Květomil Stach

Über einige Zerlegungen in einer Kategorie

Archivum Mathematicum, Vol. 6 (1970), No. 4, 203--211

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/104725

ÜBER EINIGE ZERLEGUNGEN IN EINER KATEGORIE

Květomil Stach

(Eingegangen am 12. November 1968)

EINLEITUNG

In der Arbeit [3] untersuchte O. Borůvka die allgebraische Struktur der Lösungen oszillatorischer Differentialgleichungen 2. Ordung im Intervall $(-\infty, +\infty)$. Dabei spielten eine wichtige Rolle die links- und rechtsseitigen Zerlegungen einer Gruppe in bezug auf ihre Untergruppen [2 — Seite 142 ff.].

Ich wollte die Studien von O. Borůvka auf zweidimensionale Räume von stetigen Funktionen, die in beliebigen Intervallen definiert sind, verallgemeinern. Es zeigte sich, daß man in diesem Fall mit dem Gruppenbegriff nicht ausreichen kann, weswegen an Stelle der Gruppe eine Kategorie oder ein Gruppoid auftreten muß. Zu diesem Zwecke war es sehr nützlich, den Begriff der Zerlegung einer Gruppe in bezug auf ihre Untergruppen auch für den Fall einer Kategorie oder eines Gruppoids zu verallgemeinern. In der vorliegenden Arbeit löse ich diese Aufgabe. Die Hauptergebnisse sind in den Sätzen 2.4, 2.12, 2.13, 3.1, 3.7 und 3.8 enthalten. Die Sätze 2.13 und 3.7 sind Verallgemeinerungen des Satzes 2 im Buch [2], §21.7.

Die Kategorie und das Gruppoid nehme ich genau im Sinne des Buches [1], d. h.:

Eine Kategorie ist eine Algebra $C = (C; l, r, \varphi)$ vom Typ (1, 1, 2) mit vollständigen einstelligen Operationen l, r und einer partiellen binären Verknüpfung φ mit dem Definitionsbereich $D(\varphi)$, für die gilt für beliebige $x, y, z \in C$:

(M I + C I) $(x, y) \in \mathrm{D}(\varphi) \Leftrightarrow r(x) = l(y)$

(M II) $(x, y) \in \mathrm{D}(\varphi) \Rightarrow l(xy) = l(x) \wedge r(xy) = r(y)$

(M III) Es ist: $[l(x), x] \in \mathrm{D}(\varphi) \wedge [x, r(x)] \in \mathrm{D}(\varphi) \wedge l(x)\, x = xr(x) = x$

(C II) $(x, y) \in \mathrm{D}(\varphi) \wedge (y, z) \in \mathrm{D}(\varphi) \wedge (xy, z) \in \mathrm{D}(\varphi) \wedge$
$\wedge\ (x, yz) \in \mathrm{D}(\varphi) \Rightarrow (xy)\, z = x(yz) = xyz.$

Dabei wurde an Stelle von $\varphi(x, y)$ mit $(x, y) \in \mathrm{D}(\varphi)$ einfach xy geschrieben.

Ein Gruppoid ist eine Kategorie, für die noch die folgende Bedingung erfüllt it:

(C III) Zu jedem $x \in C$ gibt es ein $x^{-1} \in C$ mit $(x, x^{-1}) \in \mathrm{D}(\varphi)$, $(x^{-1}, x) \in \mathrm{D}(\varphi)$ und $x^{-1}x = r(x)$, $xx^{-1} = l(x)$.

Ich verweise oft auf die Arbeiten [1] und [2]. Bei diesen Hinweisen ist das Buch [1] als H und das Buch [2] als BI bezeichnet. Dabei bedeutet D eine Definition und S einen Satz. Z. B.: H-S.2.26 ist der Satz 26 vom 2. Kapitel des Buches H.

§ 1: DIE EINLEITUNGSBETRACHTUNGEN

Vereinbarung 1,1: In der ganzen Arbeit werden wir folgende Symbolik benutzen: Mit fetten großen lateinischen Buchstaben bezeichnen wir multiplikative Graphen [H-D.2.10], Kategorien [H-D.2.14] oder Gruppoide [H-D.2,19] und mit entsprechenden gewöhnlichen lateinischen Buchstaben die Trägermengen dieser Algebren [H-Seite 19]. Die Elemente einer Algebra $\mathbf{C}$ bezeichnet man mit kleinen lateinischen oder griechischen Buchstaben. Wenn $\mathbf{C}$ ein multiplikativer Graph und $a \in \mathbf{C}$ ist, so ist $l(a)$ die Links- und $r(a)$ die Rechtseinheit [H-Seite 60^{14-15}] des Elementes a. Das Produkt von Elementen $a \in \mathbf{C}$, $b \in \mathbf{C}$ [H-Seite 59_{10}] bezeichnet man $\varphi(a, b)$ oder kurz ab und den Definitionsbereich des Produktes bezeichnen wir $\mathrm{D}(\varphi)$.

Satz 1.1: Es sei $\mathbf{C}$ ein multiplikativer Graph und $\mathfrak{C}$ die Menge aller Teilmengen von C. Für je zwei A, $B \in \mathfrak{C}$ bezeichnet man mit AB die Menge $X \in \mathfrak{C}$, für die

$$x \in X \Leftrightarrow \exists\, a\, \exists\, b\, [a \in A \wedge b \in B \wedge (a, b) \in \mathrm{D}(\varphi) \wedge x = ab]$$

(X kann auch leer sein). Dann ist $\mathfrak{C}$ die Trägermenge eines Magmas, d. h. eines Gruppoids im Sinne BI-12.1. Dieses Gruppoid werden wir mit $\mathfrak{C}$ bezeichnen.

Satz 1.2: Es seien die Voraussetzungen S.1.1 erfüllt und E sei die Menge aller Einheitselemente von $\mathbf{C}$. Dann ist E das Einheitselement von $\mathfrak{C}$.

Satz 1.3: Es seien die Voraussetzungen des Satzes 1.1 erfüllt und $\mathbf{C}$ sei eine Kategorie. Dann ist $\mathfrak{C}$ eine Halbgruppe mit Einselement [BI-18.1].

Die Beweise der Sätze 1.1—1.3 sind in [4] enthalten.

Vereinbarung 1.2: In den weiteren Betrachtungen untersuchen wir oft die Produkte der Form $\{a\} B$, bzw. $B\{a\}$, wobei $a \in C$, $B \in \mathfrak{C}$ ist. Da kein Mißverständnis entstehen kann, schreiben wir statt $\{a\} B$ bzw. $B\{a\}$ kürzer aB bzw. Ba.

Satz 1.4: Es sei $\mathbf{G}$ ein Teilgruppoid [H-D.2.21] des Gruppoids $\mathbf{G}_1$ und $x \in G_1$. Wenn $l(x)$ non $\in G$, ist die Menge $x^{-1} Gx$ leer. Wenn $l(x) \in G$, ist die Menge $x^{-1}Gx \neq \emptyset$ und sie ist die Trägermenge einer, als Gruppoid aufgefaßten Gruppe.

Beweis: I. Es sei $l(x)$ non $\in G$. Wählen wir $g \in G$. Dann ist $r(g) \in G$ und deshalb $r(g) \neq l(x)$. Folglich (g, x) non $\in \mathbf{D}(\varphi)$ und $x^{-1}Gx = \emptyset$.

II. Es sei $l(x) \in G$.

a) Es gilt: $r(x^{-1}) = l(x)$ und deshalb

$$r(x) = x^{-1}x = x^{-1}\, l(x)\, x \in x^{-1}\, Gx. \tag{1}$$

wovon: $x^{-1}Gx \neq \emptyset$.

b) Wählen wir $y \in x^{-1}Gx$. Dann ist

$$l(y) = l(x^{-1}) = r(x) = r(y). \tag{2}$$

Jedes Element aus $x^{-1}Gx$ ist ein Gruppenelement [H-Seite 83_7] und nach (1) und (2) gehört seine Einheit zur Menge $x^{-1}Gx$.

c) Zu jedem $y \in x^{-1}Gx$ existiert $g \in G$ so, daß $y = x^{-1}gx$ ist. Da $\mathbf{G}_1$ ein Gruppoid ist, existiert $y^{-1} = (x^{-1}gx)^{-1} = x^{-1}g^{-1}x$. Dabei ist $g^{-1} \in G$ und deshalb $y^{-1} \in x^{-1}Gx$.

d) Es seien $y,\ z \in G$. Dann existieren $g,\ h \in G$ so, daß $y = x^{-1}gx$, $z = x^{-1}hx$. Folglich $yz = (x^{-1}gx)(x^{-1}hx) = x^{-1}g\, l(x)\, hx$. Da $l(x) \in G$ ist, ist auch $g\, l(x)\, h \in G$ und davon $yz \in x^{-1}Gx$.

Somit ist unser Satz bewiesen.

Vereinbarung 1.3: Die Gruppe aus S.1.4 nennen wir kurz die Gruppe $x^{-1}\mathbf{G}x$.

§ 2: DIE LINKS- UND RECHTSSEITIGEN ZERLEGUNGEN

Definition 2.1: Es sei $\mathbf{C}$ eine Kategorie und $\mathbf{G}$ ihr Teilgruppoid. Ferner sei $a \in C$. Die Menge aG heißt die links- und die Menge Ga die rechtsseitige Nebenklasse des Elements a in bezug auf $\mathbf{G}$ in der Kategorie $\mathbf{C}$.

Satz 2.1: Es sei $\mathbf{G}$ ein Teilgruppoid der Kategorie $\mathbf{C}$ und $a \in C$. Dann ist die rechtsseitige Nebenklasse Ga eine linksseitige Nebenklasse des Elements a in bezug auf das duale Gruppoid $\mathbf{G}^+$ in der dualen Kategorie $\mathbf{C}^+$ [H — Seite 71_7 und 82_8 und D.2.11].

Beweis: Nach [H] Seite 71_7 und 82_8 ist $\mathbf{C}^+$ eine Kategorie und $\mathbf{G}^+$ ein Gruppoid. Es gilt: $x \in Ga \Leftrightarrow \exists\ g[g \in G \wedge (g, a) \in \mathbf{D}(\varphi) \wedge x = \varphi(g, a)] \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (a, g) \in \mathbf{D}(\varphi^+) \wedge x = \varphi^+(a, g) \Leftrightarrow x \in a\,.\,G^+$, wobei wir mit $a\,.\,G^+$ die linksseitige Nebenklasse des Elements a in bezug auf das Gruppoid $\mathbf{G}^+$ in der Kategorie $\mathbf{C}^+$ bezeichnet haben.

Bemerkung 2.1: Eine Folgerung des Satzes 2.1 ist, daß jede die linksseitigen Nebenklassen betreffende Behauptung auch für die rechtsseitigen Nebenklassen gilt.

Satz 2.2: Es sei $\mathbf{C}$ eine Kategorie, $\mathbf{G}$ ihr Teilgruppoid und $a \in C$, $b \in C$. Die Mengen aG und bG sind entweder punktfremd oder identisch.

Beweis: I. Setzen wir voraus, daß $aG \cap bG \neq \emptyset$ ist. Dann existieren $x \in G$, $y \in G$ so, daß

$$(a, x) \in \mathrm{D}(\varphi), (b, y) \in \mathrm{D}(\varphi), ax = by \tag{1}$$

ist. Da **G** ein Gruppoid ist, existiert $x^{-1} \in G$ so, daß

$$(x, x^{-1}) \in \mathrm{D}(\varphi), xx^{-1} = l(x) \tag{2}$$

ist. Aus (1), (2), H-S.2.24 und H-S. 2.25 folgt:

$$a = b(yx^{-1}). \tag{3}$$

II. Setzen wir voraus, daß $p \in aG$ ist. Dann existiert $g \in G$ so, daß

$$(a, g) \in \mathrm{D}(\varphi), p = ag \tag{4}$$

ist. Aus (3) folgt:

$$p = b(yx^{-1})\, g.$$

Nach (1), (2), (3), (4) und H-D.2.10 ist

$$r(b) = l(y), r(y) = l(x^{-1}), r(x^{-1}) = l(g)$$

und nach H-S.2.26 ist

$$p = b(yx^{-1}\, g).$$

Da **G** ein Gruppoid ist, ist $z = yx^{-1}\, g \in G$ und deshalb ist $p \in bG$. Folglich $aG \subset bG$. Ähnlicherweise: $bG \subset aG$. Also $aG = bG$ und unser Satz ist bewiesen.

Satz 2.3: Es sei **G** ein Teilgruppoid der Kategorie **C** und $a \in C$. Dann ist entweder $aG = \emptyset$ oder $a \in aG$.

Beweis: Es sei $aG \neq \emptyset$. Dann existiert $g \in G$ so, daß $(a, g) \in \mathrm{D}(\varphi)$. Nach H-D.2.10 ist $r(a) = l(g)$. Da **G** ein Gruppoid ist, ist $r(a) = l(g) \in G$. Folglich: $a = ar(a) \in aG$.

Vereinbarung 2.1: Es sei **C** ein Graph und $X \subset C$. Mit $\mathrm{L}(X)$ bzw. $\mathrm{R}(X)$ bezeichnen wir die Menge, für die

$$a \in \mathrm{L}(X) \Leftrightarrow a \in C \wedge l(a) \in l(X)$$

bzw.

$$a \in \mathrm{R}(X) \Leftrightarrow a \in C \wedge r(a) \in \mathrm{r}(X)$$

gilt. Für jedes $x \in C$ schreiben wir statt $\mathrm{L}(\{x\})$ bzw. $\mathrm{R}(\{x\})$ kürzer $\mathrm{L}(x)$ bzw. $\mathrm{R}(x)$. Also $\mathrm{L}(x)$ ist die Menge aller solcher $a \in C$, für die $l(a) = l(x)$ gilt. Ähnlich $\mathrm{R}(x)$.

Satz 2.4: Es sei **G** ein Teilgruppoid der Kategorie **C**. Dann ist das System $\{aG\}_{a \in \mathrm{R}(G)}$ [resp. $\{Ga\}_{a \in \mathrm{L}(G)}$] eine Zerlegung der Menge $\mathrm{R}(G)$ [resp. $\mathrm{L}(G)$]. Speziell, wenn **G** ein Untergruppoid der Kategorie **C** ist [d. h. $l(C) = l(G) = E$], so ist $\{aG\}_{a \in C}$ [resp. $\{Ga\}_{a \in C}$] eine Zerlegung der Menge C.

Beweis: I. Es sei $a \in \mathrm{R}(G)$. Dann existiert $g \in G$ so, daß $r(a) = r(g)$ ist. Da **G** ein Gruppoid ist, ist $r(g) \in G$. Deshalb ist $a = ar(a) = ar(g) \in \in aG \neq \emptyset$.

II. Es sei $x \in aG$. Dann existiert $g \in G$, $(a, g) \in \mathrm{D}(\varphi)$ und $x = ag$. Daraus folgt, daß $r(x) = r(g)$ ist. Folglich $x \in \mathrm{R}(G)$ und deshalb ist $aG \subset \mathrm{R}(G)$ für jedes $a \in \mathrm{R}(G)$.

III. Aus I. folgt, daß keine Menge des Systems $\{aG\}_{a \in \mathrm{R}(G)}$ leer ist und jeder Punkt $a \in \mathrm{R}(G)$ in irgendwelcher Menge — nähmlich aG — dieses Systems liegt. Daraus und aus II. folgt, daß $\bigcup_{a \in \mathrm{R}(G)} aG = = \mathrm{R}(G)$ ist.

IV. Aus III. und S.2.2 folgt, daß $\{aG\}_{a \in \mathrm{R}(G)}$ eine Zerlegung der Menge $\mathrm{R}(G)$ ist.

V. Wenn **G** ein Untergruppoid von **C** ist, so ist $\mathrm{R}(G) = \mathrm{R}(E) = C$. Folglich $\{aG\}_{a \in C}$ ist eine Zerlegung der Menge C.

Definition 2.2: Die Zerlegung $\{aG\}_{a \in \mathrm{R}(G)}$ [resp. $\{Ga\}_{a \in \mathrm{L}(G)}$] aus S.2.4 heißt die linksseitige [resp. die rechtsseitige] Zerlegung der Menge $\mathrm{R}(G)$ [resp. $\mathrm{L}(G)$] — oder auch die linksseitige [resp. rechtsseitige] Zerlegung in der Kategorie **C** in bezug auf das Gruppoid **G**. Die linksseitige Zerlegung bezeichnen wir $\mathbf{C}_l/\mathbf{G}$, die rechtsseitige $\mathbf{C}_r/\mathbf{G}$.

Satz 2.5: Es sei **G** ein Teilgruppoid der Kategorie **C** und $a \in C$. Wenn $a \in G$ ist, ist $\emptyset \neq aG \subset G$. Wenn a non $\in G$ ist, ist $aG \cap G = \emptyset$.

Beweis: I. a) Es sei $a \in G$ und $x \in aG$. Dann existiert $g \in G$ so, daß $(a, g) \in \mathrm{D}(\varphi)$ und $x = ag$ ist. Da **G** ein Gruppoid ist, folgt aus $a \in G$, $g \in G$ auch $x \in G$. Deshalb $aG \subset G$.

b) Aus $a \in G$ folgt $r(a) \in G$ und deshalb $a = ar(a) \in aG$. Darum ist $aG \neq \emptyset$.

II. Es sei $aG \cap G \neq \emptyset$. Dann existiert $x \in aG \cap G$, d.h.

$$x \in aG \wedge x \in G. \tag{1}$$

Ferner $r(x) \in G$ und deshalb $x = xr(x) \in xG$. Folglich $x \in xG \cap aG$ und nach S.2.2

$$xG = aG. \tag{2}$$

Nach (1), (2) und I. ist $aG \subset G$. Nach S.2.3 ist $a \in aG$. Folglich $a \in G$. Unser Satz ist bewiesen.

Satz 2.6: Es seien die Voraussetzungen des Satzes 2.5 erfüllt. Das System $\{aG\}_{a \in G}$ [resp. $\{Ga\}_{a \in G}$] ist eine Zerlegung der Menge G.

Beweis: S.2.5 und S.2.2.

Satz 2.7: Es sei **G** ein Teilgruppoid der Kategorie **C**, $a, b \in C$ so, daß $b \in aG$ [resp. $b \in Ga$]. Dann ist $l(a) = l(b)$ [resp. $r(a) = r(b)$].

Beweis: Es sei $b \in aG$. Dann existiert $g \in G$ so, daß $(a, g) \in \mathrm{D}(\varphi)$ und $b = ag$. Nach H-D.2.10-MII ist $l(b) = l(ag) = l(a)$.

Satz 2.8. Es sei **G** ein Teilgruppoid der Kategorie **C** und a, $b \in G$. Dann ist $aG = bG$ gerade dann, wenn $l(a) = l(b)$ ist; $Ga = Gb$ gerade dann, wenn $r(a) = r(b)$ ist.

Beweis: I. Es sei $aG = bG$. Nach S.2.3, 2.5 und 2.6 ist $b \in aG$. Nach S.2.7 ist $l(b) = l(a)$.

II. Es sei $l(a) = l(b)$. Da **G** ein Gruppoid ist, folgt aus $b \in G$ auch $b^{-1} \in G$ und es ist $r(b^{-1}) = l(b) = l(a)$. Nach H-S.2.25 ist $a = l(a)\, a = l(b)\, a = (bb^{-1})\, a = b(b^{-1}\, a)$. Aber $b^{-1}\, a \in G$ und deshalb $a = b(b^{-1}a) \in bG$. Nach S.2.3 und S.2.6 ist $aG = bG$.

Der zweite Teil folgt aus S.2.1.

Satz 2.9: Es seien $\mathbf{G}_1 \subset \mathbf{G}_2$ Teilgruppoide der Kategorie **C**, a, $b \in C$, $aG_1 \cap bG_2 \neq \emptyset$. Dann ist $aG_1 \subset bG_2$.

Beweis: Wählen wir $x \in aG_1 \cap bG_2$. Nach S.2.3 und S.2.4 ist

$$xG_1 = aG_1\,;\; xG_2 = bG_2\,. \tag{1}$$

Es sei $y \in aG_1$. Nach (1) existiert $g \in G_1$ und deshalb auch $g \in G_2$ so, daß $(x, g) \in \mathrm{D}(\varphi)$ und $y = xg$. Daraus: $y \in xG_2 = bG_2$. Also $aG_1 \subset bG_2$.

Satz 2.10: Es seien $\mathbf{G}_1$, $\mathbf{G}_2$ Teilgruppoide der Kategorie **C**. Für jedes $a \in C$ ist entweder $aG_1 \cap \mathrm{L}(G_2) = \emptyset$ oder $aG_1 \subset \mathrm{L}(G_2)$ und entweder $G_1a \cap \mathrm{R}(G_2) = \emptyset$ oder $G_1a \subset \mathrm{R}(G_2)$.

Beweis: Nach S.2.8 ist für jedes $x \in aG_1$

$$l(x) = l(a). \tag{1}$$

Es sei $aG_1 \cap \mathrm{L}(G_2) \neq \emptyset$. Dann existiert $y \in aG_1 \cap L(G_2)$, d. h. $l(y) \in l(G_2)$. Nach (1) ist für jedes $x \in aG_1 : l(x) = l(a) = l(y) \in l(G_2)$ und deshalb $x \in \mathrm{L}(G_2)$. Folglich $aG_1 \subset \mathrm{L}(G_2)$. Den zweiten Teil beweisen wir ähnlicherweise.

Satz 2.11: Es seien $\mathbf{G}_1$, $\mathbf{G}_2$ Teilgruppoide der Kategorie **C**. Bezeichnen wir für jedes $x \in C$: $\bar{x} = xG_1$, $\bar{\bar{x}} = G_2x$. Dann ist für jedes $x \in C$: $\bigcup\limits_{y \in \bar{x}} \bar{\bar{y}} = \bigcup\limits_{y \in \bar{\bar{x}}} \bar{y}$

Beweis: Wählen wir $z \in \bigcup\limits_{y \in \bar{x}} \bar{\bar{y}}$. Dann existiert $y \in \bar{x}$ so, daß $z \in \bar{\bar{y}}$, also $z \in G_2y$. Es existiert $g_2 \in G_2$ so, daß $(g_2, y) \in \mathrm{D}(\varphi)$ und $z = g_2y$. Aber $y \in \bar{x} = xG_1$. Deshalb existiert $g_1 \in G_1$, $(x, g_1) \in \mathrm{D}(\varphi)$ und $y = xg_1$. Folglich $z = g_2(xg_1) = (g_2x)\, g_1$. Setzen wir $g_2x = \eta$. Dann ist $\eta \in G_2x = \bar{\bar{x}}$. und $z = \eta g_1 \in \eta G_1 = \bar{\eta}$. Davon $z \in \bigcup\limits_{y \in \bar{\bar{x}}} \bar{y}$. Wir haben bewiesen: $\bigcup\limits_{y \in \bar{x}} \bar{\bar{y}} \subset \bigcup\limits_{y \in \bar{\bar{x}}} \bar{y}$. Ähnlicherweise erhalten wir auch die umgekehrte Inklusion und unser Satz ist bewiesen.

Satz 2.12: Es seien die Voraussetzungen des Satzes 2.11 erfüllt. Ferner sei $M = \mathrm{R}(G_1) \cap \mathrm{L}(G_2) \neq \emptyset$. Die Systeme $\bar{L} = \{\bar{x}\}_{x \in M}$ und $\bar{\bar{R}} = \{\bar{\bar{x}}\}_{x \in M}$ sind komplementäre Zerlegungen der Menge M [BI-5.1].

Beweis: Da $M \neq \emptyset$ ist, sind die Systeme $\bar{L}$ und $\bar{\bar{R}}$ nicht leer. Für jedes $x \in M$ ist $x \in \mathrm{R}(G_1)$ und deshalb ist nach S.2.4:

$$(1) \qquad \emptyset \neq \bar{x} = xG_1 \subset \mathrm{R}(G_1).$$

Nach S.2.3 ist $x \in \bar{x}$. Ferner ist nach der Voraussetzung $x \in \mathrm{L}(G_2)$. Also $x \in xG_1 \cap \mathrm{L}(G_2)$. Nach S.2.10 ist

$$(2) \qquad xG_1 = \bar{x} \subset \mathrm{L}(G_2).$$

Aus (1) und (2) folgt:

$$(3) \qquad \bar{x} \subset \mathrm{R}(G_1) \cap \mathrm{L}(G_2).$$

Aus (3) und S.2.4 folgt, daß das System $\bar{L}$ eine Zerlegung der Menge M ist. Ähnlich erhalten wir auch, daß $\bar{\bar{R}}$ eine Zerlegung der Menge M ist. Aus S.2.11 folgt, daß $\bar{\bar{R}}$ und $\bar{L}$ komplementär sind.

Satz 2.13: Es seien $\mathbf{G}_1$, $\mathbf{G}_2$ Untergruppoide der Kategorie $\mathbf{C}$. Die Systeme $\{xG_1\}_{x\in C}$ und $\{G_2x\}_{x\in C}$ sind komplementäre Zerlegungen der Menge C.

Beweis: Es sei $x \in C$. Da $\mathbf{G}_1$ ein Untergruppoid ist, ist $r(x) \in G_1$ und deshalb $x \in \mathrm{R}(G_1)$. Ähnlicherweise: $x \in \mathrm{L}(G_2)$. Deshalb ist $C = \mathrm{R}(G_1) \cap \mathrm{L}(G_2)$ und unser Satz ist eine Folgerung des Satzes 2.12.

§ 3: DIE TOTALZERLEGUNGEN

Satz 3.1: Es sei $\mathbf{C}$ eine Kategorie und $\mathbf{G}$ ihr Teilgruppoid. Das System $\{aG \cap \mathrm{R}(a)\}_{a\in \mathrm{R}(G)}$ [resp. $\{Ga \cap \mathrm{L}(a)\}_{a\in \mathrm{L}(G)}$] ist eine Zerlegung der Menge $\mathrm{R}(G)$ [resp. $\mathrm{L}(G)$]. Speziell, wenn $\mathbf{G}$ ein Untergruppoid der Kategorie $\mathbf{C}$ ist, ist $\{aG \cap \mathrm{R}(a)\}_{a\in C}$ [resp. $\{Ga \cap \mathrm{L}(a)\}_{a\in C}$] eine Zerlegung der Menge C.

Beweis: Nach S.2.4 ist $\bar{A} = \{aG\}_{a\in \mathrm{R}(G)}$ eine Zerlegung der Menge $\mathrm{R}(G)$. Auch das System $\bar{B} = \{\mathrm{R}(a) \cap \mathrm{R}(G)\}_{a\in \mathrm{R}(G)}$ ist eine Zerlegung der Menge $\mathrm{R}(G)$. Das System $\{aG \cap \mathrm{R}(a)\}_{a\in \mathrm{R}(G)}$ ist eine Durchdringung [BI-Seite 8_{11}] der Zerlegungen $\bar{A}$ und $\bar{B}$ und deshalb ist es auch eine Zerlegung der Menge $\mathrm{R}(G)$.

Definition 3.1: Die Zerlegung $\{aG \cap \mathrm{R}(a)\}_{a\in \mathrm{R}(G)}$ resp. $\{Ga \cap \mathrm{L}(a)\}_{a\in \mathrm{L}(G)}$ aus S.3.1 heißt die links- resp. die rechtsseitige Totalzerlegung der Menge $\mathrm{R}(G)$ resp. $\mathrm{L}(G)$ oder auch die links- resp. rechtsseitige Totalzerlegung in der Kategorie $\mathbf{C}$ in bezug auf $\mathbf{G}$.

Satz 3.2: Die Totalzerlegung $\{aG \cap \mathrm{R}(a)\}_{a\in \mathrm{R}(G)}$ ist eine Verfeinerung [BI-2.4] der Zerlegung $\{aG\}_{a\in \mathrm{R}(G)}$.

Beweis: ist evident.

Satz 3.3: Es sei $\mathbf{G}$ ein Teilgruppoid und F die Menge aller Halbgruppenelemente [H-Seite 75^9] der Kategorie $\mathbf{C}$. Die Menge $G \cap F$ ist die Trägermenge eines Teilgruppoids $\mathbf{G} \cap \mathbf{F}$ der Kategorie $\mathbf{C}$. Ist $\mathbf{G}$ ein Untergruppoid von $\mathbf{C}$, so ist auch $\mathbf{G} \cap \mathbf{F}$ ein Untergruppoid.

Beweis: I. Es sei $x \in G \cap F$. Aus $x \in G$ folgt die Existenz des Elements $x^{-1} \in G$. Aus $x \in F$ folgt: $r(x) = l(x)$. Also $l(x^{-1}) = r(x) = l(x) = r(x^{-1})$ und deshalb $x^{-1} \in F$. Folglich $x^{-1} \in G \cap F$.

II. Es sei $(x, y) \in \mathrm{D}(\varphi) \cap [(G \cap F) \times (G \cap F)]$. Dann ist $r(x) = l(y)$ und $r(x) = l(x)$, $r(y) = l(y)$, $xy \in G$. Ferner $l(xy) = l(x) = r(x) = l(y) = = r(y) = r(xy)$. Also $xy \in G \cap F$.

Nach der Bemerkung hinter H-S.2.39 ist $G \cap F$ die Trägermenge eines Teilgruppoids der Kategorie $\mathbf{C}$.

III. Ist $\mathbf{G}$ ein Untergruppoid der Kategorie $\mathbf{C}$, so ist für jedes $\varepsilon \in E$ auch $\varepsilon \in G$. Ferner $l(\varepsilon) = \varepsilon = r(\varepsilon)$ und deshalb ist $\varepsilon \in F$. Also $E \subset F \cap G$ und $\mathbf{F} \cap \mathbf{G}$ ist ein Untergruppoid der Kategorie $\mathbf{C}$.

Satz 3.4: Es sei $\mathbf{G}$ ein Teilgruppoid und F die Menge aller Halbgruppenelemente der Kategorie $\mathbf{C}$. Die linksseitige [rechtsseitige] Totalzerlegung der Kategorie $\mathbf{C}$ in bezug auf $\mathbf{G}$ ist identisch mit der linksseitigen [rechtsseitigen] Zerlegung der Kategorie $\mathbf{C}$ in bezug auf das Gruppoid $\mathbf{G} \cap \mathbf{F}$.

Beweis: Nach S.3.3 ist $\mathbf{G} \cap \mathbf{F}$ ein Teilgruppoid der Kategorie $\mathbf{C}$. Wählen wir $a \in C$ und konstruieren wir die Mengen $aG \cap \mathrm{R}(a)$ und $a(G \cap F)$.

I. Es sei $x \in aG \cap \mathrm{R}(a)$. Dann existiert $g \in G$ so, daß $(a, g) \in \mathrm{D}(\varphi)$ und $x = ag$ und es gilt: $r(g) = r(x) = r(a) = l(g)$. Folglich $g \in G \cap F$ und $x \in a(G \cap F)$, also $aG \cap \mathrm{R}(a) \subset a(G \cap F)$.

II. Es sei $x \in a(G \cap F)$. Dann existiert $g \in G \cap F$ so, daß $(a, g) \in \mathrm{D}(\varphi)$ und $x = ag$. Folglich $g \in G$ und $l(g) = r(g)$, d. h. $r(x) = r(g) = l(g) = = r(a)$. Also $x \in aG \cap \mathrm{R}(a)$, was bedeutet, daß $a(G \cap F) \subset aG \cap \mathrm{R}(a)$ ist.

Damit ist unser Satz für die linksseitigen Zerlegungen bewiesen. Ähnlicherweise verläuft der Beweis auch für die rechtsseitigen Zerlegungen.

Satz 3.5: Es sei $\mathbf{C}$ eine Kategorie, $\mathbf{G}$ ihr Teilgruppoid und $a \in C$. Wenn $a \in G$ ist, ist $\emptyset \neq aG \cap \mathrm{R}(a)$, andernfalls ist $aG \cap R(a) \cap G = \emptyset$. Das System $\{aG \cap \mathrm{R}(a)\}_{a \in G}$ ist eine Zerlegung der Menge G.

Beweis: Für jedes $a \in C$ ist $a \in R(a)$ und deshalb folgt unser Satz aus S.2.5 und S.3.2.

Satz 3.6: Es sei $\mathbf{C}$ eine Kategorie, $\mathbf{G}$ ihr Teilgruppoid und $a, b \in C$ so, daß $b \in aG \cap \mathrm{R}(a)$ oder $b \in Ga \cap \mathrm{L}(a)$. Dann ist $r(a) = r(b)$ und $l(a) = l(b)$.

Beweis: Es sei $b \in aG \cap \mathrm{R}(a)$. Dann ist nach S.2.7 und S.3.2 $l(b) = = l(a)$ und aus $b \in \mathrm{R}(a)$ folgt $r(b) = r(a)$.

Satz 3.7: Es seien $\mathbf{G}_1$, $\mathbf{G}_2$ Teilgruppoide der Kategorie $\mathbf{C}$. Bezeichnen wir für jedes $x \in \mathbf{C}$: $\bar{x} = xG_1 \cap \mathrm{R}(x)$, $\bar{\bar{x}} = G_2x \cap \mathrm{L}(x)$. Ferner sei $M = R(G_1) \cap \mathrm{L}(G_2) \neq \emptyset$. Die Systeme $\{\bar{x}\}_{x \in M}$ und $\{\bar{\bar{x}}\}_{x \in M}$ sind komplementäre Zerlegungen der Menge M.

Beweis: Bezeichnen wir mit F die Menge aller Halbgruppenelemente von $\mathbf{C}$. Aus $G_1 \cap F \subset G_1$ folgt $\mathrm{R}(G_1 \cap F) \subset \mathrm{R}(G_1)$. Es sei $x \in R(G_1)$. Dann existiert $g \in G_1$ so, daß $r(x) = r(g)$ ist. Da $\mathbf{G}_1$ ein Gruppoid ist, ist $r(g) \in G_1$. Nach H-D.2.1 ist $r(g) \in F$ und $r(x) = r(g) = r[r(g)]$. Folglich $r(x) \in G_1 \cap F$ und $x \in \mathrm{R}(G_1 \cap F)$. Also $\mathrm{R}(G_1) \subset \mathrm{R}(G_1 \cap F)$. Unser Satz folgt jetzt aus S.2.12 und S.3.4.

Satz 3.8: Es seien $\mathbf{G}_1$ und $\mathbf{G}_2$ Untergruppoide der Kategorie $\mathbf{C}$. Bezeichnen wir wieder $\bar{x} = xG_1 \cap \mathrm{R}(x)$, $\bar{\bar{x}} = G_2x \cap \mathrm{L}(x)$. Die Systeme $\{\bar{x}\}_{x \in C}$ und $\{\bar{\bar{x}}\}_{x \in C}$ sind komplementäre Zerlegungen der Menge C.

Der Beweis verläuft ähnlich wie der des Satzes 2.13.

Satz 3.9: Es sei $\mathbf{G}$ eine als Gruppoid aufgefaßte Teilgruppe der Kategorie $\mathbf{C}$. Dann ist die linksseitige Zerlegung in der Kategorie $\mathbf{C}$ in bezug auf $\mathbf{G}$ identisch mit der linksseitigen Totalzerlegung in dieser Kategorie in bezug auf $\mathbf{G}$.

Beweis: Es ist $G \cap F = G$ und deshalb folgt unser Satz aus S.3.4.

LITERATURVERZEICHNIS

[1] Hasse Maria u. Michler Lothar, *Theorie der Kategorien* VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1966.

[2] Borůvka Otakar, *Grundlagen der Gruppoid und Gruppentheorie.* VEB Deutsch. Verlag der Wissensch, Berlin 1960.

[3] Borůvka O., *Über eine Charakterisierung der allgemeinen Dispersionen linearer Differentialgleichungen 2. Ordnung.* Math. Nachrichten — im Druck.

[4] Ehresmann Ch., *Maitrise de mathématiques: C_3 Algèbre — 1. Partie* — Sorbonne, Paris 1968.

Mathematisches Institut
Technische Hochschule, Ostrava
Tschechoslowakei