\{x_n\}$ ergibt sich unter Berücksichtigung, daß im vorliegenden Falle der Faktor $14/9$ in der Schranke ersetzt werden kann durch $(7/3)/[1 + \sqrt{(1 - 2\eta_n)}]$ (vgl. [9]):

$$\begin{aligned} 0,21 \cdot 10^{-13} < \|x^* - x_2\| &\leq \frac{7/3}{1 + \sqrt{(1 - 2\eta_n)}} \cdot \beta_2 M_2 \|d_1 - c_1\| (\|\alpha_1\| + \|c_1\|) \leq \\ &\leq 2,77 \cdot 10^{-13} \end{aligned}$$

gegenüber dem wirklichen Fehler von $\|x^* - x_2\| \doteq 0,211 \cdot 10^{-13}$.

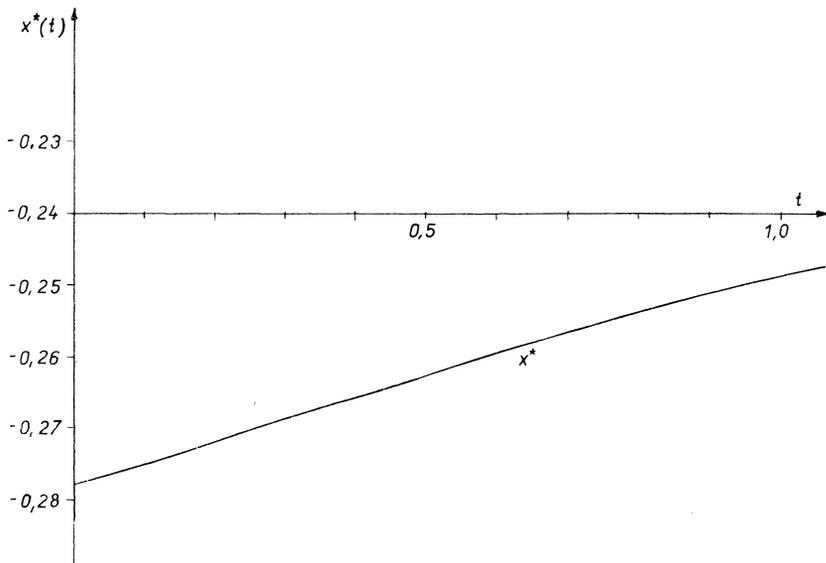


Abb. 2. Graph der Lösung $x^* : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ der Integralgleichung (5.4).

In Abb. 2 ist der Graph der Lösungsfunktion $x^* : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dargestellt. In Tab. 3 ist die Lösung für $t = 1(0, 1)$ tabelliert. Die linearen Integralgleichungen bei den Beispielen 1 und 2 sind durch Diskretisierung mit einer Gauß-Quadraturformel (32 Stützstellen) in ein lineares Gleichungssystem übergeführt worden, wobei diese Formel am Schluß auch zur Interpolation verwendet wurde. Das Gleichungssystem wurde durch LU-Zerlegung (Gaußscher Algorithmus) mit Nachiteration gelöst.

Tab. 3. Lösung der Integralgleichung Bspl. 2.

t	$x^*(t)$
0	—0,27822 17196
0,1	—0,27518 54306
0,2	—0,27207 16937
0,3	—0,26891 72917
0,4	—0,26576 06285
0,5	—0,26264 01983
0,6	—0,25959 30505
0,7	—0,25665 33133
0,8	—0,25385 08326
0,9	—0,25120 99824
1,0	—0,24874 86928

6. VERGLEICH VERSCHIEDENER ITERATIONSVERFAHREN ZUR LÖSUNG DER BETRACHTETEN RANDWERTPROBLEME UND INTEGRALGLEICHUNGEN. DISKUSSION DER NUMERISCHEN ERGEBNISSE

Wir motivieren im folgenden die Anwendung des Tschebyscheff-Verfahrens zur iterativen Lösung der betrachteten Randwertprobleme und Integralgleichungen, indem wir verschiedene Iterationsverfahren hinsichtlich ihres numerischen Aufwandes miteinander vergleichen und anhand eines praktikablen Kriteriums festlegen, welchem der Verfahren im Einzelfalle der Vorzug zu geben ist. Dazu wird u. a. die neue Schranke aus Abschnitt 3 herangezogen.

Neben dem Newton-Verfahren haben sich unter den Iterationsverfahren das Tschebyscheff-Verfahren und ein Mehrpunkt-Verfahren (dritter Ordnung) als nützlich erwiesen. Diese drei Verfahren erfordern u. a. die Berechnung der ersten Ableitung. Steht diese nicht zur Verfügung oder läßt sie sich nur unter großem Aufwand ermitteln, so ist z. B. das Steffensen-Verfahren zu nennen, das eine Kombination der (nicht-primitiven) Regula falsi und des Verfahrens der sukzessiven Approximation darstellt und das normalerweise quadratisch konvergiert, sowie andere ableitungsfreie Verfahren zweiter und drüter bzw. auch nichtganzzahliger Ordnung (s. z. B. [7], [16]–[19]). Da bei den vorliegenden Aufgaben die Ableitung leicht zu mitteln ist, beschränken wir uns hier auf die ersten drei der oben genannten Verfahren, die nachfolgend in der Form analog zu (2.2) zusammengestellt sind. Es sei hier lediglich am Rande bemerkt, daß an den bekannten Sätzen über mit einem oder mehreren Steigungsoperatoren arbeitenden ableitungsfreien Verfahren nachteilig ist, daß in deren Voraussetzungen auch die Ableitung auftritt und diese – nicht zuletzt aus diesem Grunde – teilweise wesentlich schärfer sind als jene der entsprechenden ableitungsbehafteten Verfahren. Deshalb wird man, sofern man im Zu-

sammenhang mit der iterativen Lösung eines konkreten praktischen Problems wirklich fundierte Aussagen wünscht, nach Möglichkeit auf die ableitungsbehafteten Verfahren zurückgreifen.

$$\text{NV: } \begin{cases} F_n + F'_n c_n = \Theta \Rightarrow c_n \\ x_{n+1} := x_n + c_n; \quad n = 0, 1, 2, \dots; \quad x_0 \text{ geeignet zu wählen} \end{cases}$$

$$\text{TV: } \begin{cases} F_n + F'_n c_n = \Theta \Rightarrow c_n \\ F_n + F'_n d_n + \frac{1}{2} F''_n c_n^{(2)} = \Theta \Rightarrow d_n \\ x_{n+1} := x_n + d_n; \quad n = 0, 1, 2, \dots; \quad x_0 \text{ geeignet zu wählen} \end{cases}$$

$$\text{MPV: } \begin{cases} F_n + F'_n c_n = \Theta \Rightarrow c_n \\ F(x_n + c_n) + F'_n d_n = \Theta \Rightarrow d_n \\ x_{n+1} := x_n + c_n + d_n; \quad n = 0, 1, 2, \dots; \quad x_0 \text{ geeignet zu wählen} \end{cases}$$

Wir führen den Aufwandsvergleich zunächst für die Randwertprobleme der Gestalt (4.6) bzw. (4.11) durch. Dazu ist es zweckmäßig, die Integral-Folge zu (4.11) explizit zu notieren. Für $n \in \mathbb{N}_0$ und $t \in [0, 1]$ gilt

$$(6.1) \quad \begin{aligned} c_n(t) - \int_0^1 G(t, \tau) e^{x_n(\tau)} c_n(\tau) d\tau &= p_n(t) \\ d_n(t) - \int_0^1 G(t, \tau) e^{x_n(\tau)} d_n(\tau) d\tau &= q_n(t). \end{aligned}$$

Mit $[T(x) z](t) := - \int_0^1 G(t, \tau) e^{x(\tau)} z(\tau) d\tau$ ergeben sich p_n , q_n und x_{n+1} nach Tab. 4

Tab. 4. Zur iterativen Lösung von $\ddot{x}(t) = e^{x(t)}$, $x(0) = x(1) = 0$.

Verfahren	Ordnung	$-p_n :=$	$-q_n :=$	$x_{n+1} :=$
NV	2	$x_n + T(x_n) e$	—	$x_n + c_n$
TV	3	$x_n + T(x_n) e$	$x_n + T(x_n) (e + \frac{1}{2} c_n^2)$	$x_n + d_n$
MPV	3	$x_n + T(x_n) e$	$x_n + c_n + T(x_n + c_n) e$	$x_n + c_n + d_n$

Die Funktion e in Tab. 4 ist so definiert: $e : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $e(t) := t \quad \forall t \in [0, 1]$. In der Regel werden die Integrale in (6.1) durch eine Quadraturformel ersetzt. Dann sind zwei inhomogene Systeme linearer Gleichungen zu lösen, die die gleiche Koeffizientenmatrix besitzen. Hieran sieht man, daß der Mehraufwand der Verfahren dritter Ordnung gegenüber NV lediglich darin besteht, daß eine neuer rechte Seite genommen werden muß, was – etwa beim Gaußschen Algorithmus – wesentlich weniger Aufwand erfordert als die gesamte Neuberechnung der Unbekannten. An

den Formeln (6.1) und Tab. 4 sieht man, daß hier TV günstiger ist als MPV, da für MPV – im Gegensatz zu TV – zusätzlich $\exp [x_n(t) + c_n(t)]$ an den Stützstellen der verwendeten Quadraturformel berechnet werden muß. Allgemein gilt für Randwertprobleme der Gestalt (4.6): Je nachdem, ob die Berechnung von q_n bei TV oder bei MPV weniger Rechenaufwand erfordert, ist TV bzw. MPV vorzuziehen. Dies trifft auf TV zu, sofern die zweite Ableitung der Nichtlinearität des Randwertproblems eine einfache Gestalt besitzt [vgl. (4.8)], da die Berechnung von q_n dann bei TV – wie im obigen Beispiel – keinen nennenswerten zusätzlichen Aufwand zu der von p_n erfordert. Dagegen muß bei MPV die nicht-lineare Funktion im Integranden des Integraloperators T an den Stützstellen der Quadraturformel bei jedem Iterationsschritt einmal mehr ausgewertet werden als bei TV. Die vorstehenden Überlegungen gelten auch für Hammersteinsche Integralgleichungen der Gestalt (5.1) und sinngemäß für solche von allgemeinerer Form wie auch von allgemeineren Randwertproblemen als (4.6).

Die Erfahrungen mit den durchgeführten Rechnungen hat ergeben, daß, wenn man von der mit den Verfahren dritter Ordnung erzielten Genauigkeit ausgeht, die Verwendung der Verfahren dritter Ordnung eine Rechenzeiterparnis von etwa 20% gegenüber NV bewirkt. Diese Erfahrung ergänzt Ergebnisse von Ehrmann [10] sowie Schmidt und Leder [18] bezüglich der aufwandsmäßig günstigen Ordnung einer bestimmten Klasse von Iterationsverfahren. Die letzteren Autoren haben gefunden, daß zur iterativen Matrixinvertierung ein verallgemeinertes Schulz-Verfahren dritter Ordnung optimal ist. Ehrmann hat gezeigt, daß unter gewissen vereinfachenden Annahmen für algebraische Gleichungen vom Grade 5 an das Tschebyscheff-Verfahren günstiger ist als das Newton-Verfahren, Für die Grade 3 und 4 ist es umgekehrt. Es sei bemerkt, daß die Rechenzeiterparnis von etwa 20% natürlich in der bekannten Tatsache, wonach hinsichtlich der Konvergenzgeschwindigkeit 2 Schritte eines Verfahrens dritter Ordnung ungefähr 3 NV-Schritten entsprechen, nicht enthalten ist, da die Ersparnis von der Art und Weise herrührt, wie die entstehenden linearen Gleichungen gelöst werden. Die Erfahrung mit der etwa 20%-igen Rechenzeiterparnis gilt auch für die Quasilinearisation (4.9) und (4.13), da die homogenen Teile beider Differentialgleichungen übereinstimmen.

Bei dem angestellten Aufwandsvergleich zwischen NV, TV und MPV ist implizit angenommen worden, daß die Konvergenzgeschwindigkeit von TV und MPV gleich sind, d. h. daß vom selben Startwert x_0 ausgehend die TV- und die MPV-Folge $\{x_n\}$ identisch sind. Tatsächlich weichen beide Folgen mehr oder weniger voneinander ab. Denn die Aussage, daß zwei Iterationsverfahren – unter gewissen Voraussetzungen – von derselben Ordnung konvergieren, besagt nur, daß die Exponenten in den die Konvergenzordnung für das betreffende Verfahren repräsentierenden Ungleichungen gleich sind [vgl. (2.14)]. Dagegen können die zugehörigen Vorfaktoren durchaus nun mehrere Zehnerpotenzen voneinander abweichen. Sinngemäß das gleiche gilt für die schon erwähnte angenäherte Gleichwertigkeit von 3 NV-Schritten mit 2 Schritten eines Verfahrens dritter Ordnung. Deshalb sind

für ein Kriterium zur apriori-Entscheidung, welches der zur Konkurrenz zugelassenen Verfahren – hier NV, TV und MPV – das günstigste ist, ergänzend zu den vorstehenden Aufwandsbetrachtungen nähere Informationen über die Konvergenzgeschwindigkeit der Verfahren erforderlich. Dafür verwenden wir scharfe apriori-Schranken, und zwar für TV die in Abschnitt 3 angegebene Schranke, für NV eine Schranke von Gragg und Tapia [12] sowie für MPV eine Schranke von Mörbel [14], [15].

Folgendes Kriterium hat sich für die praktische Anwendung auf Hammersteinsche Integralgleichungen und Zweipunkt-Randwertprobleme der Gestalt (4.6) in gleicher Weise als brauchbar erwiesen:

1. Man stelle apriori fest, ob die Berechnung von $q_n(t)$ in (4.8) bei TV oder bei MPV aufwendiger ist.
2. Man prüfe, ob die o. g. apriori-Schranken für die gleiche Startnäherung x_0 bei NV für $n = 3$ und bei TV sowie MPV für $n = 2$ in der gleichen Größenordnung liegen.
3. a) Wird 2. positiv beantwortet oder ist die NV-Schranke extrem viel schlechter als die anderen beiden Schranken, so ist das unter 1. als weniger q_n -aufwendige Verfahren zu verwenden.
 b) Ist die TV-Schranke für $n = 2$ extrem viel schlechter als die MPV-Schranke für $n = 2$, so wird MPV gewählt und umgekehrt.
 c) Ist die NV-Schranke nach 2. extrem viel besser als die anderen beiden Schranken, so wird NV gewählt.

Unter „extrem viel“ sind etwa 4–5 Zehnerpotenzen zu verstehen. Eine fest vorgeschriebene Genauigkeit der Lösung kann noch zusätzliche Gesichtspunkte für die Wahl des günstigsten Verfahrens notwendig machen.

Wir demonstrieren die Anwendung des vorstehenden Kriteriums für die beiden in Abschnitt 5 betrachteten Integralgleichungen. Bei der ersten Gleichung ist $\varphi(t, x(t)) := \cos x(t) = -D_2^2 \varphi(t, x(t))$, bei der zweiten ist die zweite Ableitung eine einfache Konstante. Also ist Punkt 1 des Kriteriums positiv bezüglich TV beantwortet. Für die drei o. g. Schranken ergeben sich bei jeweils gleicher Startnäherung die in Tab. 5 zusammengestellten gerundeten Werte.

Tab. 5. Apriori-Fehlerschranken für die Integralgleichungen 1 und 2.

Verfahren	NV $n = 3$ (Gragg/Tapia)	TV $n = 2$ (3.1)	MPV $n = 2$ (Mörbel)
Gleichung Bspl. 1	$1,8 \cdot 10^{-4}$	$2,5 \cdot 10^{-5}$	$1,1 \cdot 10^{-3}$
Gleichung Bspl. 2	$3,2 \cdot 10^{-6}$	$3,1 \cdot 10^{-6}$	$1,6 \cdot 10^{-5}$

Aus 3. a) folgt, daß in beiden Fällen TV das günstigste Verfahren ist.

Im Hinblick auf die Fehlerabschätzung während der Rechnung sei bezüglich NV verwiesen auf den einfach zu handhabenden Satz 2 in [8]. Die dortige aposteriori-Schranke ist optimal in dem Sinne, daß für ein quadratisches Polynom das Gleichheitszeichen steht. Für MPV sind von Bosarge und Falb [4] sowie von Mörbel [14], [15] aposteriori-Schranken angegeben worden.

Abschließend sei erwähnt, daß sich die untersuchten Algorithmen zur numerischen Lösung der betrachteten Probleme als numerisch stabil erwiesen haben. Diese Arbeit ist vom Ministerium für Wissenschaft und Forschung des Landes Nordrhein-Westfalen gefördert worden.

Literatur

- [1] *Antosiewicz, H.*: Newton's method and boundary value problems. *J. Comput. System Sci.* 2 (1968), 177—203.
- [2] *Balázs, M.*: On solving operational equations by an iterative method. *Studia Univ. Babeş-Bolyai, Ser. math.-phys.* 14 (1969), 47—52.
- [3] *Bellman, R. E.* and *R. E. Kalaba*: Quasilinearization and nonlinear boundary value problems. *American Elsevier, New York* 1965.
- [4] *Bosarge, W. E., Jr.* and *P. L. Falb*: Infinite dimensional multipoint methods and the solution of two point boundary value problems. *Numer. Math.* 14 (1970), 264—286.
- [5] *Coddington, E. A.* and *N. Levinson*: *Theory of ordinary differential equations.* New York 1955.
- [6] *Collatz L.*: *Numerische Behandlung von Differentialgleichungen.* Springer-Verlag, Berlin 1955. Engl. Übersetzung im selben Verlag 1966.
- [7] *Collatz, L.*: *Funktionalanalysis und numerische Mathematik.* Springer-Verlag, Berlin 1964.
- [8] *Döring, B.*: Über das Newtonsche Näherungsverfahren. *Math.-Phys. Sem.-Ber.* 16 (1969), 27—40.
- [9] *Döring, B.*: Das Tschebyscheff-Verfahren in Banach-Räumen. *Numer. Math.* 15 (1970), 175—195.
- [10] *Ehrmann, H.*: Konstruktion und Durchführung von Iterationsverfahren höherer Ordnung. *Arch. Rat. Mech. Anal.* 4 (1959/60), 65—88.
- [11] *Falb, P. L.* and *J. L. de Jong*: Some successive approximation methods in control and control and oscillation theory. *New York* 1969.
- [12] *Gragg, W. B.* and *R. A. Tapia*: Optimal error bounds for the Newton-Kantorovich-theorem. *SIAM J. Numer. Anal.* 11 (1974), 10—13.
- [13] *Joseph, D. D.*: Nonlinear heat generation in conducting solids. *Int. J. Heat and Mass Transfer* 8 (1965), 218—288.
- [14] *Mörbel, F.*: Iterationsverfahren höherer Ordnung in Banach-Räumen mit Anwendung auf Randwertprobleme bei gewöhnlichen Differentialgleichungen. *Dissertation.* Düsseldorf 1973.
- [15] *Mörbel, F.*: Über ein Mehrpunktverfahren höherer Ordnung zur Lösung nichtlinearer Gleichungen in Banach-Räumen. *Z. Angew. Math. Mech.* 53 (1973), T201—T203.
- [16] *Ortega, J. M.* and *W. C. Rheinboldt*: *Iterative solution of nonlinear equations in several variables.* New York 1970.
- [17] *Rheinboldt, W. C.*: *Methods for solving systems of nonlinear equations.* SIAM Publication, Philadelphia 1974.

- [18] *Schmidt, J. W. and D. Leder*: Ableitungsfreie Verfahren ohne Auflösung linearer Gleichungen. *Computing* 5 (1970), 71—81.
- [19] *Schmidt, J. W. und H. Schwetlick*: Ableitungsfreie Verfahren mit höherer Konvergenzgeschwindigkeit. *Computing* 3 (1968), 215—226.
- [20] *Shafiyev, R. A.*: Certain iteration processes. *USSR Comp. Math. Math. Phys.* 4, No. 1, (1964), 187—193 [= *Ž. vyč. mat. i mat. fiz.* 4 (1964), 139—143].
- [21] *Wille, F.*: Nullstellen konvexer Operatoren. *Z. Angew. Math. Mech.* 52 (1972), T196.

Souhrn

ITERAČNÍ ŘEŠENÍ JISTÝCH OKRAJOVÝCH PROBLÉMŮ A INTEGRÁLNÍCH ROVNIC

BORO DÖRING

Za poměrně slabých předpokladů je dokázána věta o existenci, jednoznačnosti a konvergenci s ostrými aposteriorními odhady pro Čebyševovu iterační metodu. Věta se používá k řešení značně obecné třídy dvoubodových okrajových úloh pro soustavy nelineárních obyčejných diferenciálních rovnic s nelineárními okrajovými podmínkami a k řešení nelineárních Hammersteinových integrálních rovnic, což zobecňuje výsledky Bosarge-Falba a Willeho. Aby bylo získáno kritérium, umožňující rozhodnout předem, která ze tří obvykle užívaných superlineárních konvergentních iteračních metod je v nějakém smyslu nejvhodnější k řešení výše zmíněných tříd problémů za poněkud odlišných předpokladů, je odvozen ostrý apriorní odhad chyby Čebyševovy metody, jehož kvalita je srovnatelná s ostrými odhady chyb podobných metod, např. Graggovým a Tapiovým odhadem pro Newtonovu metodu. Vedle Newtonovy a Čebyševovy metody je uvažována jistá vícebodová metoda, v níž se každý iterační krok skládá z jednoho Newtonova kroku a dalšího kroku s nezměněnou derivací. Je proveden rozbor numerických výsledků v třech speciálních případech.

Anschrift des Verfassers: Prof. Dr. Boro Döring, Mathematisches Institut der Universität Düsseldorf, Universitätsstrasse 1, D-4 Düsseldorf.