Hans Stegbuchner

Zur numerischen Inversion von Laplace Transformierten

Aplikace matematiky, Vol. 26 (1981), No. 1, 1–12

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/103889

ZUR NUMERISCHEN INVERSION VON LAPLACE TRANSFORMIERTEN

HANS STEGBUCHNER

(Eingegangen 13. Oktober 1978)

1. EINLEITUNG

In der numerischen Praxis stellt sich häufig die Frage nach der Inversion einer Laplace Transformierten, da in vielen Fällen eine geschlossene Auswertung des Inversionsintegrales unmöglich ist. Demnach ist auch die Literatur zu diesem Thema sehr weitläufig (siehe dazu etwa die in [1, p. 206] angegebene Literatur). So gab z. B. Schmittroth [8] ein Verfahren an, das mittels Gauß'scher Quatraturverfahren eine Approximation von $f(t) = \mathscr{L}^{-1}(F(s))$ liefert. Ein Nachteil des Verfahrens liegt darin, daß für jedes Argument t eine neue Berechnung der Koeffizienten im Quadraturverfahren notwendig ist. Weitere Methoden stammen von Dubner und Abate [3] und Durbin [4]. Sie beruhen auf der Entwicklung des Inversionsintegrales in eine unendliche Reihe (siehe dazu auch [7]). Mit diesen Verfahren wurden gute numerische Ergebnisse erzielt.

In dieser Arbeit soll eine Methode angegeben werden, die auf einem numerischen Integrationsverfahren der Gleichverteilung mod. 1 beruht und für große Funktionenklassen gute Fehlerabschätzungen zuläßt.

2. HERLEITUNG DER INVERSIONSFORMEL

Es sei $F(s) = \mathscr{L}(f(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-st} f(t)\, \mathrm{d}t$ die Laplace Transformierte von $f(t)$ (für Details siehe das umfassende Werk von Doetsch [2]). $F(s) = F(\sigma + i\tau)$ ist dann eine in einer Halbebene $\operatorname{Re} s = \sigma > \sigma_0$ holomorphe Funktion und es gilt die Inversionsformel

$$(1) \qquad f(t) = \mathscr{L}^{-1}(F(s)) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} e^{st} F(s)\, \mathrm{d}s \quad (\sigma > \sigma_0)$$

Man kann stets annehmen, daß $F(s)$ für $\operatorname{Re} s = \sigma > 0$ holomorph ist. Ist dies nicht der Fall, so betrachten wir einfach die Funktion $F(s + a)$ mit einer geeigneten Konstanten a und die Bedingung ist erfüllt. Nach dem Verschiebungssatz kommt dies einfach einer Multiplikation von $f(t)$ mit e^{-at} gleich.

UnterBeachtung von $\operatorname{Re} F(s) = \operatorname{Re} F(\bar{s})$ und $\operatorname{Im} F(s) = -\operatorname{Im} F(\bar{s})$ lassen sich aus (1) folgende äquivalente Darstellungen herleiten:

(1a) $$f(t) = \frac{e^{\sigma t}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{it} F(\sigma + i\tau) \, d\tau$$

(1b) $$f(t) = 2 \frac{e^{\sigma t}}{\pi} \int_{0}^{\infty} \cos t\tau \operatorname{Re} F(\sigma + i\tau) \, d\tau$$

(1c) $$f(t) = -2 \frac{e^{\sigma t}}{\pi} \int_{0}^{\infty} \sin t\tau \operatorname{Im} F(\sigma + i\tau) \, d\tau$$

(1d) $$f(t) = \frac{e^{\sigma t}}{\pi} \int_{0}^{\infty} (\cos t\tau \operatorname{Re} F(\sigma + i\tau) - \sin t\tau \operatorname{Im} F(\sigma + i\tau)) \, d\tau$$

Für das weitere werden wir einige Begriffe und Sätze aus der Theorie der Gleichverteilung mod. 1 verwenden. Sei $\omega = \{x_k\}_{k=1}^{N}$ ein Folge von Punkten aus $[0, 1)$ und $D_N(\omega)$ die Diskrepanz dieser Folge. Dann gilt für jede komplexwertige Funktion mit beschränkter Variation

(2) *Ungleichung von Koksma*: $$\left| \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} f(x_k) - \int_{0}^{1} f(x) \, dx \right| \leqq V(f) \, D_N(\omega)$$

$V(f)$ ist dabei die totale Variation von $f(x)$ auf $[0, 1]$ (siehe [6, p. 143]).

Sei nun $0 < T < \infty$, $\sigma > 0$, $t > 0$ und $\omega = \{x_k\}_{k=1}^{N}$ eine Folge von Punkten aus $[0, 1)$. Damit definieren wir nachstehende Approximationsausdrücke für $f(t)$:

(3a) $$f_{1,N}(t) = \frac{2e^{\sigma t}}{\pi} \frac{T}{N} \sum_{k=1}^{N} \cos(tTx_k) \operatorname{Re} F(\sigma + iTx_k)$$

(3b) $$f_{2,N}(t) = -2 \frac{e^{\sigma t}}{\pi} \frac{T}{N} \sum_{k=1}^{N} \sin(tTx_k) \operatorname{Im} F(\sigma + iTx_k)$$

(3c) $$f_{3,N}(t) = \frac{e^{\sigma t}}{\pi} \frac{T}{N} \sum_{k=1}^{N} [\cos(tx_k) \operatorname{Re} F(\sigma + iTx_k) - \sin(tTx_k) \operatorname{Im} F(\sigma + iTx_k)]$$

Bemerkung. Über die Wahl von T und σ wird später eine Einschränkung vorgenommen werden.

Bevor wir nun den ersten Satz formulieren und beweisen, benötigen wir folgendes

Lemma 1. *Für die totale Variation der Funktion* $\cos tx$ *auf dem Intervall* $[0, T]$ *gilt die Abschätzung*

$$V(\cos tx) \leqq C \,.\, Tt$$

Beweis. $$V = \int_0^T \left| \frac{d}{dx} \cos tx \right| dx = \int_0^T |t \,.\, \sin tx| \, dx = \int_0^{tT} |\sin x| \, dx \,.$$

Sei nun die natürliche Zahl N so bestimmt, daß $2N\pi \leqq Tt < 2(N+1)\pi$ gilt. Damit ergibt sich

$$V = \sum_{k=0}^{N-1} \left\{ \int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} \sin x \, dx - \int_{(2k+1)\pi}^{(2k+2)\pi} \sin x \, dx \right\} + \int_{2N\pi}^{Tt} |\sin x| \, dx =$$

$$= 4N + \int_{2N\pi}^{Tt} |\sin x| \, dx < 4(N+1) \leqq \frac{2Tt}{\pi} + 4 = C \,.\, Tt \qquad \square$$

Nachstehender Satz 1 ist vor allem von theoretischen Interesse, da er eine globale Konvergenzaussage für die Näherungen (3b) bis (3d) beinhaltet.

Satz 1. *Sei* $F(s) = \mathscr{L}(f(t))$ *in* $\operatorname{Re} s = \sigma > 0$ *holomorph. Dann gilt für jede gleichverteilte Folge* ω *aus* $[0, 1)$ *und* $t > 0$ *bel.*

$$\lim_{N\to\infty} f_{j,N}(t) = f(t) \quad (j = 1, 2, 3) \,.$$

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$ bel. vorgegeben, $\sigma > 0$ fest (über die Wahl von σ werden wir weiter unten Einschränkungen vornehmen) und setzen wir $\operatorname{Re} F(s) = u(\sigma, \tau)$. Wegen (1b) können wir ein T so wählen, daß

$$L_T(\sigma, t) = \left| \int_T^\infty \cos t\tau \, u(\sigma, \tau) \, d\tau \right| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{4}$$

Für das restliche Integral erhalten wir

$$I_T = \int_0^T \cos t\tau \, u(\sigma, \tau) \, d\tau = T \int_0^1 \cos Tt\tau \, u(\sigma, T\tau) \, d\tau$$

und daraus wegen (2)

$$\left| I_T - \frac{T}{N} \sum_{k=1}^N \cos Ttx_k \, u(\sigma, Tx_k) \right| \leqq T \,.\, V \,.\, D_N(\omega)$$

Dabei sei V die totale Variation von $\cos t\tau \,.\, u(\sigma, \tau)$ auf dem Intervall $[0, T]$ bezüglich τ. Wegen $V(g \,.\, h) \leqq M_g V(f) + M_f V(g)$ mit $M_f = \sup_{0 \leqq x \leqq T} |f(x)|$ und $M_g = \sup_{0 \leqq x \leqq T} .$ $. \, |g(x)|$ erhalten wir daraus zusammen mit Lemma 1 die Abschätzung

$$V \leqq M_u(\sigma) \,.\, C \,.\, Tt + V_T(u, \sigma) \tag{5}$$

wobei $V_T(u, \sigma)$ die totale Variation bezüglich τ der Funktion $u(\sigma, \tau)$ auf $[0, T]$ bedeutet. Nun ist u der Realteil einer für $\sigma > 0$ holomorphen Funktion und somit ist $(\partial/\partial\tau)\, u(\sigma, \tau)$ für $0 \leqq \tau \leqq T$ beschränkt und folglich $V_T(u, \sigma) < \infty$. Beachten wir schließlich noch die Ungleichung $M_f \leqq |f(0)| + V(f)$, so erhalten wir mit (5)

$$(6) \qquad V \leqq C^* Tt \,.\, V_T(u, \sigma) = C_0(t, \sigma) \,.\, T \,.\, V_T(u, \sigma) \,.$$

(4) und (6) liefern nun zusammen die Abschätzung

$$|f_{1,N}(t) - f(t)| \leqq \left(L_T(\sigma, t) + C_0 D_N T^2 V_T\right) . \frac{2e^{\sigma t}}{\pi} \,.$$

Wählen wir nun $\sigma = 1/t$ und N so groß, daß $C_0 T^2 D_N V_T < (\varepsilon/2)$ wird (diese Wahl von N ist möglich, da die Folge ω laut Voraussetzung gleichverteilt ist und somit $\lim\limits_{N\to\infty} D_N = 0$ gilt), so erhalten wir schließlich die gewünschte Abschätzung

$$|f_{1,N}(t) - f(t)| < \frac{2\varepsilon}{\pi} < \varepsilon \,.$$

Die entsprechenden Beweise für $f_{2,N}$ und $f_{3,N}$ verlaufen natürlich ganz analog und der Satz ist somit bewiesen. □

Bemerkung. Um eine der obigen Formeln (3b) bis (3d) anwenden zu können, muß man natürlich gewisse Kenntnisse über das Verhalten von $F(s)$ besitzen, um den Parameter T günstig zu wählen. Dieses Problem stellt sich auch bei den Verfahren von Dubner und Abate [3] und Durbin [4] und darf in der Praxis sicher nicht unterschätzt werden. Wir werden daher jetzt versuchen, für gewisse Klassen von Funktionen, die auch in der Praxis häufig auftreten, Approximationsausdrücke herzuleiten, bei denen obige Schwierigkeit der geeigneten Parameterwahl nicht auftritt. Ferner werden wir bei diesen Verfahren auch konkrete Fehlerabschätzungen angeben können.

3. INVERSIONSMETHODEN FÜR SPEZIELLE FUNKTIONENKLASSEN

Wir betrachten dazu vorerst Funktionen von folgendem Typ:

$$(7) \qquad F(s) = \frac{(P(s))^\alpha}{(Q(s))^\beta}\, e^{-\lambda s}$$

mit $\lambda \geqq 0$, $P(s) = a_0 + a_1 s + \ldots + a_n s^n$, $Q(s) = b_0 + b_1 s + \ldots b_m s^m$, $a_n \neq 0$, $b_m \neq 0$, a_i, $b_j \in \mathbb{C}$ $(0 \leqq i \leqq n, 0 \leqq j \leqq m)$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$ und $\beta m > \alpha n + 1$. Dazu überlegen wir uns zuerst, daß alle Funktionen dieses Typs Laplace Transformierte einer Funktion $f(t)$ sind und Gleichung (1) Gültigkeit besitzt. Wie man ja leicht durch Gegenbeispiele belegen kann, gibt es in $\operatorname{Re} s > \sigma_0$ holomorphe Funktionen, für die die Funktion $f(t)$ nach Gleichung (1) existiert, ohne daß aber $F(s) = \mathscr{L}(f(t))$ gelten muß (siehe z. B. [2, p. 193]).

Satz 2. *Ist $F(s)$ von der Bauart (7) mit $\lambda \geqq 0$ und $\beta\, m < \alpha n + 1$, so existiert für $\sigma > \sigma_0$ die durch (1) definierte Funktion $f(t)$ für $t > 0$, ist von σ unabhängig und $F(s)$ ist die Laplace Transformierte von $f(t)$: $F(s) = \mathscr{L}(f(t))$.*

Beweis. Ist σ_0 das Maximum der Realteile der Nullstellen von $Q(s)$, so stellt $F(s)$ eine in $\operatorname{Re} s > \sigma_0$ eindeutige holomorphe Funktion dar, wenn wir unter $(P(s))^\alpha$ und $(Q(s))^\beta$ jeweils den Hauptzweig wählen. Sei o. B. d. A. $\sigma_0 \geqq 0$.

Wegen $|e^{-\lambda s}| = e^{-\lambda\sigma} \leqq 1$ für $\sigma > 0$ gilt

$$\lim_{S \to \infty} |F(s)| = 0$$

falls s in $\operatorname{Re} s \geqq \sigma_0 + \delta$ ($\delta > 0$ bel.) gegen ∞ strebt. Ferner ist für $\sigma > \sigma_0$ wegen $m\beta - n\alpha > 1$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(\sigma + i\tau)|\, \mathrm{d}\tau \leqq \int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(\sigma + i\tau))^\alpha}{Q(\sigma + i\tau))^\beta}\, \mathrm{d}\tau < \infty$$

und damit sind alle Voraussetzungen von [2, Satz 3, p. 263] erfüllt und $F(s) = \mathscr{L}(f(t))$ wobei $f(t)$ durch (1) festgelegt ist. □

Für obige Funktionen von der Gestalt (7) erhalten wir nach (1) für $f(t)$ die Darstellung

$$f(t) = \frac{e^{\sigma t}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\tau} e^{-\lambda(\sigma + i\tau)} (P(\sigma + i\tau))^\alpha (Q(\sigma + i\tau)^{-\beta}\, \mathrm{d}\tau = \tag{8}$$

$$= \frac{e^{\sigma(t-\lambda)}}{2\pi} \left\{ \int_0^1 e^{i(t-\lambda)\varphi(\tau)} (P(\sigma + i\,\varphi(\tau)))^\alpha (Q(\sigma + i\,\varphi(\tau)))^{-\beta} \varphi'(\tau)\, \mathrm{d}\tau + \right.$$

$$\left. \int_0^1 e^{-i(t-\lambda)\varphi(\tau)} (P(\sigma - i\,\varphi(\tau)))^\alpha (Q(\sigma - i\,\varphi(\tau)))^\beta \varphi'(\tau)\, \mathrm{d}\tau \right\} =$$

$$\frac{e^{\sigma(t-\lambda)}}{2\pi} (I_1 + I_2)$$

mit $\varphi(\tau) = (\tau/(1 - \tau))^\gamma$ mit einem $\gamma \geqq 1$.

Sei nun $G(s) = (P(s))^\alpha/(Q(s))^\beta$, so ist

$$G(\sigma + i\,\varphi(\tau)) = \frac{(a_0' + a_1'\,\varphi(\tau) + \ldots + a_n'\,\varphi(\tau)^n) + i(a_0'' + a_1''\,\varphi(\tau) + \ldots + a_n''\,\varphi(\tau)^n)^\alpha}{((b_0' + b_1'\,\varphi(\tau) + \ldots + b_m'\varphi(\tau)^m) + i(b_0'' + b_1''\,\varphi(\tau) + \ldots + b_m''\,\varphi(\tau)^m))^\beta}$$

wobei die Koeffizienten a_j', a_j'', b_j' und b_j'' reele, von σ abhängige Zahlen sind und mindestens je eine der beiden Zahlen a_n' und a_n'' bzw. b_m' und b_m'' von 0 verschieden ist. Durch weitere Umformungen erhalten wir schließlich

$$G(\sigma + i\,\varphi(\tau)) = (1 - \tau)^{\gamma(m\beta - n\alpha)}\, g_\sigma(\tau)$$

mit einer Funktion $g_\sigma(\tau)$, die für $0 \leqq \tau \leqq 1$ bezüglich τ beliebig oft differenzierbar ist und $|g^{(j)}(\tau)| \leqq C_j = C_j(\sigma)$ erfüllt. Damit können wir nun das Integral I_1 von (8) in der nachstehenden Form anschreiben:

$$I_1 = \gamma \int_0^1 e^{i(t-\lambda)\varphi(\tau)}\tau^{\gamma-1}(1-\tau)^a\, g_\sigma(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \int_0^1 h_\gamma(\tau)\,\mathrm{d}\tau \tag{9}$$

mit $a = \gamma(m\beta - n\alpha - 1) - 1$ und eine analoge Darstellung gilt für das Integral I_2 mit einer Funktion $\tilde{h}_\gamma(\tau)$. Der Einfachheit halber wurde die Abhängigkeit der Funktion h_γ von σ nicht explizit in der Notation angedeutet.

Wir benötigen nun einige Hilfssätze.

Lemma 2. *Sei $g(\tau)$ auf $[0, 1]$ j-mal differenzierbar und es gelte* $\sup\limits_{0<\tau<1} |g^{(n)}(\tau)| \leqq$ $\leqq C_n$ $(0 \leqq n \leqq j)$. *Ferner sei $h(\tau) = \psi(\tau)\,\tau^{\gamma-1}(1-\tau)^a g(\tau)$ mit $\psi(\tau) = e^{b\varphi(\tau)}$, $\varphi(\tau) =$ $= (\tau/(1-\tau))^\gamma$ $(\gamma \geqq 1)$ und $\gamma \geqq j$ sowie $a \geqq j(\gamma + 1)$. Dann gilt*

$$\frac{d^j\, h(\tau)}{d\tau^j} = \psi(\tau)\,\tau^{\gamma-(j+1)}(1-\tau)^{a-j(\gamma+1)}\, l_j(\tau)$$

mit $\sup\limits_{0\leqq\tau\leqq 1} |l_j(\tau)| \leqq C_j^*$.

Beweis. Für $j = 1$ erhalten wir sofort durch elementare Rechnung die Darstellung

$$h_\gamma'(\tau) = \psi(\tau)\,\tau^{\gamma-2}(1-\tau)^{a-(\gamma+1)}\, l_1(\tau)$$

mit $|l_1(\tau)| \leqq C_1^* \leqq C_0(\gamma|b| + \gamma - 1 + a) + C_1$.

Sei nun angenommen die Darstellung richtig für $h^{(j-1)}(\tau)$ mit einer gewissen Funktion $l_{j-1}(\tau)$. $l_{j-1}(\tau)$ setzt sich dann aus einer Summe von Produkten aus Polynomen in τ und Ableitungen der Ordnung kleiner als j von $g(\tau)$ zusammen. $l_{j-1}(\tau)$ ist somit differenzierbar und wir erhalten

$$h^{(j)}(\tau) = \psi(\tau)\,\tau^{\gamma-(j+1)}(1-\tau)^{a-j(\gamma+1)}\, l_j(\tau)$$

mit $l_j(\tau) = l_{j-1}(\tau)\,(b\gamma\tau^\gamma + (\gamma - j)(1-\tau)^{\gamma+1} + (a - (j-1)(\gamma+1))\,\tau(1-\tau)^\gamma) +$ $+ \tau(1-\tau)^{\gamma+1}\, l_{j-1}'(\tau)$.

Wie man ebenfalls leicht aus den Induktionsvoraussetzungen zeigen kann, ist $l_j(\tau)$ durch eine bestimmte Konstante C_j^* beschränkt. Das Lemma ist somit bewiesen. □

Wir geben nun folgende Definition:

Sei $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$ die Fourierreihe der auf $[0, 1]$ definierten periodischen Funktion $f(x)$. Falls für $n \neq 0$ eine Ungleichung der Form

$$|C_n| \leqq \frac{C}{|n|^\alpha}\,(\alpha > 0)$$

gilt, so sagt man, daß $f(x)$ zur Funktionenklasse E_α gehört (siehe dazu [5]).
Folgendes Lemma ist dann gültig:

Lemma 3. *Sei* $f(x):[0,1]\to\mathbb{C}$, $j\geqq 1$ *ganz und* $f(0)=f(1),\ldots,f^{(j-1)}(0)=f^{(j-1)}(1)$ *sowie* $|f^{(j)}(x)|\leqq C$. *Dann liegt die periodische Fortsetzung von* $f(x)$ *in der Klasse* E_j.

Beweis. j-fache partielle Integration liefert auf Grund der angenommenen Voraussetzungen für den Fourierkoeffizienten c_k ($k\in\mathbb{Z}$, $k\neq 0$):

$$|c_k| = |2\pi k|^{-j}\left|\int_0^1 f^{(j)}(t)\,e^{-2\pi ikt}\,\mathrm{d}t\right| \leqq C^*|k|^{-j}$$

mit $C^*=C/(2\pi)^j$ und das Lemma ist gezeigt. □

Lemma 4. *Sei* $h_\gamma(\tau)$ *die durch Gleichung (9) definierte Funktion mit* $m\beta-n\alpha=k+r$ ($k\in\mathbb{N}$ *und* $0<r\leqq 1$). *Dann liegt für* $\gamma\geqq k/r$ *und* $j=k-1$ *die Funktion* $h_\gamma(\tau)$ *in der Klasse* E_j.

Beweis. Differenzieren wir die Funktion $h_\gamma(\tau)$ j-mal, so erhalten wir nach Lemma 2 die Darstellung

$$h_\gamma^{(j)}(\tau)=\psi(\tau)\,\tau^{\gamma-(j+1)}(1-\tau)^{a-j(\gamma+1)}\,l_j(\tau)$$

mit $a=\gamma(m\beta-n\alpha-1)-1$. Die Funktion $\psi(\tau)$ hat dabei dieselbe Bedeutung wie in Lemma 2 mit $b=i(t-\lambda)$.
Nun ist $a-j(\gamma+1)=\gamma(k+r-1)-1-(k-1)(\gamma+1)=\gamma r-k\geqq 0$ und $\gamma\geqq k/r=(j+1)/r\geqq j+1$. Somit ist $h_\gamma(0)=h_\gamma(1)=\ldots=h_\gamma^{(j-1)}(0)=h_\gamma^{(j-1)}(1)=0$ und $h_\gamma^{(j)}(\tau)$ beschränkt auf $[0,1]$. Nach Lemma 3 folgt daher die Behauptung. □

Bemerkung. Man überlegt sich sofort, daß $h_\gamma^{(j)}(\tau)$ für $\tau\to 1$ keiner Lipschitzbedingung mehr genügt und somit keine Abschätzung der Form $\left|\int_0^1 h_\gamma^{(j)}(t)\,e^{-2\pi ikt}\,\mathrm{d}t\right|\leqq C|k|^{-\varepsilon}$ mit $\varepsilon>0$ mehr möglich ist. Der Index j in der Klasse E_j kann somit nicht vergrößert werden.

Satz 3. *Es sei* $\omega=\{x_k\}_{k=1}^N$ *eine Folge aus* $[0,1]$ *mit Diskrepanz* $D_N(\omega)$. *Die Funktion* $F(s)$ *sei definiert wie in (7) mit* $m\beta-n\alpha=k+r$ ($k\in\mathbb{N}$ *und* $0<r\leqq 1$), $\varphi(\tau)=(\tau/(1-\tau))^\gamma$, $y_k=\varphi(x_k)$ *und* $z_k=\varphi'(x_k)$. *Ist dann* $k\geqq 2$ *und* $\gamma\geqq k/r$, *so gilt für den Approximationsausdruck*

$$f_N^*(t)=\frac{e^{\sigma(t-\lambda)}}{2\pi}\,\frac{1}{N}\sum_{k=1}^N\left(F(\sigma+iy_k)\,\mathrm{e}^{i(t-\lambda)y_k}+F(\sigma-iy_k)\,e^{-i(t-\lambda)y_k}\right)z_k$$

die Abschätzung

$$|f_N^*(t)-f(t)|\leqq C\,.\,D_N(\omega)=C(t,\sigma)\,D_N(\omega)\,.$$

Für $0 < t_1 \leqq t \leqq t_2 < \infty$ ist die Konstante C von σ und t unabhängig.

Beweis. In der Schreibweise von (9) gilt für f_N^* die Darstellung

$$f_N^*(t) = \frac{e^{\sigma(t-\lambda)}}{2\pi} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} (h_\gamma(x_k) + \tilde{h}_\gamma(x_k)) .$$

Wegen $j \geqq 1$ sind nach Lemma 3 und 4 die Funktionen $h_\gamma(\tau)$ und $\tilde{h}_\gamma(\tau)$ beschränkt und somit von beschränkter Variation auf $[0, 1]$. Die Ungleichung von Koksma (2) liefert uns daher die Abschätzung

$$|f_N^*(t) - f(t)| \leqq D_N(\omega)(V(h_\gamma) + V(\tilde{h}_\gamma))\, e^{\sigma(t-\lambda)}/2\pi .$$

Wird σ wieder so gewählt, daß $e^{\sigma(t-\lambda)}$ beschränkt bleibt, so ist der erste Teil des Satzes bewiesen. Man kann sich ferner sofort davon überzeugen, daß für $0 < t_1 \leqq \leqq t \leqq t_2 < \infty$ (und damit etwa $1/t_2 \leqq \sigma \leqq 1/t_1$) die Konvergenz gleichmäßig stattfindet. □

Bemerkung. Für die Folge $\omega = \{(2k - 1)/2N\}_{k=1}^N$ gilt $D_N(\omega) = 1/N$; d. h. man kann in Satz 3 eine Konvergenzrate von $1/N$ erreichen. Wie man aber weiß, ist stets $D_N \geqq 1/N$, sodaß eine Verbesserung der Konvergenzgeschwindigkeit mit dieser Methode nicht möglich ist. Ein Nachteil dieser speziellen Folge liegt aber darin, daß beim Übergang von N auf $N + 1$ alle Funktionswerte $h_\gamma(x_k)$ neu berechnet werden müssen. Diesen Nachteil weisen die Folgen der Gestalt $x_k = \{k\theta\}$, θ irrational und $\{x\} = x - [x]$, nicht auf. Besitzt etwa die Kettenbruchentwicklung von θ beschränkte Teilnenner ($\theta = (\sqrt{5} - 1)/2$ etwa), so gilt für die Diskrepanz der Folge $\{k\theta\}$ ($k = 1, 2, \ldots, N$) die Ungleichung $D_N(\omega) \leqq C(\log N)/N$ (für Details in dieser Richtung siehe [6]).

Schließlich wollen wir noch den Fall $m\beta - n\alpha > 3$ betrachten. In diesem Fall ist $j \geqq 2$ und nach Lemma 4 liegt $h_\gamma(\tau)$ in der Klasse E_j. Für Funktionen aus E_j mit $j \geqq 2$ kennt man aber Quadraturmethoden, die, der Glattheit des Integranden entsprechend, hohe Konvergenzraten aufweisen. Die Gewichte in den entsprechenden Quadraturformeln hängen aber im konkreten Fall nicht vom Argument t des zu berechnenden Funktionswertes $f(t)$ ab (wie dies etwa bei Quadraturformeln von Newton - Cotes oder Gauß der Fall ist) und weisen somit gegenüber der Methode von [8] einen erheblichen Vorteil auf.

Wir definieren und dazu die Gewichte $g_{N,k}^{(j)}$ durch die Gleichung

$$\Big(\sum_{k=1}^{N} z^k\Big)^j = \sum_{k=1}^{Nj} g_{N,k}^{(j)} z^k .$$

Nach [9] gilt dann für eine Funktion $f(x) \in E_j$ ($j \geqq 2$, ganz)

$$(10) \qquad \Big|N^{-j} \sum_{k=1}^{Nj} g_{N,k}^{(j)} f(\{k\theta\}) - \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\Big| \leqq C \,.\, F_N^j$$

wobei F_N die Diaphonie (eine der Diskrepanz ähnlichen Größe) der Folge $\{k\theta\}$ $(k = 1, 2, \ldots, N)$ bezeichnet. Es sei explizit darauf hingewiesen, daß in der Näherungssumme von (10) nur Nj Summanden verwendet werden. Aus diesen Bemerkungen folgt nun aber sofort aus Lemma 4 zusammen mit (10) nachstehender Satz:

Satz 4. *Sei θ eine irrationale Zahl mit Diaphonie F_N. $F(s)$ sei definiert wie in (7) mit $m\beta - n\alpha = k + r$ $(k \in \mathbb{N},\ 0 < r \leqq 1)$. Für $k \geqq 3$ und $\gamma \geqq k/r$ gilt für den Approximationsausdruck*

$$f_{j\,N}^{*}(t) = \frac{e^{\sigma(t-\lambda)}}{2\pi} N^{-j} \sum_{k=1}^{Nj} g_{Nk}^{(j)} \left(e^{i(t-\lambda)y_k} F(\sigma + iy_k) + e^{-i(t-\lambda)y_k} F(\sigma - iy_k)\right) . z_k$$

mit $y_k = \varphi(\{k\theta\})$, $z_k = \varphi'(\{k\theta\})$, $\varphi(\tau) = (\tau/(1-\tau))^{\gamma}$ und $j = k - 1$ die Abschätzung

$$|f_{j,N}^{*}(t) - f(t)| \leqq C^{*} F_j^N = C^{*}(t, \sigma)\, F_N^j .$$

Für $0 < t_1 \leqq t \leqq t_2 < \infty$ ist die Konvergenz wieder gleichmäßig.

Man kann zeigen, daß für eine irrationale Zahl θ, welche beschränkte Teilnenner in ihrer Kettenbruchentwicklung besitzt, $F_N \leqq C\,.\,(\sqrt{\log N})/N$ gilt, sodaß in Satz 4 eine Konvergenzgeschwindigkeit von $N^{-j}(\log N)^{j/2}$ erreicht werden kann. Für Details und den Zusammenhang der Größen F_N und D_N siehe [9] und [10]. In [10] ist auch ein Algorithmus zur Berechnung der Gewichte $g_{N,k}^{(j)}$ angegeben. Für $j = 2$ ergeben sich diese Gewichte einfach zu

$$g_{N,k}^{(2)} = \begin{cases} k - 1 & \text{für } \ 1 \leqq k \leqq N + 1 \\ 2N + 1 - k & \text{für } \ N + 2 \leqq k \leqq 2N . \end{cases}$$

Im folgenden wollen wir noch Funktionen des Typs

$$F(s) = e^{-\lambda s^{\alpha}}$$

mit $0 < \alpha < 1$ und $\lambda < 0$ betrachten. Wie in [2, p. 263] gezeigt wird, stellen alle diese Funktionen Laplace Transformierte dar, wobei wieder Gleichung (1) Gültigkeit besitzt. Elementar kann das Inversionsintegral nur für $\alpha = 1/2$ ausgewertet werden.

Nach (1a) erhalten wir für $f(t)$ die Darstellung

$$(11) \qquad f(t) = \frac{e^{\sigma t}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\tau} e^{-\lambda(\sigma + i\tau)^{\alpha}}\, d\tau = \frac{e^{\sigma t}}{2\pi} \int_{-\infty}^{8} g_{\sigma}(\tau)\, d\tau$$

Nun ist $\operatorname{Re}(\sigma + i\tau)^{\alpha} = |\sigma + i\tau|^{\alpha} \cos(\alpha\psi)$ mit $\psi = \arg(\sigma + i\tau)$. Wegen $|\psi| \leqq \pi/2$ und $0 < \alpha < 1$ ist $\cos(\alpha\psi) \geqq \delta > 0$ für $\tau \in \mathbb{R}$ und $\sigma > 0$ bel. Damit erhalten wir aber

$$(12) \qquad |g_{\sigma}(\tau)| \leqq e^{-\lambda\delta(\sigma^2 + \tau^2)^{\alpha/2}} = e^{-\mu(\sigma^2 + \tau^2)^{\alpha/2}}$$

Führen wir in (11) die Transformation $\tau \to \varphi(\tau) = \tau^{\gamma}/(1 - \tau)$ $(\gamma \geqq 1)$ für $\tau \geqq 0$ und $\tau \to -\varphi(\tau)$ für $\tau \leqq 0$ durch, so ergibt sich aus (11) die Darstellung

(13) $$f(t) = \frac{e^{\sigma t}}{2\pi} \int_0^1 (g_\sigma(\varphi(\tau)) + g_\sigma(-\varphi(\tau)))\, \varphi'(\tau)\, d\tau = \frac{e^{\sigma t}}{2\pi} \int_0^1 (h_\gamma(\tau) + \tilde{h}_\gamma(\tau))\, d\tau$$

Die Funktionen $h_\gamma(\tau)$ und $\tilde{h}_\gamma(\tau)$ sind bel. oft differenzierbar und, wie man sich sofort mittels Induktion überzeugt, hat die j-te Ableitung die Gestalt

(14) $$h_\gamma^{(j)}(\tau) = g_o(\varphi(\tau))\, \tau^{\gamma-(j+1)}\, r_j(\tau)$$

wobei $|r_j(\tau)| = 0((1-\tau)^{--n_j})$ für $\tau \to 1$ mit $n_j > 0$. Für $\tau \to 0$ ist $r_j(\tau)$ beschränkt und es gilt

Lemma 5. *Die durch Gleichung (13) definierten Funktionen $h_\gamma(\tau)$ und $\tilde{h}_\gamma(\tau)$ liegen für $\gamma \geqq j + 1$ in der Funktionenklasse E_j.*

Beweis. Wegen (12) und (14) gilt für jede natürliche Zahl j

$$\lim_{\tau \to 1} h_\gamma^{(j)}(\tau) = 0 .$$

Wegen $\gamma > j$ gilt ferner auch $\lim_{\tau \to 0} h(_\gamma^{(k)}\tau) = 0$ für $k = 0, 1, \ldots, j-1$ und $\sup_{0 \leqq \tau \leqq 1}$. $|h_\gamma^{(j)}(\tau)| \leqq C_j$. Nach Lemma 3 ist somit alles gezeigt. □

Lemma 5 und Ungleichung (10) liefern somit folgenden

Satz 5. *Sei $F(s) = e^{-\lambda s^\alpha}\, \lambda > 0, 0 < \alpha < 1, j \in \mathbb{N}$ und $\gamma \geqq j + 1$, $\varphi(\tau) = \tau^\gamma/(1-\tau)$, $y_k = \varphi(\{k\theta\})$ und $z_k = \varphi'(\{k\theta\})$. Dann gilt für den Approximationsausdruck*

$$f_{j,N}^{**}(t) = \frac{e^{\sigma t}}{2\pi} N^{-j} \sum_{k=1}^{Nj} g_{N,k}^{(j)} \left(e^{ity_k} F(\sigma + iy_k) + e^{-ity_k} F(\sigma - iy_k)\right) . z_k$$

die Fehlerabschätzung

$$|f(t) - f_{j,N}^{**}(t)| = O(F_N^j) .$$

Dabei ist F_N die Diaphonie der Folge $\{k\theta\}$ $(k = 1, 2 \ldots, N)$. Die „Groß-O" Konstante hängt für $0 < t_1 \leqq t \leqq t_2 < \infty$ nur von j ab.

Man kann das Ergebnis von Satz 5 sofort auf Funktionenklassen des Typs $F(s) = e^{-\lambda s^\alpha}(P(s))^\nu/(Q(s))^\mu\, \lambda > 0$, $0 < \alpha < 1$, ν, $\mu > 0$ ausdehnen, wobei $P(s)$ und $Q(s)$ Polynome mit bel. Grand sind.

4. EINIGE NUMERISCHE BEISPIELE

Zum Abschluß wollen wir noch einige der hergeleiteten Ergebnisse numerisch testen und mit Ergebnissen von [3] und [4] vergleichen. Wir betrachten dazu zuerst die Funktion

$$F(s) = s/(s^2 + 1)^2 \quad \text{mit} \quad f(t) = 0.5 \, . \, t \, . \, \sin \, . \, t$$

Methode 1a: Approximationsausdruck nach Satz 4 mit $j = 2$ und $N = 100$

Methode 1b: Approximationsausdruck nach Satz 4 mit $j = 2$ und $N = 200$

Methode 2: Dubner und Abate [3] mit $N = 2000$ (!)

Methode 3: Durbin [4] mit $N = 1000$ (!)

t	Absolute		Fehler	
	Methode 1a	Methode 1b	Methode 2	Methode 3
2.0	0.41 E − 04	0.14 E − 04	0.12 E + 00	0.15 E − 02
4.0	0.25 E − 02	0.22 E − 03	0.19 E + 00	0.73 E − 01
6.0	0.83 E − 02	0.23 E − 03	0.10 E + 01	0.68 E − 01
8.0	0.12 E − 02	0.36 E − 02	0.11 E + 01	0.25 E − 01
10.0	0.36 E − 01	0.80 E − 02	0.31 E + 01	0.10 E + 00

In den Methoden 1a und 1b wurde jeweils $\sigma = 1/t$ und $\theta = (\sqrt{5} - 1)/2$ gewählt. Als zweites Beispiel wollen wir schließlich noch die Funktion

$$F(s) = a^2b^2/(s(s^2 + a^2)(s^2 + b^2))$$

mit $f(t) = 1 + (b^2 \cos at - a^2 \cos bt)/(a^2 - b^2)$

betrachten und die Ergebnisse nach der Methode von Satz 4 anführen, wobei einmal $j = 2$ und einmal $j = 3$ genommen wurde. Im konkreten Fall wurde $a = 1$ und $b = 2$ gesetzt.

t	Absolute		Fehler	
	$j = 2$		$j = 3$	
	$N = 100$	$N = 200$	$N = 100$	$N = 200$
2.0	0.56 E − 03	0.43 E − 04	0.46 E − 04	0.48 E − 04
4.0	0.81 E − 03	0.37 E − 04	0.13 E − 03	0.69 E − 04
6.0	0.15 E − 02	0.16 E − 03	0.58 E − 03	0.10 E − 03
8.0	0.97 E − 02	0.86 E − 03	0.20 E − 02	0.63 E − 03
10.0	0.76 E − 02	0.67 E − 03	0.29 E − 02	0.64 E − 04

Literaturhinweise

[1] *P. J. Davis, P. Rabinowitz:* Methods of numerical integration. Academic Press New York—London, 1975.

[2] *G. Doetsch:* Handbuch der Laplace Transformation I. Birkhäuser Verlag Basel, 1950.

[3] *R. Dubner, J. Abate:* Numerical inversion of Laplace transforms by relating them to the finite Fourier Cosine transform. JACM 15, 115—123, 1968.

[4] *F. Durbin:* Numerical inversion of Laplace transform: an efficient improvement to Dubner and Abate's method. The Computer Journal 17, 371—376, 1973.

[5] *N. M. Korobow:* Zahlentheoretische Methoden in der Approximationsanalysis (russisch). Fismatgis. Moskau, 1963.

[6] *L. Kuipers, H. Niederreiter:* Uniform distribution of sequences. John Wiley & Sons., Inc. New York, 1974.

[7] *A. Papoulis:* A new method of inversion of the Laplace transform. Quaterly of appl. Math. 14, 405—414, 1957.

[8] *L. A. Schmittroth:* Numerical inversion of Laplace transform. Comm. ACM 3, 171—173, 1960.

[9] *P. Zinterhof:* Über einige Abschätzungen bei der Approximation von Funktionen mit Gleichverteilungsmethoden. Sitzber. Österr. Akad. Wiss., math. - naturwiss. Kl. 185. 121—132, 1976.

[10] *P. Zinterhof, H. Stegbuchner:* Trigonometrische Approximation mit Gleichverteilungsmethoden (to appear).

Souhrn

NUMERICKÁ INVERZE LAPLACEOVY TRANSFORMACE

HANS STEGBUCHNER

Je navržena metoda numerického výpočtu inverzní Laplaceovy transformace. Vzorec závisí na metodách stejnoměrného rozdělení mod 1. Metoda poskytuje dobré odhady chyb pro širokou třídu funkcí (Laplaceových obrazů).

Anschrift des Verfassers: Dr. *Hans Stegbuchner*, Mathematisches Institut Universität in Salzburg, Petersbrunnstrasse 19, A-5020 Salzburg, Austria.