Werner Meyer-König; Hubert Tietz

Über Umkehrbedingungen in der Limitierungstheorie

Archivum Mathematicum, Vol. 5 (1969), No. 4, 177--186

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/104698`

ÜBER UMKEHRBEDINGUNGEN IN DER LIMITIERUNGSTHEORIE

Werner Meyer-König und Hubert Tietz

Herrn O. Borůvka zum 70. Geburtstag am 10. 5. 1969 gewidmet

Eingegangen am 29. April 1969

1. EINLEITUNG

Wie in [5] knüpfen wir an den folgenden Satz an (vgl. [4], [3, S. 1038]):

Satz 1.1. *Ist V ein permanentes, additives Verfahren zur Summierung unendlicher Reihen* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *mit komplexen Gliedern, und ist* $na_n = o(1)$ *für* $n \to \infty$ *eine Tauber-Bedingung für V, so ist auch* $\sum_{k=0}^{n} ka_k = o(n)$ *für* $n \to \infty$ *eine Tauber-Bedingung für V.*

In Fortsetzung der Untersuchungen in [5] gehen wir — allgemeiner als in Satz 1.1 — von Tauber-Bedingungen der Form $\lambda_n a_n = o(1)$ aus und schließen auf Tauber-Bedingungen der Form $\delta_n = o(1)$, wobei die Folge $\{\delta_n\}$ aus der Folge $\{\lambda_n a_n\}$ durch Transformation mit gewissen speziellen Dreicksmatrizen hervorgeht. Dabei ziehen wir neben $o(1)$ auch $O(1)$ sowie die Bedingungen „$\lambda_n a_n$ konvergent" bzw. „δ_n konvergent" in Betracht. Einige unserer Ergebnisse übertragen wir von Folgen auf Funktionen. Alle unsere früheren Resultate sind in den jetzigen Sätzen als Spezialfälle enthalten.

Zur Illustration erwähnen wir gleich hier einige einfache Anwendungen. Für das Abel-Verfahren ist „na_n konvergent" eine Tauber-Bedingung. (Sind nämlich die a_n unter dieser Voraussetzung reell, so strebt entweder $na_n \to 0$ oder aber besitzen die a_n von einer Stelle an einerlei Vorzeichen.) Aus Satz 2.3 (oder Satz 2.9) folgt damit ganz leicht, daß „δ_n konvergent" — mit $\delta_n = (n + 1)^{-1} \sum_{k=0}^{n} ka_k$ — eine Tauber-Bedingung für das Abel-Verfahren ist. Bekanntlich ist $\delta_n = O(1)$ — mit denselben δ_n wie soeben — keine Tauber-Bedingung für das Abel-Verfahren. Anders liegen in dieser Hinsicht die Verhältnisse bei den logarithmischen Verfahren l und L (vgl. die in [5, S. 210] angegebene Literatur). Es ist $a_n n \log n = O(1)$ eine Tauber-Bedingung für L. Nach Satz 2.6 (oder Satz 2.12) folgt hieraus, daß die schwächere Bedingung

$$\frac{1}{n+1} \sum_{k=2}^{n} a_k k \log k = O(1) \qquad (n \to \infty)$$

ebenfalls eine Tauber-Bedingung für L ist. Weitere Anwendungen finden sich in Nr. 2. Z. B. ergibt sich für das Borel-Verfahren die von Karamata angegebene Tauber-Bedingung

$$\sum_{k=0}^{n} e^{\sqrt{k}} a_k = o\,(e^{\sqrt{n}}) \qquad (n \to \infty).$$

Wir schreiben (in Nr. 2) Σ für $\sum\limits_{n=0}^{\infty}$, (in Nr. 3) $\int$ für $\int\limits_{x=0}^{\infty}$ oder für $\int\limits_{t=0}^{\infty}$. Tauber-Bedingung wird ab jetzt mit TB abgekürzt.

2. SUMMIERUNG VON REIHEN

Die betrachteten Summierungsverfahren V seien permanent und additiv. Der Folgenindex n soll — wenn nichts anderes gesagt ist — die Zahlen 0, 1, ... durchlaufen. Es seien

$$\lambda = \{\lambda_n\}, \qquad p = \{p_n\}, \qquad q = \{q_n\} \tag{2.1}$$

komplexe Zahlenfolgen mit höchstens endlich vielen Nullen, so daß wir — wie der Beweis der Sätze 2.1 bis 2.12 zeigt — o. E. d. A. annehmen dürfen, daß alle Folgenglieder von Null verschieden sind. Bei festen Folgen (2.1) setzen wir für $n = 1, 2, \ldots$

$$f_n = f_n(\lambda, p, q) = \frac{q_{n-1}}{p_n \lambda_n},$$

$$g_n = g_n(\lambda, p, q) = \lambda_n q_n \left(\frac{1}{p_n \lambda_n} - \frac{1}{p_{n+1}\lambda_{n+1}}\right),$$

$$h_n = h_n(p, q) = \frac{q_n - q_{n-1}}{p_n},$$

und ferner

$$R = \sum_{n=1}^{\infty} |f_n - f_{n+1}|.$$

Weiter sei — bei vorgegebener Reihe $\Sigma\, a_n$ —

$$\delta_n = \delta_n(\lambda, p, q) = \frac{1}{q_n} \sum_{k=0}^{n} p_k \lambda_k a_k. \tag{2.2}$$

Die Symbole $o(1)$ und $O(1)$ sollen sich auf $n \to \infty$ beziehen. Wird eine Folge betrachtet, so schreiben wir statt „konvergent für $n \to \infty$" kurz „konvergent" oder „konv".

Nach (2.2) ist für $n \geqq 1$

$$\lambda_n a_n = \frac{q_n}{p_n}\,\delta_n - \frac{q_{n-1}}{p_n}\,\delta_{n-1}. \tag{2.3}$$

Hieraus erhält man

$$a_n = \frac{h_n \delta_n}{\lambda_n} + f_n(\delta_n - \delta_{n-1}) \equiv b_{1n} + c_{1n} \qquad \text{für} \qquad n \geqq 1 \tag{2.4}$$

oder auch

$$a_n = \frac{g_n \delta_n}{\lambda_n} + (f_{n+1}\delta_n - f_n \delta_{n-1}) \equiv b_{2n} + c_{2n} \qquad \text{für} \qquad n \geqq 1. \tag{2.5}$$

Wir führen noch die Symbole $T_\nu(o)$, $T_\nu(k)$, $T_\nu(O)$ $(\nu = 1,2)$ ein.

$T_\nu(o)$ soll heißen: $\lambda_n b_{\nu n} = o(1)$ und $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_{\nu n}$ konvergent,

$T_\nu(k)$ soll heißen: $\{\lambda_n b_{\nu n}\}$ konvergent und $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_{\nu n}$ konvergent,

$T_\nu(O)$ soll heißen: $\lambda_n b_{\nu n} = O(1)$ und $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_{\nu n}$ konvergent.

Unter Bezug auf (2.4) und (2.5) erhalten wir zwölf Hilfssätze, die wir in einer Tabelle zusammenfassen. Jeder Zeile der Tabelle entspricht eine Aussage der folgenden Bauart: *Genügen die Folgen* (2.1) *den Voraussetzungen A und erfüllt die Folge* $\{a_n\}$ *die Bedingung C, so gestatten die* a_n *eine Zerlegung* (2.4) (*in den Hilfssätzen* 2.1 *bis* 2.6) *oder* (2.5) (*in den Hilfssätzen* 2.7 *bis* 2.12) *mit D.*

Hilfssatz:	A	C	D
2.1.	$h_n = O(1)$, $R < \infty$	$\delta_n = o(1)$	$T_1(o)$
2.2.	$h_n = o(1)$, $R < \infty$	$\{\delta_n\}$ konv.	$T_1(o)$
2.3.	$\{h_n\}$ konv., $R < \infty$	$\{\delta_n\}$ konv.	$T_1(k)$
2.4.	$h_n = O(1)$, $R < \infty$	$\{\delta_n\}$ konv.	$T_1(O)$
2.5.	$h_n = o(1)$, $R < \infty$, $f_n = o(1)$	$\delta_n = O(1)$	$T_1(o)$
2.6.	$h_n = O(1)$, $R < \infty$, $f_n = o(1)$	$\delta_n = O(1)$	$T_1(O)$
2.7.	$g_n = O(1)$, $f_n = O(1)$	$\delta_n = o(1)$	$T_2(o)$
2.8.	$g_n = o(1)$, $\{f_n\}$ konv.	$\{\delta_n\}$ konv.	$T_2(o)$
2.9.	$\{g_n\}$ konv., $\{f_n\}$ konv.	$\{\delta_n\}$ konv.	$T_2(k)$
2.10.	$g_n = O(1)$, $\{f_n\}$ konv.	$\{\delta_n\}$ konv.	$T_2(O)$
2.11.	$g_n = o(1)$, $f_n = o(1)$	$\delta_n = O(1)$	$T_2(o)$
2.12.	$g_n = O(1)$, $f_n = o(1)$	$\delta_n = O(1)$	$T_2(O)$.

Die Beweise ergeben sich unmittelbar. Zum Nachweis der Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} c_{\nu n}$ $(\nu = 1,2)$ verwende man bei den Hilfssätzen 2.1 bis 2.6 die Kriterien von du Bois-Reymond und Dedekind.

Mit diesen Hilfssätzen beweist man nun leicht folgende zwölf Sätze, die wir wieder in Form einer Tabelle anschreiben. Dabei enthält diesmal jede Zeile der Tabelle einen Satz der folgenden Bauart: *Genügen die Folgen* (2.1) *den Voraussetzungen* A, *und ist* B *eine* TB *für* V, *so ist auch* C *eine* TB *für* V.

Satz:	A	B	C
2.1.	$h_n = O(1)$, $R < \infty$	$\lambda_n a_n = o(1)$	$\delta_n = o(1)$
2.2.	$h_n = o(1)$, $R < \infty$	$\lambda_n a_n = o(1)$	$\{\delta_n\}$ konv.
2.3.	$\{h_n\}$ konv., $R < \infty$	$\{\lambda_n a_n\}$ konv.	$\{\delta_n\}$ konv.
2.4.	$h_n = O(1)$, $R < \infty$	$\lambda_n a_n = O(1)$	$\{\delta_n\}$ konv.
2.5.	$h_n = o(1)$, $R < \infty$, $f_n = o(1)$	$\lambda_n a_n = o(1)$	$\delta_n = O(1)$
2.6.	$h_n = O(1)$, $R < \infty$, $f_n = o(1)$	$\lambda_n a_n = O(1)$	$\delta_n = O(1)$
2.7.	$g_n = O(1)$, $f_n = O(1)$	$\lambda_n a_n = o(1)$	$\delta_n = o(1)$
2.8.	$g_n = o(1)$, $\{f_n\}$ konv.	$\lambda_n a_n = o(1)$	$\{\delta_n\}$ konv.
2.9.	$\{g_n\}$ konv., $\{f_n\}$ konv.	$\{\lambda_n a_n\}$ konv.	$\{\delta_n\}$ konv.
2.10.	$g_n = O(1)$, $\{f_n\}$ konv.	$\lambda_n a_n = O(1)$	$\{\delta_n\}$ konv.
2.11.	$g_n = o(1)$ $f_n = o(1)$	$\lambda_n a_n = o(1)$	$\delta_n = O(1)$
2.12.	$g_n = O(1)$, $f_n = o(1)$	$\lambda_n a_n = O(1)$	$\delta_n = O(1)$

Die Beweise dieser Sätze laufen alle gleich. Es soll deshalb nur der Beweis von Satz 2.1 angegeben werden. Wir nehmen an, V sei ein Verfahren mit $\lambda_n a_n = o(1)$ als TB. Weiter sei $V\text{-}\Sigma\, a_n = s$ und — bei festen Folgen (2.1) mit $h_n = O(1)$, $R < \infty$ — $\delta_n = o(1)$ erfüllt. Zu beweisen ist $\Sigma\, a_n = s$. Nach Hilfssatz 2.1 gestatten die a_n eine Darstellung (2.4) mit $\lambda_n b_{1n} = o(1)$ und $\sum_{n=1}^{\infty} c_{1n}$ konvergent. Ist $\sum_{n=1}^{\infty} c_{1n} = c$ und setzen wir noch $b_{10} = a_0 + c$, $c_{10} = -c$, so haben wir für alle a_n die Darstellung

$$a_n = b_{1n} + c_{1n} \text{ mit } \lambda_n b_{1n} = o(1) \text{ und } \sum c_{1n} = 0.$$

Aus $V\text{-}\sum a_n = s$ und $V\text{-}\sum(-c_{1n}) = 0$ folgt $V\text{-}\sum b_{1n} = s$. Daraus schließt man auf $\Sigma\, b_{1n} = s$, was dann $\Sigma\, a_n = s$ zur Folge hat.

Wie schon oben bemerkt, gelten die Sätze 2.1 bis 2.12 auch dann, wenn endlich viele Glieder der Folgen (2.1) verschwinden. Bei den Folgen $\{f_n\}, \{g_n\}, \{h_n\}, \{\delta_n\}$ sind dann möglicherweise einige Anfangsglieder nicht definiert, was sich aber auf Bedingungen wie z. B. $h_n = O(1)$

nicht auswirkt. Bei der Bedingung $R < \infty$ ist gegebenenfalls mit der Summation erst bei einem späteren Index zu beginnen.

In den Sätzen 2.1 und 2.7 sind die Resultate aus [5] — soweit sie die Summierung von Reihen betreffen — als Spezialfälle enthalten.

Die obigen Hilfssätze zeigen, wie man auf einfache Weise Verallgemeinerungen der Sätze 2.1 bis 2.12 gewinnen kann. Die Inverse der Transformation, welche die Folge $\{\lambda_n a_n\}$ in die Folge $\{\delta_n\}$ überführt, ist gegeben durch eine Bandmatrix mit zwei Diagonalen [siehe (2.3)]. Allgemein sieht das so aus:

$$\lambda_n a_n = \alpha_{nn}\delta_n^* + \alpha_{n,n-1}\delta_{n-1}^* \qquad (n \geqq 1). \tag{2.6}$$

Analog zu (2.4) und (2.5) erhalten wir hieraus für $n \geqq 1$

$$a_n = h_n^*\delta_n^*/\lambda_n + f_n^*(\delta_n^* - \delta_{n-1}^*) \equiv b_{1n}^* + c_{1n}^*, \tag{2.7}$$

$$a_n = g_n^*\delta_n^*/\lambda_n + (f_{n+1}^*\delta_n^* - f_n^*\delta_{n-1}^*) \equiv b_{2n}^* + c_{2n}^*, \tag{2.8}$$

mit

$$f_n^* = -\frac{\alpha_{n,n-1}}{\lambda_n}, \quad g_n^* = \left(\frac{\alpha_{nn}}{\lambda_n} + \frac{\alpha_{n+1,n}}{\lambda_{n+1}}\right)\lambda_n, \quad h_n^* = \alpha_{nn} + \alpha_{n,n-1}.$$

Lassen wir die Sterne weg, so kann die obige Satz-Tabelle wörtlich für diesen Fall übernommen werden, wenn wir jede ihrer Zeilen folgendermassen interpretieren: *Genügen die Folgen λ, $\{\alpha_{nn}\}$, $\{\alpha_{n,n-1}\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ den Voraussetzungen* A *— wobei noch R sinngemäß von oben zu übernehmen ist — und ist* B *eine* TB *für V, so ist auch* C *eine* TB *für V.*

Ist die Inverse der Transformation, welche die Folge $\{\lambda_n a_n\}$ in die Folge $\{\delta_n\}$ überführt, durch eine Bandmatrix mit mehr als zwei Diagonalen oder — noch allgemeiner — durch eine Dreiecksmatrix gegeben, so lassen sich ähnliche Sätze aufstellen.

Wir behandeln ein Beispiel zum Fall (2.6). Es führt auf ein Resultat, das uns als Verallgemeinerung des Satzes 1.1 in einem Brief (Datum: 6. Dezember 1967) von Herrn D. Leviatan mitgeteilt wurde und mit seiner freundlichen Erlaubnis hier — in geringfügiger Modifikation — wiedergegeben sei. (Unabhängig davon stieß von einer anderen Seite her auch Herr M. Stieglitz [6] auf dieses Ergebnis.) Mit der Folge $\{\lambda_n\}$, von der wir jetzt $\lambda_0 = 0$, $\lambda_n \neq 0$ für $n \geqq 1$, $\lambda_n \neq -1$ für $n \geqq 1$ voraussetzen, bilden wir die Ausdrücke

$$d_{nk} = \prod_{m=k}^{n}\left(1 + \frac{1}{\lambda_m}\right)^{-1} \qquad (n = 1, 2, \ldots; k = 1, \ldots, n).$$

Setzen wir

$$(2.9) \qquad \delta_0 = 0, \qquad \delta_n = \sum_{k=1}^{n} d_{nk} a_k \qquad \text{für} \qquad n \geqq 1,$$

so gilt der Satz: *Ist* $\lambda_n a_n = o(1)$ *eine* TB *für* V, *so ist auch* $\delta_n = o(1)$ *eine* TB *für* V. Aus (2.9) ergibt sich nämlich

$$\lambda_n a_n = (\lambda_n + 1)\,\delta_n - \lambda_n \delta_{n-1}, \qquad f_n^* = 1, \qquad h_n^* = 1 \qquad \text{für} \qquad n \geqq 1,$$

und wir erhalten das soeben formulierte (im Gegensatz zu [5, Satz 2.1] z. B. auch $\lambda_n = \sqrt{n}$ zulassende) Resultat von Leviatan aus dem — im Anschluß an (2.6) angegebenen — Analogon zu Satz 2.1.

Wir geben eine Anwendung der Sätze 2.1 und 2.4. (Das gleiche Ergebnis würden auch die Sätze 2.7 und 2.10 liefern.) Für das Borel-Verfahren B_0 (vgl. Zeller [8, S. 134]) ist

$$(2.10) \qquad e^{-\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{n} e^{\sqrt{k}} a_k = o(1)$$

eine TB (Karamata [2, S. 11]). Mit Satz 2.1 zeigen wir allgemeiner: *Ist* $\sqrt{n}\, a_n = o(1)$ *eine* TB *für* V, *so ist auch* (2.10) *eine* TB *für* V. Dazu haben wir — mit $\lambda = \{\sqrt{n}\}$, $p_0 = 0$, $p_n = e^{\sqrt{n}}/\sqrt{n}$ für $n \geqq 1, q = \{e^{\sqrt{n}}\}$ — die Bedingungen A von Satz 2.1 zu verifizieren. Dabei ergibt sich

$$h_n = O(1), \qquad f_n \nearrow 1 \qquad \text{für} \qquad n \to \infty, \qquad \text{also} \qquad R < \infty.$$

Da auch die Bedingungen A von Satz 2.3 erfüllt sind, gilt weiter der Satz: *Ist* „$\sqrt{n}\, a_n$ *konvergent*“ *eine* TB *für* V, *so ist auch*

$$(2.11) \qquad e^{-\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{n} e^{\sqrt{k}} a_k \ \textit{konvergent}$$

eine TB *für* V. Insbesondere ist (2.11) eine TB für die permanenten Kreisverfahren (vgl. Zeller [8, S. 140]), da für alle diese $\sqrt{n}\, a_n = O(1)$ eine TB ist.

Eine Folgerung aus Satz 2.2 (bzw. 2.1) ist der Satz: *Ist* $\lambda_n = o(n)$ [*bzw.* $O(n)$] *und* $\lambda_n a_n = o(1)$ *eine* TB *für* V, *so ist*

$$\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} k a_k \ \textit{konvergent} \ [\textit{bzw.}\ o(1)]$$

eine TB *für* V. Zum Beweis nehme man $p_n = n/\lambda_n$, $q_n = n + 1$. Mit $\lambda_n = \sqrt{n}$ erhalten wir hieraus z. B. eine von Jakimovski [1, Theorem 2] angegebene TB für B_0.

3. LIMITIERUNG VON FUNKTIONEN

Die Sätze der vorigen Nummer lassen sich auf Verfahren zur Summierung uneigentlicher Integrale übertragen. Wir arbeiten, wie schon in [5], mit permanenten, additiven Verfahren zur Limitierung von Funktionen $s(x)$ der Klasse BV, unter dem Gesichtspunkt $x \to \infty$. Dabei soll die komplexwertige Funktion $s(x)$ zu BV gehören, wenn sie für $x \geqq 0$ definiert und für jedes $c > 0$ in $0 \leqq x \leqq c$ von beschränkter Variation ist. Die komplexwertige Funktion $a(x)$ gehöre zur Klasse L, wenn sie für $x \geqq 0$ definiert und für jedes $c > 0$ in $0 \leqq x \leqq c$ Lebesgue-integrierbar ist. Liegt ein Verfahren V und ein $a(x) \in L$ vor, so soll

$$\int a(x)\, \mathrm{d}x = s(V)$$

heißen, daß V-$\lim s(x) = s$ ist, wobei

$$s(x) = \int_0^x a(t)\, \mathrm{d}t \qquad \text{für} \qquad x \geqq 0$$

gesetzt ist. Bei gegebenem V verstehen wir unter dem Verfahren V im engeren Sinn das vorstehend definierte Verfahren zur Summierung uneigentlicher Integrale $\int a(x)\, \mathrm{d}x$ mit $a(x) \in L$.

Wir beschränken uns auf die Herleitung eines Analogons zu dem Spezialfall von Satz 2.1, der aus Satz 2.1 für positive λ_n, $p_n = 1$, $q_n = n + 1$ entsteht, und geben ohne Beweis ein Analogon zum entsprechenden Spezialfall von Satz 2.7 an.

Es sei $\lambda(x)$ stets eine für $x \geqq 0$ definierte, reelle, positive, stetige Funktion. Ferner sei — im Hinblick auf Satz 3.1 —

$$\lambda(x) \in \mathrm{BV} \tag{3.1}$$

und die (für $x \geqq 0$ erklärte und stetige) Funktion

$$f(x) = \frac{x+1}{\lambda(x)}$$

in $0 \leqq x < \infty$ von beschränkter Gesamtvariation, wofür wir kurz

$$R = \int |\, \mathrm{d}f(t)\, | < \infty \tag{3.2}$$

schreiben. Bei vorgegebenem $s(x) \in \mathrm{BV}$ sei

$$\delta(x) = \frac{1}{x+1} \int_0^x \lambda(t)\, \mathrm{d}s(t) \qquad \text{für} \qquad x \geqq 0, \tag{3.3}$$

wobei das auftretende Integral als Riemann-Stieltjes-Integral zu verstehen ist. Wegen der Stetigkeit von $\lambda(x)$ ist $\delta(x) \in \mathrm{BV}$.

Hilfssatz 3.0. a) *Durch* (3.3) *ist — bei gegebenem* $\delta(x)$ *— die Funktion* $s(x)$ *für* $x \geqq 0$ *bis auf eine additive Konstante eindeutig bestimmt.*

b) *Bei gegebenem* $\delta(x) \in \mathrm{BV}$ *mit* $\delta(0) = 0$ *wird* (3.3) *durch die (für* $x \geqq 0$ *existierende) Funktion*

$$s(x) = \int_0^x \frac{\delta(t)}{\lambda(t)}\,\mathrm{d}t + s(0) + \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}\delta(t) \tag{3.4}$$

[$s(0)$ *beliebig gewählt und dann festgehalten*] *identisch in* x ($x \geqq 0$) *erfüllt.*

c) *Ist* $R < \infty$, $\alpha(x) \in \mathrm{BV}$ *und* $\alpha(x) = o(1)$, *so existiert*

$$\int f(t)\,\mathrm{d}\alpha(t). \tag{3.5}$$

Beweis. a) Zu zeigen ist: Aus $\int_0^x \lambda(t)\,\mathrm{d}s(t) = 0$ für $x \geqq 0$ folgt $s(x)$ konstant für $x \geqq 0$. Wir setzen $T(x) = \int_0^x \lambda(t)\,\mathrm{d}s(t)$. Dann ist $T(x) \equiv 0$ für $x \geqq 0$. Ist $S(y)$ die totale Variation von $s(x)$ in $0 \leqq x \leqq y$, so gilt bei festem $b > 0$ für die totale Variation $V(b)$ von $T(x)$ in $0 \leqq x \leqq b$ die Beziehung

$$0 = V(b) = \int_0^b |\,\lambda(t)\,|\,\mathrm{d}S(t) \tag{3.6}$$

(vgl. Widder [7] S. 20, Theorem 12). Wegen $0 < d \leqq |\,\lambda(t)\,|$ für ein festes d und alle t aus $0 \leqq t \leqq b$ folgt aus (3.6)

$$\int_0^b \mathrm{d}S(t) = S(b) = 0.$$

Somit ist $s(x)$ konstant in $0 \leqq x \leqq b$. Da $b > 0$ beliebig war, ist $s(x)$ konstant für $x \geqq 0$.

b) Die nach (3.4) gebildete Funktion $s(x)$ gehört zur Klasse BV. Wir erhalten mit ihr

$$\int_0^x \lambda(t)\,\mathrm{d}s(t) = \int_0^x \lambda(t)\,\mathrm{d}\left\{\int_0^t \frac{\delta(y)}{\lambda(y)}\,\mathrm{d}y\right\} + \int_0^x \lambda(t)\,\mathrm{d}\left\{\int_0^t f(y)\,d\delta(y)\right\}.$$

Nach (3.1) ist $\delta(y)/\lambda(y) \in L$. Also ergibt sich

$$\int_0^x \lambda(t)\,\mathrm{d}s(t) = \int_0^x \delta(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^x (t+1)\,\mathrm{d}\delta(t) = (x+1)\,\delta(x).$$

c) Wegen $R < \infty$ konvergiert $f(x)$ für $x \to \infty$, also genügt es, die Existenz von $\int \alpha(t)\, df(t)$ zu beweisen. Dabei dürfen wir o. E. d. A. noch voraussetzen, daß $f(x)$ monoton wächst. Es sei $|\alpha(x)| \leqq M$ für ein $M > 0$ und für alle $x \geqq 0$. Zu einem gegebenen $\varepsilon > 0$ wählen wir $x_0 = x_0(\varepsilon)$ so, daß $f(x_2) - f(x_1) \leqq \varepsilon/M$ für $x_0 \leqq x_1 \leqq x_2$ ist. Dann ist

$$\left| \int_{x_1}^{x_2} \alpha(t)\, df(t) \right| \leqq M \int_{x_1}^{x_2} df(t) \leqq \varepsilon.$$

Aus Hilfssatz 3.0 erhalten wir folgenden, dem Hilfssatz 2.1 — bei obiger Spezialisierung von p und q — entsprechenden

Hilfssatz 3.1. *Genügt die Funktion $\lambda(x)$ den Voraussetzungen* (3.1) *und* (3.2), *und erfüllt die Funktion $s(x) \in \mathrm{BV}$ die Bedingung $\delta(x) = o(1)$, so gestattet $s(x)$ eine Zerlegung*

$$s(x) = u(x) + v(x) \qquad (x \geqq 0) \tag{3.7}$$

mit

$$u(x) = \int_0^x b(t)\, dt, \qquad b(x) \in L, \qquad \lambda(x)\, b(x) = o(1), \tag{3.8}$$

$$v(x) \in \mathrm{BV}, \qquad v(x) = o(1). \tag{3.9}$$

Beweis. Nach Hilfssatz 3.0 gestattet $s(x)$ die Darstellung (3.4), wobei $\int f(t)\, d\delta(t)$ existiert. Ist $\int f(t)\, d\delta(t) = c$, so ist der Hilfssatz bewiesen, wenn wir

$$b(x) = \begin{cases} \delta(x)/\lambda(x) + s(0) + c & \text{für} \quad 0 \leqq x \leqq 1 \\ \delta(x)/\lambda(x) & \text{für} \quad x > 1, \end{cases}$$

$$v(x) = \begin{cases} s(0) + \int_0^x f(t)\, d\delta(t) - [s(0) + c]\, x & \text{für} \quad 0 \leqq x \leqq 1 \\ \int_0^x f(t)\, d\delta(t) - c & \text{für} \quad x > 1 \end{cases}$$

setzen.

Mit Hilfssatz 3.1 ergibt sich — analog wie Satz 2.1 mit Hilfssatz 2.1 —

Satz 3.1. *Genügt die Funktion $\lambda(x)$ den Voraussetzungen* (3.1) *und* (3.2), *und ist $\lambda(x)\, a(x) = o(1)$ eine* TB *für das Verfahren V im engeren Sinn, so ist $\delta(x) = o(1)$ eine* TB *für V.*

Ganz ähnlich beweist man

Satz 3.7. *Genügt die für $x \geqq 0$ definierte, positive, stetig differenzierbare Funktion $\lambda(x)$ den Voraussetzungen*

$$\frac{x}{\lambda(x)} = O(1), \qquad \frac{x\lambda'(x)}{\lambda(x)} = O(1),$$

und ist $\lambda(x)\, a(x) = o(1)$ eine TB *für das Verfahren V im engeren Sinn, so ist $\delta(x) = o(1)$ eine* TB *für* V.

LITERATUR

[1] Jakimovski, A.: *On a Tauberian theorem by O. Szász.* Proc. Amer. Math Soc. 5, 67—70 (1954).
[2] Karamata, J.: *Sur les théorèmes inverses des procédés de sommabilité.* Paris: Hermann 1937.
[3] Kwee, B.: *On Perron's method of summation.* Proc. Cambridge Philos. Soc. 63, 1033—1040 (1967).
[4] Meyer-König, W., und H. Tietz: *On Tauberian conditions of type o.* Bull. Amer. Math. Soc. 73, 926—927 (1967).
[5] Meyer-König, W., und H. Tietz: *Über die Limitierungsumkehrsätze vom Typ o.* Studia Math. 31, 205—216 (1968).
[6] Stieglitz, M.: *Über ausgezeichnete Tauber-Matrizen.* Arch. Math. (Brno). 5, 227—233 (1969).
[7] Widder, D. V.: *The Laplace transform.* Princeton: Princeton University Press 1941.
[8] Zeller, K.: *Theorie der Limitierungsverfahren.* Berlin, Göttingen, Heidelberg: Springer 1958.

Universität Stuttgart
Mathematisches Institut A