Květomil Stach

Die Kummerschen Transformationen in Räumen mit abgeschlossenen Phasen. Teil B: Transformationen in Räumen der gegeben Klasse

Archivum Mathematicum, Vol. 5 (1969), No. 2, 61--73

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/104681

DIE KUMMERSCHEN TRANSFORMATIONEN IN RÄUMEN MIT ABGESCHLOSSENEN PHASEN

Teil B: Transformationen in Räumen der gegebenen Klasse

KVĚTOMIL STACH

Herrn OTAKAR BORŮVKA zum 70. Geburtstag am 10. Mai 1969 gewidmet

(Eingegangen am 23. Juni 1968)

EINLEITUNG

Im ersten Teil dieser Arbeit [5] habe ich die allgemeinen Eigenschaften der Kummerschen Transformationen in Räumen mit abgeschlossenen Phasen studiert.

Ich habe besonders gezeigt, daß für die Existenz der vollständigen Transformationen des Raums S_1 auf S_2 die sogenannten charakteristischen Punkte, deren Definition in D. 1,4 gegeben ist, sehr wichtig sind. Ebenso wichtig sind auch die linken und rechten Randfunktionen [D. 1,3], Randbasen und Randphasen [D. 1,6]. Wenn die linken und rechten Randfunktionen unabhängig (abhängig) sind, so sagen wir, daß der Raum S allgemein (spezial) ist [D. 1,5].

Im 2. § habe ich u. a. gezeigt:

a) Wenn $\mathbf{T}(z, x)$ eine vollständige Transformation des Raums S_1 auf S_2 ist, so sind die Punkte t_0 und $x(t_0)$ gleichzeitig charakteristisch oder gewöhnlich [S. 2,1], die Räume S_1 und S_2 sind gleichzeitig allgemein oder spezial [S. 2,2] und im gewissen Sinn sind sie von demselben Typus [S. 2,3].

b) Wenn (u_1, v_1) und (u_2, v_2) Basen der Räume S_1 und S_2 sind, existiert höchstens eine Transformation $\mathbf{T}$ mit einer wachsenden und höchstens eine mit einer fallenden Amplitude x so, daß $\mathbf{T}(u_1) = u_2$, $\mathbf{T}(v_1) = v_2$ ist [S. 2,5].

c) Wenn S_1 und S_2 allgemein und $x_0 \in i_1$, $t_0 \in i_2$ keine charakteristischen Punkte sind, existiert höchstens eine wachsende und höchstens eine fallende Amplitude $x(t)$, für die $x(t_0) = x_0$ ist [S. 2,6].

In dem vorliegenden 2. Teil dieser Arbeit will ich in diesen Studien fortsetzen. Ich teile ihn in drei Paragraphen ein.

Im § 3 studiere ich die allgemeinen Räume nullter Klasse, d. h. die Räume ohne Extrempunkte. Ich zeige, daß in diesem Fall die Situation sehr ähnlich ist, wie bei dem Fall der Kummerschen Transformationen von Lösungen der Differentialgleichungen

$$y'' = q_1(x) \cdot y; \qquad y'' = q_2(x) \cdot y,$$

die in den Arbeiten [1] und [2] studiert wurden.

Im § 4 studiere ich die Räume, deren Extrempunkte charakteristisch sind und im § 5 beschäftige ich mich mit den übrigen Fällen. Die Hauptergebnisse sind besonders in den Sätzen 3,8, 4,7 und 5,1 enthalten.

Die Hinweise auf meine vorgehenden Arbeiten werde ich folgendermaßen machen: vor die Nummer des Satzes oder der Definition aus [3] resp. [4] setze ich die Vorzahl 3 resp. 4. Die Sätzen und Definitionen aus dem ersten Teil dieser Arbeit führe ich ohne eine Vorzahl an. Also z. B. S. 3,2,5 bedeutet den Satz 2,5 aus [3], D. 4,2,1 bedeutet die Definition 2,1 aus [4] und B. 1,1 bedeutet die Bemerkung 1,1 aus dem ersten Teil dieser Arbeit.

§ 3: DIE ALLGEMEINEN RÄUME NULLTER KLASSE

So wie im ersten Teil dieser Arbeit werden wir auch in diesem zweiten Teil folgende Vereinbarungen machen:

Vereinbarung 3,1: In der ganzen Arbeit werden wir die folgenden Bezeichnungen benützen: S, S_1, S_2 sind lineare zweidimensionale Räume von stetigen Funktionen [D. 3,1,2], die auf den Intervallen $i = (a, b)$, $i_1 = (a_1, b_1)$, $i_2 = (a_2, b_2)$ definiert sind; dabei sind a, a_1, a_2 reelle Zahlen oder $-\infty$; b. b_1, b_2 reelle Zahlen oder $+\infty$. Mit (u, v), (u_1, v_1), (u_2, v_2) werden wir die Basen der Räume S, S_1, S_2 [D. 3,1,3] und mit α, α_1, α_2 die Phasen dieser Räume [D. 4,1,1; D. 3,2,5] bezeichnen.

Vereinbarung 3,2: Wir werden immer voraussetzen, daß S, S_1, S_2 regulär [D. 3,1,4; D. 3,1,5] und von einem bestimmten Typus [D. 3, 2,1; D. 3,2,2] sind. Weiter werden wir voraussetzen, daß S, S_1, S_2 die allgemeinen Räume mit abgeschlossenen Phasen sind [D. 4,2,4].

Vereinbarung 3,3: Die Funktion $y \equiv 0$ wollen wir aus unseren Erwägungen immer ausschließen.

Satz 3,1: Es sei S ein allgemeiner Raum nullter Klasse und es existiere m linke charakteristische Punkte $a = a_1 < a_2 < \ldots < a_{m-1} < a_m$. Es sei α eine linke Randphase. Dann gilt

1. α ist im $\langle a, b \rangle$ entweder wachsend oder fallend.

2. es existiert eine ganze Zahl k so, daß $\alpha(a) = k \cdot \pi$ ist.

3. wenn α wachsend ist, so ist

$$\alpha(a_2) = (k + 1)\,\pi,\ \alpha(a_3) = (k + 2)\,\pi,\ \ldots,\ \alpha(a_m) = (k + m - 1)\,\pi,$$

ist α fallend, so ist

$$\alpha(a_2) = (k - 1)\,\pi,\ \alpha(a_3) = (k - 2)\,\pi,\ \ldots,\ \alpha(a_m) = (k - m + 1)\,\pi.$$

4. wenn α wachsend ist, so ist $\alpha(b) = (k + m - 1)\,\pi + \frac{\pi}{2}$, wenn α fallend ist, so ist $\alpha(b) = (k - m + 1)\,\pi - \frac{\pi}{2}$.

5. es existieren m rechte charakteristische Punkte $\{\,b_i\,\}_{i=1}^{m}$, so, daß $a = a_1 < b_m < a_2 < b_{m-1} < \ldots < a_{m-1} < b_2 < a_m < b_1 = b$, und wenn α wachsend ist, so gilt:

$$\alpha(b_m) = k\pi + \frac{1}{2}\,\pi, \ldots, \alpha(b_2) = (k + m - 2)\,\pi + \frac{1}{2}\,\pi,$$

wenn α fallend ist, so gilt:

$$\alpha(b_m) = k\pi - \frac{1}{2}\,\pi, \ldots, \alpha(b_2) = (k - m + 2)\,\pi + \frac{1}{2}\,\pi.$$

Beweis: 1. Da S nullter Klasse ist, existieren keine Extrempunkte im (a, b). Das erste Ergebnis ist also eine Folgerung von S. 3,2,4 und S. 3,2,6.

2. Die zweite Behauptung folgt aus S. 1,7.

3. Die dritte Behauptung folgt aus der Monotonheit der Funktion α, aus 2. und aus S. 1,6.

4. Das vierte Ergebnis ist eine Folgerung von 1., 3. und S. 1,7.

5. Das fünfte Resultat bekommen wir aus 4., 1. und S. 1,6.

Satz 3,2: Es seien S_1 und S_2 allgemeine Räume nullter Klasse, von denen jeder m linke charakteristische Punkte hat. Es sei α_1 eine wachsende linke Randphase des Raums S_1. Es sei α_2 eine wachsende linke [fallende rechte] Randphase des Raums S_2. Dann sind α_1 und α_2 fast gerade [ungerade] kongruent [D. 4,4,2; D. 4,4,1]. Eine ähnliche Behauptung gilt auch, wenn α_1 fallend ist.

Beweis: Es seien α_1 und α_2 z. B. gleichzeitig wachsend. Nach S. 3, 1 existieren ganze Zahlen k_1 und k_2 so, daß

$$\alpha_1(a_1) = k_1\pi, \quad \alpha_2(a_2) = k_2\pi,$$

$$\alpha_1(b_1) = (k + m - 1)\,\pi + \frac{1}{2}\,\pi, \alpha_2(b_2) = (k_2 + m - 1)\,\pi + \frac{1}{2}\,\pi.$$

Setzen wir $\bar{\alpha}_2 = \alpha_2 + (k_1 - k_2)\,\pi$. Dann ist $\bar{\alpha}_2(a_2) = k_2\pi + (k_1 - k_2)\pi = k_1\pi = \alpha_1(a_1)$ und deshalb ist die erste Bedingung aus D. 4,4,1 erfüllt. Weiter ist $\bar{\alpha}_2(b_2) = (k_2 + m - 1)\,\pi + \frac{1}{2}\,\pi + (k_1 - k_2)\,\pi = (k_1 + m - 1)\,\pi + \frac{1}{2}\,\pi = \alpha_1(b_1)$, d. h. die zweite Bedingung aus D. 4,4,1 ist erfüllt. Die dritte Bedingung ist selbstverständlich erfüllt, da $\mathbf{M}_i$ — — (a_i, b_i) $[i = 1, 2]$ leer sind. Deshalb sind α_1 und $\bar{\alpha}_2$ gerade kongruent und α_1 und α_2 sind fast gerade kongruent.

Satz 3,3: Es seien $\mathbf{S}_1$ und $\mathbf{S}_2$ zwei allgemeine Räume nullter Klasse, von denen jeder m linke charakteristische Punkte hat. Dann sind $\mathbf{S}_1$ und $\mathbf{S}_2$ gerade und auch ungerade ähnlich [D. 4,4,3].

Beweis: Es sei α_1 irgendeine linke Randphase des Raums $\mathbf{S}_1$, die z. B. wachsend ist. Ferner sei α_2 irgendeine linke Randphase des Raums $\mathbf{S}_2$, die zur Basis (u_2, v_2) gehört. Wenn α_2 wachsend ist, sind $\mathbf{S}_1$ und $\mathbf{S}_2$ nach S. 3,2 gerade ähnlich. Wenn α_2 fallend ist, so ist $\bar{\alpha}_2 = -\alpha_2$ die Phase der Basis $(-u_2, v_2)$, was aber nach S. 1,4 auch eine linke Randbasis ist. Die Phase $\bar{\alpha}_2$ ist wachsend und nach S. 3,2 sind $\mathbf{S}_1$ und $\mathbf{S}_2$ gerade ähnlich.

Den zweiten Teil unseres Satzes erhalten wir auf ähnliche Weise.

Beispiel 3,1: Es sei $a = 0$, $b = (m - 1)\pi + \frac{1}{2}\pi$ (m natürlich), $u = \sin x$, $v = \cos x$. Der Raum $\mathbf{S}^{(m)}$ ist der Raum aller Funktionen der Form $y = c_1 . \sin x + c_2 . \cos x$, d. h. der Form $y = k . \sin (x + c)$, wobei k und c beliebige Konstanten sind. Es ist

$$\lim_{x \to a+} \frac{\sin x}{\cos x} = 0, \quad \lim_{x \to b-} \frac{\cos x}{\sin x} = 0$$

und deshalb ist $u = \sin x$ die linke und $v = \cos x$ die rechte Randfunktion, d. h. $(\sin x, \cos x)$ ist die linke und $(\cos x, \sin x)$ die rechte Randbasis. Eine von den linken Randphasen ist $\alpha_1(x) = x$, eine von den rechten Randphasen ist $\alpha_2(x) = -x + (m - 1)\pi + \frac{1}{2}\pi$. Die Funktion $y = k . \sin (x + c)$ kann auf dem Intervall (a, b), das die Länge $(m - \frac{1}{2})\pi$ hat, bei beliebigen c entweder m oder $m - 1$ Nullstellen besitzen. Deshalb ist $\mathbf{S}^{(m)}$ der Raum von Typus m. Der Raum $\mathbf{S}^{(m)}$ hat, wie es bekannt ist, diese wichtige Eigenschaft: die Nullstellen von zwei unabhängigen Funktionen trennen sich.

Satz 3,4: Es sei $\mathbf{S}$ ein allgemeiner Raum nullter Klasse und es gebe m linke charakteristische Punkte. Dann ist der Raum vom Typus m und die Nullstellen von je zwei Funktionen teilen sich ab und umgekehrt. Weiter gilt: jede Funktion $y \in \mathbf{S}$ hat entweder m oder $m - 1$ Nullstellen.

Beweis: I. Es sei $\mathbf{S}$ ein Raum nullter Klasse und es gebe m linke charakteristische Punkte. Nach S. 3,3 ist dieser Raum gerade ähnlich mit dem Raum $\mathbf{S}^{(m)}$ aus dem Beispiel 3,1. Nach S. 4,4,6 existiert eine vollständige Transformation $\mathbf{T}(z, x)$ des Raums $\mathbf{S}$ auf $\mathbf{S}^{(m)}$. Nach S. 2,3 ist $\mathbf{S}$ vom Typus m. Es sei $y_1 \in \mathbf{S}$, $y_2 \in \mathbf{S}$, t_1, t_2 benachbarte Nullstellen der Funktion y_1. Nach S. 3,4,5 sind $x(t_1)$ und $x(t_2)$ benachbarte Nullstellen der Funktion $\mathbf{T}(y_1)$. Nach dem Beispiel 3,1 existiert zwischen $x(t_1)$ und $x(t_2)$ gerade eine Nullstelle der Funktion $\mathbf{T}(y_2)$. Bezeichnen wir sie mit x_0. $x^{-1}(x_0)$ ist nach S. 3,4,5 die Nullstelle der Funktion y_2 und da x monoton ist, ist es die einzige Nullstelle dieser Funktion, die zwischen t_1 und t_2 liegt.

II. Es sei $\mathbf{S}$ ein algemeiner Raum vom Typus m, dessen jede zwei Funktionen abgeteilte Nullstellen haben. Es sei t_0 ein beliebiger Punkt des Intervalls (a, b). Nach S. 3,1,5 existiert eine solche Basis (u, v), daß $u(t_0) = 0$ ist. Nach S. 3,2,4 existiert die Phase α der Basis (u, v), für die $\alpha(t_0) = 0$ ist. Setzen wir voraus, daß t_0 ein Extrempunkt, z. B. ein Minimum ist. Dann existiert ein solches $\varepsilon > 0$ und zwei Punkte t_1 und t_2 so, daß $t_1 < t_0 < t_2$, $\alpha(t_1) = \alpha(t_2) = \varepsilon$ ist. Nach S. 4,1,2 sind t_1 und t_2 miteinander konjugiert. Da $\mathbf{S}$ vom Typus m ist, können wir t_1 und t_2 so wählen, daß zwischen t_1 und t_2 keine mit ihnen konjugierte Punkte sind. Es sei jetzt ε_1 eine beliebige Zahl zwischen 0 und ε. Da $\alpha(t)$ stetig ist, existiert auf jedem aus den Intervallen (t_1, t_0) und (t_0, t_2) mindestens ein Punkt ζ_1 und ζ_2 so, daß $\alpha(\zeta_1) = \alpha(\zeta_2) = \varepsilon_1$ ist. Nach S. 4,1,2 sind ζ_1 und ζ_2 miteinander konjugiert. Nach D. 3,1,6 existieren die Funktionen y_1 und y_2 so, daß $y_1(t_1) = y_1(t_2) = 0$, $y_1(t) \neq 0$ für $t \in (t_1, t_2)$; $y_2(\zeta_1) = y_2(\zeta_2) = 0$. Das ist aber ein Widerspruch. Deshalb ist jeder Punkt des Intervalls (a, b) ein gewöhnlicher Punkt und α ist entweder wachsend oder fallend. Folglich ist $\mathbf{S}$ ein Raum nullter Klasse und hat nach S. 4,2,2 und S. 4,2,3 abgeslossene Phasen. Setzen wir voraus, daß er k linke charakteristische Punkte hat. Nach I. ist $\mathbf{S}$ vom Typus k. Folglich $k = m$.

III. Bei der Transformation $\mathbf{T}(z, x)$ des Raums $\mathbf{S}$ auf $\mathbf{S}^{(m)}$ entspricht eineindeutig jeder Nullstelle der Funktion $y \in \mathbf{S}$ eine Nullstelle der Funktion $\mathbf{T}(y) \in \mathbf{S}^{(m)}$. Da jede Funktion aus $\mathbf{S}^{(m)}$ entweder m oder $m - 1$ Nullstellen hat, hat diese Eigenschaft auch jede Funktion des Raums $\mathbf{S}$.

Vereinbarung 3,3: Im weiteren Verlauf dieses Paragraphen werden wir folgende Bezeichnungen benützen: $\mathbf{S}_k (k = 1, 2)$ sind Räume nullter Klasse von demselben Typus m, die auf den Intervallen $i_k = (a_{k1}, b_{k1})$ definiert sind. $a_{k1} < a_{k2} < \ldots < a_{km}$ sind die linken und $b_{km} < \ldots < b_{k2} < b_{k1}$ sind die rechten charakteristischen Punkte des Intervalls i_k. Endlich ist $i_{k1} = (a_{k1}, b_{km})$, $i_{k2} = (b_{km}, a_{k2})$, $i_{k3} = (a_{k2}, b_{k\,m-1})$, $\ldots\ i_{k\,2m-2} = (b_{k2}, a_{km})$, $i_{k\,2m-1} = (a_{km}, b_{k1})$.

Satz 3,5: Es sei $\mathbf{T}(z, x)$ eine vollständige Transformation des Raums $\mathbf{S}_1$ auf $\mathbf{S}_2$ und r eine natürliche Zahl. Wenn $x(t)$ wachsend ist, gilt

1. $x(a_{2r}) = a_{1r}$ für $1 \leqq r \leqq m$
2. $x(b_{2r}) = b_{1r}$ für $1 \leqq r \leqq m$
3. $x(i_{2r}) = i_{1r}$ für $1 \leqq r \leqq 2m - 1$.

Wenn $x(t)$ fallend ist, gilt

1. $x(a_{2r}) = b_{1r}$ für $1 \leqq r \leqq m$
2. $x(b_{2r}) = a_{1r}$ für $1 \leqq r \leqq m$
3. $x(i_{2r}) = i_{1\,2m-r}$ für $1 \leqq r \leqq 2m - 1$.

Beweis: Die Behauptungen 1. und 2. sind die Folgerungen aus dem Satz 2,1-a resp. 2,1-b. Die Behauptung 3. ist die Folgerung aus den Behauptungen 1. und 2.

Satz 3,6: Es seien (u_1, v_1) und (u_2, v_2) zwei beliebige Basen der Räume $\mathbf{S}_1$ und $\mathbf{S}_2$ und α_1, α_2 ihre Phasen.

1. Wenn $\alpha_1(a_{11}) = \alpha_2(a_{21}) + k\pi$ (k ganz) ist und α_1, α_2 gleichzeitig wachsend oder fallend sind, existiert genau eine vollständige Transformation $\mathbf{T}(z, x)$ so, daß $\mathbf{T}(u_1) = u_2$, $\mathbf{T}(v_1) = v_2$ ist. Die Amplitude x ist wachsend.

2. Wenn $\alpha_1(a_{11}) = \alpha_2(b_{21}) + k\pi$ (k ganz) ist und eine von den Phasen α_1, α_2 wachsend und die andere fallend ist, existiert genau eine vollständige Transformation $\mathbf{T}(z, x)$ so, daß $\mathbf{T}(u_1) = u_2$, $\mathbf{T}(v_1) = v_2$ ist. Die Amplitude x ist fallend.

3. In anderen Fällen existiert keine vollständige Transformation $\mathbf{T}$, für die $\mathbf{T}(u_1) = u_2$, $\mathbf{T}(v_1) = v_2$ wäre.

Beweis: 1. Es sei $\alpha_1(a_{11}) = \alpha_2(a_{21}) + k\pi$ und es seien α_1 und α_2 z. B. wachsend. Nach S. 3,4 und S. 1,6 ist

R. 3,1 $$\begin{aligned} \alpha_1(a_{12}) &= \alpha_1(a_{11}) + \pi, \ldots, \alpha_1(a_{1m}) = \alpha_1(a_{11}) + (m - 1)\,\pi \\ \alpha_2(a_{22}) &= \alpha_2(a_{21}) + \pi, \ldots, \alpha_2(a_{2m}) = \alpha_2(a_{21}) + (m - 1)\,\pi \end{aligned}$$

Nach denselben Sätzen ist

$$\alpha_1(b_{11}) = \alpha_1(a_{11}) + (m - 1)\,\pi + \frac{1}{2}\,\pi$$

$$\alpha_2(b_{21}) = \alpha_2(a_{21}) + (m - 1)\,\pi + \frac{1}{2}\,\pi,$$

d. h.

$$\alpha_1(b_{11}) - \alpha_2(b_{21}) = \alpha_1(a_{11}) - \alpha_2(a_{21}) = k\pi.$$

Folglich

$$\alpha_1(b_{11}) = \alpha_2(b_{21}) + k\pi.$$

Für die Phasen α_1 und $\bar{\alpha}_2 = \alpha_2 + k\pi$ [diese Phase gehört nach S. 3,2,4 und R. 3, 2,2 auch zu der Basis (u_2, v_2)] gilt also:

$$\alpha_1(a_{11}) = \bar{\alpha}_2(a_{21}), \qquad \bar{\alpha}_1(b_{11}) = \alpha_2(b_{21}),$$

d. h. die Eigenschaften 1. und 2. aus D. 4,4,1 sind erfüllt. Die Eigenschaft 3. ist selbstverständlich erfüllt, da in i_1 und i_2 keine Extrempunkte existieren. α_1 und $\bar{\alpha}_2$ sind gerade kongruent. Nach S. 4,4,5 und S. 4,3,2 existiert eine vollständige Transformation $\mathbf{T}(z, x)$, für die $\mathbf{T}(u_1) = u_2$, $\mathbf{T}(v_1) = v_2$ gilt. Da α_1 und α_2 gleichzeitig wachsend sind, muß nach S. 4,4,5 auch die Amplitude jeder Transformation $\mathbf{T}$, für die $\mathbf{T}(u_1) = u_2$, $\mathbf{T}(v_1) = v_2$ gilt, wachsend sein. Deshalb ist x wachsend und nach S. 2,5 existiert höchstens eine vollständige Transformation, die die verlangten Eigenschaften hat.

2. Wenn $\alpha_1(a_{11}) = \alpha_2(b_{21}) + k\pi$ gilt, können wir auf ähnliche Weise, wie in 1. zum Ziel kommen.

3. Wenn weder 1. noch 2. gilt, können α_1 und α_2 weder fast gerade noch fast ungerade ähnlich sein und es kann nach S. 4,4,1 keine vollständige Transformation $\mathbf{T}$, für die $\mathbf{T}(u_1) = u_2$, $\mathbf{T}(v_1) = v_2$ gilt, existieren.

Satz 3,7: Es seien (u_1, v_1) und (u_2, v_2) zwei linke oder zwei rechte [eine linke und eine rechte] Randbasen der Räume $\mathbf{S}_1$ und $\mathbf{S}_2$, α_1, α_2 seien ihre Phasen. Dann existiert genau eine vollständige Transformation $\mathbf{T}(z, x)$ des Raums $\mathbf{S}_1$ auf $\mathbf{S}_2$, für die $\mathbf{T}(u_1) = u_2$, $\mathbf{T}(v_1) = \varepsilon v_2$ ist. Dabei ist entweder $\varepsilon = 1$ [$\varepsilon = -1$] wenn α_1 und α_2 gleichzeitig wachsend oder gleichzeitig fallend sind, oder $\varepsilon = -1$ [$\varepsilon = 1$], wenn eine von den Phasen α_1 und α_2 wachsend und die andere fallend ist.

B e w e i s: Es seien z. B. (u_1, v_1) und (u_2, v_2) linke Randbasen. Nach S. 1,4 ist die Basis $(u_2, \varepsilon v_2)$ $(\varepsilon = \pm 1)$ eine linke Randbasis des Raums $\mathbf{S}_2$. Nach S. 2,4 muß jede vollständige Transformation $\mathbf{T}$, für die $\mathbf{T}(u_1) = u_2$, $\mathbf{T}(v_1) = \varepsilon v_2$ gilt, eine wachsende Amplitude haben. Nach S. 1,7 existieren ganze Zahlen k_1, k_2 so, daß

$$\alpha_1(a_{11}) = k_1\pi, \quad \alpha_2(a_{21}) = k_2\pi,$$

d. h.

$$\alpha_1(a_{11}) = \alpha_2(a_{21}) + (k_1 - k_2)\,\pi$$

ist.

Wenn α_1, α_2 gleichzeitig wachsend oder fallen sind, ist unsere Behauptung eine Folgerung des Satzes 3,6.

Wenn eine von den Phasen α_1, α_2 wachsend und die andere fallend ist, sind α_1 und $-\alpha_2$ gleichzeitig wachsend oder fallend und wir haben den vorigen Fall.

In anderen Fällen verläuft der Beweis ähnlich.

Satz 3,8: Es seien x_0 und t_0 beliebige nicht charakteristische Punkte der Intervallen i_1 und i_2. Bezeichnen wir mit r und s die natürlichen Zahlen, für die gilt: $x_0 \in i_{1r}$, $t_0 \in i_{2s}$.

Wenn $r = s$ [$r = 2m - s$] ist, existiert genau eine wachsende [fallende] Funktion $x(t)$, die die Amplitude irgendwelcher vollständigen

Transformation $\mathbf{T}(z, x)$ des Raums $\mathbf{S}_1$ auf $\mathbf{S}_2$ ist und für die $x(t_0) = x_0$ gilt. Wenn $r \neq s$ $[r \neq 2m - s]$ ist, existiert keine solche Funktion.

Beweis: 1. Setzen wir z. B. voraus, daß $r = s$ und r ungerade ist, d. h. daß eine ganze Zahl n so existiert, daß $r = 2n - 1$ ist. Dann ist $i_{kr} = (a_{kn}, b_{k\,m+1-n})$ $(k = 1, 2)$. Es gilt $a_{1n} < x_0 < b_{1m+1-n}$, $a_{2n} < t_0 <$ $< b_{2\,m+1-n}$ und auf den Intervallen i_{kr} sind die Voraussetzungen von S. 1,1 erfüllt. Deshalb existieren die Phasen α_k so, daß

R. 3,2 $$\alpha_k(a_{kn}) = 0,\ \alpha_k(b_{k\,m+1-n}) = \frac{\pi}{2}$$

und

R. 3,3 $$\alpha_1(x_0) = \alpha_2(t_0) = \frac{\pi}{4}$$

ist.
Die Phasen α_k sind nach R. 3,2 wachsende linke Randphasen und es gilt nach S. 3,1

R. 3,4 $$\alpha_1(i_{1j}) = \alpha_2(i_{2j})$$

für jedes $j = 1, 2, \ldots, 2m - 1$. Dabei ist α(i) die Menge aller solchen y, für die ein solches $x \in i$ existiert, daß $y = \alpha(x)$ ist.

Bezeichnen wir mit (u_k, v_k) irgenwelche Basen der Phasen α_k. Nach S. 3,7 existiert eine vollständige Transformation $\mathbf{T}(z, x)$ des Raums $\mathbf{S}_1$ auf $\mathbf{S}_2$ so, daß $\mathbf{T}(u_1) = u_2$, $\mathbf{T}(v_1) = v_2$ ist.

Nach S. 4,3,2 existiert eine ganze Zahl k so, daß für $t \in \mathrm{i}_2$

R. 3,5 $$\alpha_2(t) = \alpha_1[x(t)] + k\pi$$

gilt. Nach S. 3,5 ist $x(a_{2n}) = a_{1n}$. Daraus und aus R. 3,2 und R. 3,5 folgt: $k = 0$. Aus R. 3,3 und R. 3,5 folgt weiter.

$$\alpha_1(x_0) = \alpha_2(t_0) = \alpha_1[x(t_0)].$$

Die Funktion α_1 ist monoton und deshalb ist

$$x(t_0) = x_0.$$

Damit haben wir bewiesen, daß mindestens eine Funktion, die die verlangten Eigenschaften hat, existiert. Die Unizität folgt aus S. 2,6.

2. Wenn $r = 2m - s$ ist, können wir ähnlicherweise, wie im vorigen Fall, fortsetzen.

3. Wenn weder $r = s$ noch $r = 2m - s$ gilt, kann zufolge S. 3,5 keine Funktion $x(t)$, die die verlangten Eigenschaften hat, existieren.

§ 4: ALLGEMEINE RÄUME 1. UND 2. KLASSE, DEREN EXTREMPUNKTE CHARAKTERISTISCH SIND

Satz 4,1: Es sei S ein allgemeiner Raum 1. oder 2. Klasse, dessen Extrempunkte alle charakteristisch sind. Dann existieren endlich viele linke charakteristische Punkte $a = a_1 < a_2 < \ldots < a_m$ und die gleiche Anzahl von rechten charakteristischen Punkten $b = b_1 > b_2 > \ldots > b_m$ und zwar so, daß $a = a_1 < b_m < a_2 < \ldots < b_2 < a_m < b_1 = b$ ist. Auf den Intervallen (a_1, b_m), (b_m, a_2), $\ldots$, (a_m, b_1) ist jede Phase des Raums S monoton.

Beweis: I. Es seien ζ und η zwei benachbarte charakteristische Punkte ($\zeta < \eta$) und α irgendeine Randphase des Raums S. Nach S. 1,6 und S. 1,7 gilt:

$$\alpha(\zeta) = \alpha(\eta) + \varepsilon \, . \, \frac{\pi}{2},$$

wobei $\varepsilon = 0$ oder $\varepsilon = \pm 1$ ist.

Setzen wir voraus, daß $\varepsilon = 0$ wäre. Dann wäre $\alpha(\zeta) = \alpha(\eta)$. Deshalb müßte auf dem Intervall (ζ, η) mindestens ein Extrempunkt x_0 existieren. Da alle Extrempunkte charakteristisch sind, müßte x_0 ein charakteristischer Punkt sein. Das ist aber unmöglich, da ζ und η benachbarte charakteristische Punkte sind. Deshalb ist $\varepsilon = \pm 1$, was bedeutet, daß der eine von den Punkten ζ, η ein linker und der andere ein rechter charakteristischer Punkt ist. Damit haben wir bewiesen, daß die linken und rechten charakteristischen Punkte einander regelmäßig abwechseln.

II. Jetzt werden wir zeigen, daß der Raum S nur endlich viele charakteristische Punkte besitzt. Setzen wir z. B. voraus, daß es sich unendlich viele linke charakteristische Punkte gibt. Nach I. muß der Raum S auch unendlich viele rechte charakteristische Punkte haben. Deshalb muß jede linke und jede rechte Randfunktion unendlich viele Nullstellen haben. Nach S. 4,2,1 ist das aber unmöglich.

III. Aus II. folgt, daß im Raum S nur endlich viele linke charakteristische Punkte $a = a_1 < a_2 < \ldots < a_m$ existieren. Nach I. existiert auf jedem Intervall (a_1, a_2), (a_2, a_3), $\ldots$, (a_{m-1}, a_m) gerade ein rechter charakteristischer Punkt $b_m > b_{m-1} > \ldots > b_2$. Da der Punkt b auch ein rechter charakteristischer Punkt ist und da $a_m > b = b_1$ gilt, sind alle charakteristischen Punkte des Raums S folgende:

$$a = a_1 < b_m < a_2 < \ldots < b_2 < a_m < b_1 = b.$$

IV. Auf den Intervallen (a_1, b_m), $\ldots$, (a_m, b_1) können keine Extrempunkte existieren (da auf diesen Intervallen keine charakteristischen Punkte sind) und deshalb muß jede Phase α des Raums S auf diesen Intervallen monoton sein.

Satz 4,2: Es seien S_1 und S_2 allgemeine Räume 1. oder 2. Klasse, deren Extrempunkte alle charakteristisch sind. Es seien $a_1 = a_{11} < < b_{1m} < a_{12} < \ldots < b_{12} < a_{1m} < b_{11} = b_1$ alle charakteristischen Punkte des Raums S_1 und $a_2 = a_{21} < b_{2n} < \ldots < a_{2n} < b_{21} = b_2$ alle charakteristischen Punkte des Raums S_2. Eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die Räume S_1 und S_2 gerade [ungerade] ähnlich sind, ist:

1. $m = n$
2. für jedes $k = 1, 2, \ldots, m$ sind die Punkte a_{1k} und a_{2k} [a_{1k} und b_{2k}] gleichzeitig entweder gewöhnliche Punkte oder Extrempunkte
3. für jedes $k = 1, 2, \ldots, m$ sind die Punkte b_{1k} und b_{2k} [b_{1k} und a_{2k}] gleichzeitig entweder gewöhnliche Punkte oder Extrempunkte.

Beweis: Wir werden ihn für den Fall der geraden Ähnlichkeit vorführen.

I. Es seien die Forderungen 1., 2., 3. erfüllt. Wählen wir nach S. 1,8 die Phasen α_1 und α_2 der Räume S_1 und S_2 so, daß $\alpha_1(a_{11}) = \alpha_2(a_{21}) = 0$ und $\alpha_1(b_{1m}) = \alpha_2(b_{2m}) = \frac{1}{2}\pi$ ist. Die Funktionen α_1 und α_2 sind linke Randphasen, die auf den Intervallen (a_{11}, b_{1m}) und (a_{21}, b_{2m}) wachsend sind. Bezeichnen wir jetzt die charakteristischen Punkte folgendermaßen $a_{ik} = \xi_{i\,2k-1}$, $b_{ik} = \xi_{i\,2(m-k+1)}$ fσr $i = 1,2$ und $k = 1, 2, \ldots, m$. Dann ist

$$a_i = \xi_{i1} < \xi_{i2} < \xi_{i3} < \ldots < \xi_{i\,2m-1} < \xi_{i\,2m} = b_i$$

und die Punkte ξ_{1k} und ξ_{2k} sind für jedes $k = 1, 2, \ldots, 2m$ gleichzeitig entweder gewöhnlich oder extrem.

Jetzt werden wir zeigen, daß für jedes $k = 1, 2, \ldots, 2m$ die Gleichheit

R. 4,1 $$\alpha_1(\xi_{1k}) = \alpha_2(\xi_{2k})$$

gilt und daß die Funktionen α_1 und α_2 in den Punkten ξ_{1k} und ξ_{2k} für jedes $k = 1, 2, \ldots, 2m - 1$ gleichzeitig von rechts entweder wachsend oder fallend und für jedes $k = 2, 3, \ldots, 2m$ gleichzeitig von links entweder wachsend oder fallend sind. Wirklich, diese Behauptungen sind in den Punkten ξ_{11}, ξ_{21} erfüllt. Setzen wir jetzt voraus, daß die Behauptungen für irgendwelches $k < 2m$ erfüllt sind.

Setzen wir z. B. voraus, daß α_1 im Punkt ξ_{1k} von rechts wachsend ist; deshalb ist auch α_2 im Punkt ξ_{2k} von rechts wachsend. Nach S. 4,1 sind die Funktionen α_1 und α_2 auf den Intervallen $(\xi_{1k}, \xi_{1\,k+1})$, $(\xi_{2k}, \xi_{2\,k+1})$ wachsend und da $\xi_{i\,k}$, $\xi_{i\,k+1}$ benachbarte charakteristische Punkte sind, ist nach S. 1,7 und 1,6

R. 4,2 $$\alpha_i(\xi_{i\,k+1}) = \alpha_i(\xi_{ik}) + \frac{1}{2}\pi.$$

Aus R. 4,2 und R. 4,1 folgt:

$$\alpha_1(\xi_{1\,k+1}) = \alpha_2(\xi_{2\,k+1}).$$

Wenn $k < 2m$ ist, sind die Punkte $\xi_{1\,k+1}$ und $\xi_{2\,k+1}$ gleichzeitig entweder gewöhnlich oder extrem und deshalb sind die Funktionen α_1 und α_2 in diesen Punkten nach rechts gleichzeitig wachsend oder fallend. Setzen wir $\varphi(\xi_{2k}) = \xi_{1k}$. ξ_{1k} ist gerade dann ein Extrempunkt, wenn ξ_{2k} ein Extrempunkt ist.

Nach D. 4,4,1 sind α_1 und α_2 gerade kongruent, nach D. 4,4,3 sind S_1 und S_2 gerade ähnlich.

II. Es seien S_1 und S_2 gerade ähnlich. Dann existieren gerade kongruente linke Randphasen α_1 und α_2 der Räume S_1 und S_2. Bezeichnen wir $a_1 = \eta_{11} < \eta_{12} < \ldots < \eta_{1r} = b_1$ alle Extrempunkte und Grenzpunkte des Intervalls i_1. Da alle Extrempunkte charakteristisch sind, ist $r \leqq 2m$. Nach D. 4,4,1 existieren auch r Extrempunkte und Grenzpunkte des Intervalls i_2, und zwar $a_2 = \eta_{21} < \eta_{22} < \ldots < \eta_{2r} = b_2$ und es gilt

R. 4,3 $$\alpha_1(\eta_{1k}) = \alpha_2(\eta_{2k})$$

für jedes $k = 1, 2, \ldots, r$.

Nach S. 1,6 und aus R. 4,3 folgt, daß auf den Intervallen $(\eta_{1k}, \eta_{1\,k+1})$ und $(\eta_{2k}, \eta_{2\,k+1})$ für jedes $k = 1, 2, \ldots, r - 1$ dieselbe Anzahl von charakteristischen Punkten ist. Daraus folgt, daß die Forderungen 1., 2. und 3. erfüllt sind.

Im Verlauf des ersten Teils des Beweises des vorigen Satzes haben wir auch den folgenden Satz bewiesen:

Satz 4,3: Es seien S_1 und S_2 zwei allgemeine Räume 1. oder 2. Klasse, deren alle Extrempunkte charakteristisch sind, und die gerade [ungerade] ähnlich sind. Es sei α_1 eine linke Randphase des Raums S_1, die im Punkt a_1 von rechts wachsend ist. Ferner sei α_2 eine linke [rechte] Randphase des Raums S_2, die im Punkt a_2 [b_2] von rechts [links] wachsend [fallend] ist. Dann sind α_1 und α_2 fast gerade [ungerade] kongruent.

Vereinbarung 4,1: Im weiteren Verlauf dieses Paragraphen werden mit $S_k (k = 1, 2)$ zwei gerade oder ungerade ähnliche Räume 1. oder 2. Klasse, deren alle Extrempunkte charakteristisch sind, bezeichnet. a_{kn}, b_{kn} und i_{kn} haben dieselbe Bedeutung, wie in der Vereinbarung 3,3.

Satz 4,4: Der Satz 3,5 gilt im vollen Wortlaut auch in diesem Fall.

Satz 4,5: (u_1, v_1) und (u_2, v_2) seien beliebige Basen von zwei gerade [ungerade] ähnlichen Räumen und α_1, α_2 seien ihre Phasen. Wenn $\alpha_1(a_{11}) = \alpha_2(a_{21}) + k\pi$ (k ganz) [$\alpha_1(a_{11}) = \alpha_2(b_{21}) + k\pi$] ist und α_1, α_2 in Punkten a_{11}, a_{21} nach rechts gleichzeitig wachsend oder gleichzeitig fallend sind [α_1 im Punkt α_{11} von rechts wachsend und α_2 im Punkt b_{21}

von links fallend ist oder umgekehrt], existiert genau eine vollständige Transformation $\mathbf{T}(z, x)$ so, daß $\mathbf{T}(u_1) = u_2$, $\mathbf{T}(v_1) = v_2$ ist. Die Amplitude x ist wachsend [fallend]. In anderen Fällen existiert keine vollständige Transformation $\mathbf{T}$, für die $\mathbf{T}(u_1) = u_2$, $\mathbf{T}(v_1) = v_2$ wäre.

Satz 4,6: Es seien $\mathbf{S}_1$ und $\mathbf{S}_2$ gerade [ungerade] ähnlich. Ferner seien (u_1, v_1) und (u_2, v_2) zwei linke [eine linke und eine rechte] Randbasen, α_1, α_2 ihre Phasen. Dann existiert genau eine vollständige Transformation $\mathbf{T}(z, x)$ des Raums $\mathbf{S}_1$ auf $\mathbf{S}_2$, für die $\mathbf{T}(u_1) = u_2$, $\mathbf{T}(v_1) = \varepsilon \,.\, v_2$ ist. Dabei ist entweder $\varepsilon = 1$, wenn α_1 und α_2 in den Punkten a_{11}, a_{21} von rechts gleichzeitig wachsend oder gleichzeitig fallend sind [α_1 im Punkt a_{11} von rechts wachsend und α_2 im Punkt b_{21} von links fallend sind oder umgekehrt], oder $\varepsilon = -1$ in den übrigen Fällen.

Satz 4,7: Es seien $\mathbf{S}_1$ und $\mathbf{S}_2$ gerade [ungerade] ähnlich.Dann gilt der Satz 3,8.

Die Beweise der Sätze 4,4; 4,5; 4,6 und 4,7 weisen eine ähnliche Struktur wie die der Sätze 3,5; 3,6; 3,7 und 3,8.

§ 5: ÜBRIGE ALLGEMEINE RÄUME MIT ABGESCHLOSSENEN PHASEN

Satz 5,1: Es seien $\mathbf{S}_1$ und $\mathbf{S}_2$ m-ter Klasse ($m \geqq 1$, m ganz) und es existiere mindestens ein Extrempunkt, der kein charakteristischer Punkt ist. Wenn $m < \infty$ ist, existiert höchstens eine wachsende und höchstens eine fallende Funktion $x(t)$, die eine Amplitude irgendeiner vollständigen Transformation $\mathbf{T}(z, x)$ des Raums $\mathbf{S}_1$ auf $\mathbf{S}_2$ ist. Wenn $m = \infty$ ist, existieren höchstens abzählbar viele solche Funktionen.

Beweis: I. Bezeichnen wir mit $\mathbf{M}_k (k = 1, 2)$ die Mengen von allen Extrempunkten der Intervalle i_k, die nicht charakteristisch sind. Nach Satz 214 aus [6] sind $\mathbf{M}_k$ höchstens abzählbar. Aus S. 3,4,9 und S. 2,1-a folgt, daß jede Amplitude x einer vollständigen Transformation $\mathbf{T}(z, x)$ mit einer wachsenden Amplitude eine wachsende Abbildung der Menge $\mathbf{M}_2$ auf die Menge $\mathbf{M}_1$ vermittelt.

Daraus und aus S. 2,6 folgt, daß zu jedem Paar $(x_0, t_0) \in \mathbf{M}_1 \times \mathbf{M}_2$ höchstens eine wachsende Funktion $x(t)$ existiert, die eine Amplitude irgendeiner vollständigen Transformation $\mathbf{T}(z, x)$ ist. Da $\mathbf{M}_1 \times \mathbf{M}_2$ höchstens abzählbar ist, ist die Menge aller Amplituden auch höchstens abzählbar.

II. Es sei $m < \infty$. Nach S. 1,9 sind $\mathbf{S}_k$ von einem endlichen Typus. Deshalb sind die Mengen $\mathbf{M}_k$ endlich und haben den kleinsten Element. Bezeichnen wir $x_0 = \min \mathbf{M}_1$, $t_0 = \min \mathbf{M}_2$. Aus S. 3,4,9 und S. 2,1-a folgt, daß für jede vollständige Transformation $\mathbf{T}(z, x)$ mit einer wachsenden Amplitude $x(t)\ x(t_0) = x_0$ sein muß. Nach S. 2,6 existiert höchstens eine wachsende Funktion x, die die verlangten Eigenschaften hat.

Für den Fall den fallenden Amplituden verläuft der Beweis ähnlicherweise.

LITERATURVERZEICHNIS

[1] O. Borůvka, Sur la transformation des intégrales des équations différentielles linéaires ordinaires du second ordre. Ann. di Mat. p. ed app., 41, Bologne, 1956, 325—342.

[2] O. Borůvka, Sur les transformations différentielles linéaires complètes du second ordre. Ann. di Mat. p. ed app., 49, Bologne, 1960, 229—251.

[3] K. Stach, Die allgemeinen Eigenschaften der Kummerschen Transformationen zweidimensionaler Räume von stetigen Funktionen. Publ. Fac. Sci. UJEP Brno, 478, 1966, 389—410.

[4] K. Stach, Die vollständigen Kummerschen Transformationen zweidimensionaler Räume von stetigen Funktionen. Archivum Mathem. UJEP Brno, 1967, Tomus 3, Fasc. 3, 117—138.

[5] K. Stach, Die Kummerschen Transformationen in Räumen mit abgeschlossenen Phasen. Teil A: Allgemeine Eigenschaften. Archivum Mathem. UJEP Brno 1968, Tomus 4, Fasc. 4, 141—156.

[6] V. Jarník, Diferenciální počet, nakl. ČSAV, Praha 1953.

Department of Mathematics
VŠB, Ostrava 8
Czechoslovakia