Archivum Mathematicum

Albert Sade

Sur le premier système de Lukasiewicz

Archivum Mathematicum, Vol. 5 (1969), No. 4, 207--214

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/104702

SUR LE PREMIER SYSTÈME DE LUKASIEWICZ[1])

A. Sade

Hommage à M. O. Borůvka, à l'occasion de son soixante-dixième anniversaire

Présenté le 27. juillet 1969

1. INTRODUCTION

LUKASIEWICZ a donné son premier système d'axiomes pour le calcul des propositions en 1924 et l'a reproduit dans [4], p. 28. Il se compose des trois axiomes

$$(S)\begin{cases} .\mathrm{L1}, & CCxyCCyzCxz, \\ .\mathrm{L2}, & CCNxxx, \\ .\mathrm{L3}, & CxCNxy. \end{cases}$$

auxquels il faut ajouter les règles de substitution et de Modus Ponens.

On se propose d'étudier exhaustivement (S), 1° en logique bivalente, 2° en logique trivalente. On sait en effet que les conclusions ne sont pas nécessairement les mêmes dans les deux cas, [9], N° 12 & 13. L'indépendance d'un système formel dépend de la valence de la logique qu'il représente. Ainsi le couple d'axiomes dans [5], p. 52,

$$\mathrm{N1},\quad CxCyx = \mathrm{L18}; \qquad \mathrm{N2},\quad CCxCyzCCxyCxz = \mathrm{L35},$$

si l'on écarte la solution non cancellable $Cxy = V = 1$, a pour solution unique, en logique bivalente

$$Cxy = xy + y + 1, \text{ matrice } (00, 10, 01, 11) \to 1011,$$

alors qu'en logique trivalente, il en admet plusieurs, qui ne sont pas isomorphes, en particulier,

$$Cxy = 1 + x + x^2 + 2xy + 2x^2y,$$

dont la matrice, en désignant par E l'ensemble ordonné

$$E = (00, 01, 02; 10, 11, 12; 20, 21, 22),$$

est

$$E \to (111, 012, 111)$$

(Matrice de Slupecki, 1946, dans [6], p. 237) et,

$$Cxy = 1 + 2x^2 + 2xy + 2x^2y + xy^2 + 2x^2y^2,$$

[1]) Annoncé dans Notices A.M.S., 16 (1969), 69 T — E 66, p. 978.

de matrice

$$E \to (111, 012, 011).$$

Le cas de plus de trois valeurs ne sera pas abordé. L'introduction de logiques à valence de plus en plus élevée, et même transfinie, aboutit nécessairement à des systèmes n'ayant plus que des rapports lointains avec l'art de raisonner. Le moindre inconvénient qui en puisse résulter est de faire de la logique une annexe de la statistique et de lui faire perdre son caractère de rigueur en y mêlant des éléments stochastiques, avec tout ce que cela comporte ([11], p. 203) d'arbitraire et de conventionnel.

2. TABLE DES FONCTIONS PROPOSITIONNELLES DYADIQUES

Le tableau suivant donne, pour chaque foncteur de la logique bivalente, (i), la notation Polonaise; (ij), la représentation par un polynôme; (ijj), la matrice, abcd, définie comme l'application

$$(x, y) \to f(x, y) = (00, 10, 01, 11 \to abcd);$$

(iv), la représentation au moyen de régions ([7], N° 6), en posant $1 = S\setminus(P \cup Q)$, $2 = P\setminus Q$, $3 = Q\setminus P$, $4 = P \cap Q$, où P et Q sont les intérieurs de deux contours fermés; (v), la représentation ensembliste; (vi), la notation algébrique; (vij), les dénominations. S désigne le plan tout entier.

A	$xy + x + y$	0111	234	$Q \cup P$	$\vee$	Disjonction non exclusive.
B	$xy + y + 1$	1101	124	$(S\setminus Q) \cup P$		Pas à la fois $\neg x$ et y.
C	$xy + x + 1$	1011	134	$(S\setminus P) \cup Q$	$\Rightarrow$	Implication Philonienne.
D	$xy + 1$	1110	123	$S\setminus(P \cap Q)$	$\mid$	Négation alternative; pas à la fois x et y.
E	$x + y + 1$	1001	14	$S\setminus(P \div Q)$	$\longleftrightarrow$	Equivalence; x et y, ou ni l'un ni l'autre.
F	$x + 1$	1010	13	$S\setminus P$	N, $\neg$	Négation ou déni de x.
G	$y + 1$	1100	12	$S\setminus Q$		Déni de y.
V	1	1111	1234	S	$\models$, $\vdash$	Tautologie.
X	$xy + x + y + 1$	1000	1	$S\setminus(P \cup Q)$	$\downarrow$	Double négation, ni x ni y.
M	$xy + y$	0010	3	$Q\setminus P$		y mais pas x.
L	$xy + x$	0100	2	$P\setminus Q$		x mais pas y.
K	xy	0001	4	$P \cap Q$	&, $\wedge$	Copule.
J	$x + y$	0110	23	$P \div Q$	$\vee\vee$	Disjonction exclusive, x ou y, mais pas les deux.
I	x	0101	24	P		x, pour tout y.
H	y	0011	34	Q		pour tout x, y.
O	0	0000	$\varnothing$	$\varnothing$		Contradiction.

3. SOLUTION BIVALENTE DE (S)

(S) définit, sur le corps du second ordre, (0, 1), un système de trois équations fonctionnelles dont la résolution par les méthodes usuelles de l'algèbre se fait sans difficulté. On trouve, en écrivant MP pour modus ponens,

Rang	Nx	Cxy	L1	L2	L3	L20	MP
R1	$px + q$	1					—
R2	0	$xy + x + 1$		—			
R3	1	$x + y + 1$			—		
R4	1	$xy + x + 1$			—		
R5	1	$xy + x + y$	—			—	—
R6	$x + 1$	$xy + x + 1$					
R7	$x + 1$	$xy + x + y$	—			—	—

Le trait indique que l'axiome en tête de la colonne correspondante n'est pas vérifié.

Il est à remarquer que Lukasiewicz, ([4], p. 47), représente le modus ponens comme un axiome

$$\text{L20;} \quad CxCCxyy.$$

Or, L20 est vérifié par R1, R2, R3, R4, et R6, alors que la règle de détachement n'est visiblement pas applicable à R1, puisque, avec R1, on a $1 \to 0 = 1$. *Ainsi L20 n'est pas équivalent à MP, en logique bivalente.* On conclut que

Le système I de Lukasiewicz, en logique bivalente, a une solution et une seule, R6. Toute solution de L2, L3, respectant le modus ponens, est solution de L1, et L1 est inutile. Le système L2, L3, MP est indépendant car R1 satisfait tous les axiomes sauf MP, R2 remplit toutes les conditions, sauf L2 et R3 obéit à tous les axiomes, sauf L3.

Et, en fait, pour démontrer l'indépendance de L1 par rapport à L2 et L3, Lukasiewicz est obligé ([4], p. 74), de recourir à une matrice trivalente

$$E \to 111,\ 010,\ 110.$$

4. SOLUTION TRIVALENTE

La résolution algébrique, sur le corps du troisième ordre, (0, 1, 2) du système (S), avec MP, au moyen de coefficients indéterminés, fournit pour les polynômes

$$Cxy = a + bx + cy + dx^2 + fxy + gy^2 + hx^2y + kxy^2 + mx^2y^2,$$
$$Nx = px + q,$$

huit solutions, à savoir,

T1, $\begin{cases} Cxy = 1 + x + x^2 + xy + x^2y + xy^2 + x^2y^2; \; E \to 111, 010, 111 \\ Nx = x^2 + x + 1 = \mathrm{M13} \text{ (négation faible)}; (012 \to 101). \ [(8], \mathrm{N}^\circ 6); \end{cases}$

T2, $\begin{cases} Cxy = 1 + x + x^2 + 2xy + 2x^2y; \; E \to 111, 012, 111; \\ Nx = \mathrm{M13}, \end{cases}$

T3, $\begin{cases} Cxy = 1 + 2x + 2x^2 + xy + x^2y; \; E \to 111, 210, 111; \\ Nx = \mathrm{M13}. \end{cases}$

T4, $\begin{cases} Cxy = 1 + 2x + 2x^2 + 2xy + 2x^2y + 2xy^2 + 2x^2y^2; \\ Nx = \mathrm{M13}. \qquad E \to 111, 212, 111; \end{cases}$

Et les quatre groupoïdes isomorphes des précédents par la transposition $(0, 2) = t \to 2t + 2$.

Toutes ces solutions vérifient le modus ponens et aussi l'axiome L20 du N° **3**.

5. INDÉPENDANCE DE L1

Les fonctions

$$\begin{cases} E \to 111, 212, 011; \; Cxy = 1 + x + 2xy + 2x^2y + x^2y^2; \\ Nx = x + 2 = \mathrm{M5} \ ([8], \mathrm{N}^\circ 6), \ \mathrm{N} : 012 \to 201, \end{cases}$$

vérifient tous les axiomes, sauf L1, (pour $x = 2$, $y = 1$, $z = 0$).

La matrice donnée dans [4], p. 74.

$$\begin{cases} E \to 111, 010, 110; \; Cxy = 1 + x + x^2 + 2x^2y + 2xy^2; \\ Nx = 2x + 1 = \mathrm{M7}; \ 012 \to 102, \end{cases}$$

jouit de la même propriété; L1 n'est pas vérifié pour $x = 2, y = 0, z = 2$.

6. INDÉPENDANCE DE L2

Les fonctions

$$\begin{cases} E \to 111, 012, 011; \; Cxy = 1 + 2x^2 + 2xy + 2x^2y + xy^2 + 2x^2y^2 \\ Nx = 2x^2 + 1 = \mathrm{M19}; \ \mathrm{N} : 012 \to 100 \text{ (négation forte)}, \end{cases}$$

vérifient tout le système, sauf L2, (pour x = 2).

Les fonctions

$$\begin{cases} Cxy = 1 + 2x + 2xy + 2x^2y + 2xy^2 + x^2y^2, & E \to 111,\ 012,\ 211, \\ Nx = \mathrm{M7} = 2x + 1,\ 012 \to 102, & \end{cases}$$

données par Lukasiewicz, [4], p. 79, satisfont à la même condition, L2 n'étant pas vérifié pour $x = 2$.

7. INDÉPENDANCE DE L3

Les fonctions

$$\begin{cases} Cxy = 1 + 2x^2 + 2xy + 2x^2y^2,\ E \to 111,\ 010,\ 001, \\ Nx = x^2 + x + 1 = \mathrm{M13},\ \text{(négation faible)},\ 012 \to 101, \end{cases}$$

vérifient tout le système, sauf **L3**, (pour $x = 2$ et y arbitraire).

Dans [4], l'indépendance de L2 et celle de **L3** ne sont démontrées que dans le cas bivalent.

8. INDÉPENDANCE DE MP

Les fonctions

$$\begin{cases} Cxy = 1 + 2y + y^2 + x^2y + 2x^2y^2,\ E \to 110,\ 111,\ 111, \\ Nx = x^2 + x + 1 = \mathrm{M13},\ 012 \to 101, \end{cases}$$

vérifient tous les axiomes et ne satisfont pas MP car, si $X = 1$ et si $X \Rightarrow Y$, on ne peut pas en conclure $Y = 1$, puisque C10 = 1.

De même, les fonctions

$$\begin{cases} Cxy = 1 + xy + x^2y + 2xy^2 + 2x^2y^2,\ E \to 111,\ 110,\ 111, \\ Nx = x^2 + x + 1 = \mathrm{M13},\ 012 \to 101, \end{cases}$$

vérifient L1, L2 et **L3**, mais non MP, puisque C10 = 1.

9. CARACTÈRE COMPLET

La notion du caractère complet d'un système formel varie d'un auteur à l'autre. Il semblerait que l'on doive réserver la dénomination de système complet, seulement à ceux qui définissent, sur un ensemble donné, un système d'équations fonctionnelles ayant une solution est une seule, (ou, à la rigueur, n'ayant que des solutions isomorphes). En ce sens le système (S) n'est pas complet, en logique trivalente, puisqu'il admet, aux isomorphismes près, quatre solutions distinctes, T1, T2, T3, T4. Par exemple, il n'est pas possible de savoir, dans ce système, pour quelles valeurs des atomes l'expression

$$\mathfrak{F} = CxCCyyNCzz$$

est fausse ou ,,indécidable''. En effet, avec les solutions T1, T2, ou T3, on trouve

$$\mathfrak{F} = \text{M13} = x^2 + x + 1,\ 012 \rightarrow 101,$$

alors qu'avec la solution T4, on aboutit à

$$\mathfrak{F} = \text{M25} = 2x^2 + 2x + 1,\ 012 \rightarrow 121,$$

[(N) de TZU-HUA-HAO, dans [6], p. 238].

Sur T1, T2 ou T3, $\mathfrak{F}$ est toujours fausse ou vraie, et on peut toujours en décider, alors qu'avec T4, elle est toujours vraie ou en suspens, jamais fausse.

De même, les quatre solutions T ne définissent pas la même fonction $CCxxx$, mais respectivement $CCxxx$ = M24 $= 2x^2 + 2x$, M3 $= x$, M8 $=$ $= 2x + 2$, et M14 $= x^2 + x + 2$.

Toutefois, lorsque Lukasiewicz démontre ([4], p. 81 →) que le système L1, L2, L3 est complet, il n'entend pas ce vocable avec la même signification. Il veut dire que toute formule significative, c'est-à-dire correctement construite en respectant les règles de syntaxe propres au système (ce que l'on appelle parfois des expressions bien formées), et tautologique, peut être obtenue à partir des axiomes, au moyen des règles d'inférence. (Les formules construites par l'emploi incorrect de la syntaxe, comme $x \Rightarrow$, ou $x \Rightarrow \Rightarrow y$, sont dénuées d'intérêt, puisqu'elles n'ont aucune signification. Il serait, semble-t-il, plus naturel de qualifier celles-là d'expressions ,,mal formées'' que d'allonger inutilement la désignation des expressions correctes en adjoignant à celles-ci la qualification de ,,bien formées''.)

Au lieu de la longue démonstration de [4], l'argument suivant parait conduire à la même conclusion bien plus brièvement.

10. PREUVE DU CARACTÈRE COMPLET SU SYSTÈME (S), AU SENS PRÉCÉDENT

Soit un ensemble quelconque d'atomes et Φ une formule significative contenant k implications, (nombre de lettres C ou de signes $\Rightarrow$ dans Φ). Par exemple $CCxyCxz$ contient trois implications. Le nombre de ces formules est en rapport avec l'évaluation de celui des diverses manières d'effecturer un produit, [2].

Supposons que toutes les Φ avec k implications jouissent de la propriété suivante.

Hypothese H. *Tout système de valeurs des atomes qui rend Φ égale à 1 sur l'une des quatre matrices T1, T2, T3, T4, rend aussi Φ égale à 1 sur chacune des trois autres.*

Soit alors
$$G = A \Rightarrow B,$$
une formule avec $k + 1$ implications; chacune des expressions A et B exhibera au plus k implications et l'hypothèse H lui sera applicable. Donc les valeurs des atomes pour lesquelles A prend une valeur $\neq 1$ sur une des quatre matrices rendent également $A \neq 1$ sur les trois autres et, par conséquent, font acquérir à G la valeur 1 car, dans les quatre cas, $\forall x$, $0 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow x = 1$.

D'après H, les systèmes de valeurs des atomes qui rendent A égal à 1 sur une matrice rendent A égal à 1 sur les trois autres et G devient, dans les quatre cas $G = 1 \Rightarrow B$. Pour qu'il existe un système de valeurs des atomes rendant G vraie sur une matrice et non-vrai sur une autre, il faut et il suffit, d'après les matrices, que, pour ce système de valeurs, B prenne la valeur 1 sur la première et la valeur non-1 sur la seconde; or cela est contre l'hypothèse H. On en conclut que si G est tautologique sur une matrice il le sera aussi sur les trois autres.

Mais, pour $k = 1$, l'hypothèse H est vérifiée (d'après les matrices); donc, par induction,

Il n'existe aucune formule qui soit tautologique par rapport à l'une des quatre solutions T1, T2, T3, T4 sans être tautologique par rapport aux trois autres.

11. APPLICATIONS

On peut donc se servir indifféremment de l'une quelconque des quatre solutions T pour effectuer la computation d'une formule quelconque du système.

En particulier, on vérifie immédiatement le résultat établi par IMAI, ISEKI, [3], p. 437, à savoir que (S) contient comme thèses les deux axiomes *CpCqCrp* et *CCpqCNqCpr*, qui appartiennent au second système de Sobocinski, (1930), ou aussi la relation démontrée par Arai [1]. La démonstration de toutes les thèses de Lukasiewicz se fait immédiatement au moyen des polynômes T1, ou aussi en dressant les tables de vérité.

REFERENCES

[1] Y. Arai, *On axiom Systems of Propositional Calculi*, II. Proc. Japan Acad. 41, (1965), N° 98, pp. 440—442.
[2] E. Catalan, *Addition à une note sur une équation aux différences finies*, Journ. Math. pures appl. 4, (1839), 95—99.
[3] Y. Imai, K. Iseki, *On axiom Systems of Propositional Clculi*, I. Proc. Japan Acad. 41, (1965), N° 97, 436—439.
[4] Jan Lukasiewicz, *Elementy logiki matematycznei*, Warszawa—Oxford (1963).
[5] P. S. Novikov, *Elementi Matematicheskoi Logiki*, Moscou (1959).
[6] A. N. Prior, *Formal Logic*, Oxford, (1963).
[7] A. Sade, *Morphismes sur le groupoide ternaire des opérateurs propositionnels*, Ann. Soc. Sci. Bruxelles, 83, (1969), 19—33, Notices Amer. Math. Soc. 16, (1969), 323, N° 69T-E6.
[8] A. Sade, *Fonctions Propositionnelles Monadiques dans la Logique Trivalente*, Ann. Soc. Sci. Bruxelles, 83, (1969), pp. 202—213 Notices 16, (1969), 579, N° 69T-E32.
[9] A. Sade, *Sur les axiomes de GÖTLIND*, Notre-Dame Journal of Formal Logic, XI, (1970), pp. 81.83 88 Notices Amer. Math. Soc. 16, (1969), Aout. 69 T-E 53, p. 841.
[10] J. Slupecki, *Le calcul complet des propositions à 3 valeurs logiques*, Ann. Univ. Maria Curie Sklodowska, Sect. F. 1, (1949), 193—209.
[11] A. Weil, *Calcul des probabilités, méthode axiomatique*, Rev. Sci. 78 (1940), 201—208.

Cours de la République 364
Pertuis (Vaucluse), France