Mehmet Namik Oğuztöreli; Démètre J. Mangeron; S. Easwaran

Systèmes mathématiques aux structures entremelées. Problèmes aux limites pour certains systèmes différentiels aux différences, ordinaires ou aux dérivées totales au sens de M. M. Picone

Archivum Mathematicum, Vol. 8 (1972), No. 3, 131--136

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/104768

ARCH. MATH. 3, SCRIPTA FAC. SCI. NAT. UJEP BRUNENSIS,
VIII: 131-136, 1972

SYSTÈMES MATHÉMATIQUES AUX STRUCTURES ENTREMÊLÉES

PROBLÈMES AUX LIMITES POUR CERTAINS SYSTÈMES DIFFÉRENTIELS AUX DIFFÉRENCES, ORDINAIRES OU AUX DÉRIVÉES TOTALES AU SENS DE M. M. PICONE

MEHMET NAMIK OĞUZTÖRELI[1]), DÉMÈTRE J. MANGERON[2]) ET S. EASWARAN[3])

Dédiè à M. O. Borůvka à l'occasion de son 70ième anniversaire

(Présenté le 8. juillet 1970)

RÉSUMÉ

Les auteurs, tout en poursuivant leurs études consacrées à l'élaboration d'une *théorie générale des systèmes mathématiques aux structures entremêlées*, considèrent problèmes aux limites pour certains systèmes différentiels aux différences, ordinaires ou aux dérivées totales au sens de M. M. Picone.

1. Dans une série de leurs travaux antérieurs les auteurs ont étudié par différentes méthodes, parmi lesquelles on doit citer la programmation dynamique et celle des jeux différentiels [1]—[3], nombre de problèmes bien posés au sens d'Hadamard pour les extensions des systèmes de Sturm—Liouville aux opérateurs polyvibrants, dont le prototype est donné par le système linéaire aux dérivées partielles à caractéristiques réelles de même multiplicité

$$(1.1)\quad D_m[A(x)\, D_m u(x) + \lambda B(x)\, u(x)] + \lambda[B(x)\, D_m u(x) + C(x)\, u(x)] = 0, \; u \Big|_{\partial R} = 0,$$

et dont la nouveauté consiste dans le fait que le domaine ,,rectangulaire" $R = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_m) \mid a_i \leqq x_i \leqq b_i,\ i = 1, 2, \ldots, m\}$ est à m dimensions et le symbole D_m est celui de la dérivée polyvibrante de premier ordre ou bien de la ,,dérivée totale" au sens de M. M. Picone [4], [5], à savoir

$$(1.2)\qquad D_m \equiv \frac{\partial^m}{\partial x_1 \partial x_2 \ldots \partial x_m}.$$

---

[1]) Department of Mathematics, University of Alberta, Edmonton, Alberta, Canada. The research reported in this paper was supported in part by the National Research Council of Canada by Grant NRC-A4345 through the University of Alberta.

[2]) Polytechnic Institute of Jassy, Iaşi, Romania. À présent: Visiting Professor, Department of Mathematics, University of Alberta, Edmonton, Alberta, Canada.

The author wishes to express his sincere thanks to the University of Alberta for the invaluable conditions offered to him to develop his work in the Department of Mathematics of this University.

[3]) Department of Mathematics, University of Alberta, Edmonton, Alberta, Canada.

Dans quelques-unes de nos Notes consacrées à l'élaboration d'une théorie générale des systèmes mathématiques aux structures entremêlées [6], [7] les auteurs, tout en prenant le point de départ de toute une série de travaux, tels par ex. ceux de MM. R. Bellman and K. L. Cooke [8], E. Pinney [9] et C. Truesdell [10], devenus rapidement classiques, ont étudié nombre de problèmes concernant l'existence, l'unicité et la construction effective des solutions de différents systèmes fonctionnels-intégro-différentiels-aux différences, linéaires ou non linéaires, homogènes ou non, et ont établit, en particulier, quelques résultats qui s'encadrent dans la *théorie générale des fonctions spéciales* à un nombre quelconque de variables indépendantes [11].

Dans ce qui suit on considère quelques problèmes aux limites pour certains systèmes linéaires différentiels -aux différences, ordinaires ou bien aux derivées totales aux sens de M. M. Picone.

2. Soit le problème aux limites pour le sistème différentiel de second ordre linéaire et non homogène, aux différences par rapport à un paramètre α:

$$\frac{d^2}{dx^2}\, y(x;\,\alpha) = \lambda y(x;\,\alpha+1) + h(x;\,\alpha), \qquad y(0;\,\alpha) = y(\pi;\,\alpha) = 0. \tag{2.1}$$

Il est bien clair que le système (2.1) se réduit en absence du paramètre α au cas classique de Sturm—Liouville [12], [13]. On suppose que $h(x;\,\alpha)$ est une fonction continue pour $0 \leqq x \leqq \pi$ et pour tous $\alpha = a_0 + n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ On suppose en outre, afin de pouvoir assurer le plus simplement possible la convergence uniforme de la série (2.7) ci-dessous, que l'on a, α_0 étant un nombre donné, pour $0 \leqq x \leqq \pi$, $n = 0, 1, 2, \ldots$,

$$|\, h(x;\,\alpha+n)\,| \leqq M_1$$

et λ est un petit paramètre.

On en déduit de suite l'équation intégrale aux différences équivalente au système (2.1), à savoir

$$y(x;\,\alpha) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int G(x;\,\xi)\, h(\xi;\,\alpha)\, d\xi + \lambda \int_0^{\frac{\pi}{2}} G(x;\,\xi)\, y(\xi;\,\alpha+1)\, d\xi, \tag{2.2}$$

où la fonction de Green est donnée par

$$G(x;\,\xi) = \begin{cases} \dfrac{x(\xi-\pi)}{\pi} & \text{pour } x \leqq \xi, \\[2ex] \dfrac{\xi(x-\pi)}{\pi} & \text{pour } x \geqq \xi. \end{cases} \tag{2.3}$$

Puisque le noyau $G(x;\,\xi)$ est une fonction continue dans $0 \leqq x,\ \xi \leqq \pi$, on peut toujours trouver un nombre positif M_0 tel que l'on aie, dans $0 \leqq x, \xi \leqq \pi$, $|\, G(x;\,\xi)| \leqq$ $\leqq M_0$, $M_0 = \dfrac{\pi}{4}$. [4])

[4]) Étant donnée la possibilité de l'extension du problème formulě ci-dessus où l'on aura à faire avec d'autres fonctions de Green, on conserve dans ce qui suis la notation plus générale M_0 au lieu de la valeur concrète $\dfrac{\pi}{4}$.

Les itérées de Picard correspondantes à l'équation (2.2) s'écrivent

$$y_0(x; \alpha) = \int_0^\pi G(x; \xi)\, h(\xi; \alpha)\, d\xi,$$

$$(2.4) \qquad y_m(x; \alpha) = y_0(x; \alpha) + \lambda \int_0^\pi G(x; \sigma)\, y_{m-1}(\sigma; \alpha + 1)\, d\sigma =$$

$$= \sum_{n=0}^{m} \lambda \int_0^\pi G(x; \xi)\, h(\xi; \alpha + n)\, d\xi, \qquad m = 0, 1, 2, \ldots,$$

où l'on a mis

$$(2.5) \qquad G_0(x; \xi) = G(x; \xi), \qquad G_n(x; \xi) = \int_0^\pi G(x; \sigma)\, G_{n-1}(\varrho; \xi)\, d\sigma,$$

$$n = 1, 2, \ldots.$$

A la suite du fait que l'on a, dans $I = \{(x, \xi) |\ 0 \leqq x, \xi \leqq \pi\}$, les majorations

$$(2.6) \qquad 0 \leqq |\, G_n(x; \xi)| \leqq M_0{}^{n+1}\, \pi^n, \qquad \left| \int_0^\pi G_n(x; \xi)\, h(\xi; \alpha + n)\, d\xi \right| \leqq$$

$$\leqq M_1 M_0{}^{n+1} \pi^{n+1}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

a lieu le théorème suivant.

Théorème 1. — *La série*

$$(2.7) \qquad y(x; \alpha) = \sum_{n=0}^{\pi} \lambda^n \int_0^\pi G_n(x; \xi)\, h(\xi; \alpha + n)\, d\xi$$

est absolument et uniformément convergente dans I pour chaque $|\lambda| < \dfrac{1}{M_0 \pi}$ *et représ sente une solution du système* (2.1). *Dans l'espace de Banach de toutes les fonction- $y(x; \alpha)$ continues dans I pour tous $\alpha = \alpha_0 + n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ (ou bien pour $\alpha \geqq \alpha_0$) et douées de norme*

$$(2.8) \qquad ||\, y\, || = \sup_{\alpha} \max_{0 \leqq x \leqq \pi} |\, y(x; \alpha)|$$

la solution trouvée (2.7) *est aussi bien unique.*

Afin de démontrer la seconde partie du théorème ci-dessus, supposons que $Y(x; \alpha)$ soit une autre solution du système (2.1) La différence

$$(2.9) \qquad z(x; \alpha) = y(x; \alpha) - Y(x; \alpha)$$

satisfait donc au système homogéne

$$(2.10) \qquad \frac{d^2}{dx^2}\, z(x; \alpha) = \lambda z(x; \alpha + 1),\ z(0; \alpha) = z(\pi; \alpha) = 0$$

et par suite il en résulte

$$(2.11) \qquad z(x; \alpha) = \lambda \int_0^\pi G(x, \xi)\, z(\xi; \alpha + 1)\, d\xi,$$

d'où on en déduit les inégalités

$$(2.12) \qquad || z || \leqq | \lambda | M_0\pi \, || z || < || z ||$$

et par conséquent on a d'une manière nécessaire $z(x; \alpha) \equiv 0$.

3. Soit maintenant le problème aux limites concernant le système aux dérivées partielles aux caractéristiques réelles doubles[5])

$$(3.1) \qquad \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} u(x, y; \alpha) = \lambda u(x, y; \alpha + 1) + h(x, y; \alpha), \qquad u(x, y; \alpha)\Big|_{\partial R} = 0,$$

où ∂R est la frontière d'un domaine rectangulaire

$$R = \{(x, y) \mid a \leqq x \leqq c, b \leqq y \leqq d\},$$

$h(x, y; \alpha)$ est une fonction continue dans R pour tous $\alpha = \alpha_0 + n$, $n = 0, 1, \ldots$ (ou bien pour $\alpha \geqq \alpha_0$, α_0 étant un nombre donné) et λ -un paramètre. On suppose en outre, tout en conservant l'esprit de la remarque consernant la fonction $h(x; \alpha)$ ci-dessus, la validité de l'inégalité

(3.2) $| h(x, y; \alpha + n)| \leqq M_2$ pour $(x, y) \in R$, $\alpha = \alpha_0 + n$, $n = 0, 1, \ldots$ (ou bien pour $\alpha \geqq \alpha_0$).

L'équation intégrale aux différences, équivalente au système (3.1), est donnée par

$$(3.3) \qquad \begin{aligned} u(x, y; \alpha) &= \iint_R G(x, y; \xi_0\eta)\, h(\xi, \eta; \alpha)\, d\xi\, d\eta \\ &+ \lambda \iint_R G(x, y; \xi, \eta)\, u(\xi, \eta; \alpha + 1)\, d\xi\, d\eta, \end{aligned}$$

où $G(x, y; \xi, \eta)$ est une fonction que nous avons étudié auparavant avec ses différentes extensions, appellées par de nombreux auteurs „fonction de Mangeron" [16], [17]

Les itérées de Picard correspondantes au système (3.1) s'écrivent

$$(3.4) \qquad \begin{aligned} u_0(x, y; \alpha) &= \iint_R (x, y; \xi\eta)\, h(\xi, \eta; \alpha)\, d\xi\, d\eta, \\ u_n(x, y; \alpha) &= u_0(x, y; \alpha) + \lambda \iint_R G(x, y; \sigma, \tau)\, u_{n-1}(\sigma, \tau; \alpha + 1)\, d\sigma\, d\tau. \end{aligned}$$

On vérifie sans difficulté que l'on obtient

$$(3.5) \qquad u_m(x,y; \alpha) = \sum_{n=0}^{m} \lambda^n \iint_R G_n(x, y; \xi\eta)\, h(\xi, \eta; \alpha + n)\, d\xi\, d\eta, \qquad m = 0, 1, 2, \ldots,$$

où l'on a mis

$$(3.6) \qquad \begin{aligned} G_0(x, y; \xi, \eta) &= G(x, y; \xi, \eta), \\ G_n(x, y; \xi, \eta) &= \iint_R G(x, y; \sigma, \tau)\, G_{n-1}(\sigma, \tau; \xi, \eta)\, d\sigma\, d\tau, \qquad n = 1, 2, \ldots. \end{aligned}$$

---

[5]) Nous avons appelé les systèmes fonctionnels caractérisés par la présence des termes d'ordre supérieur de forme $\partial^{mn}u/\partial x_1^n\, \partial x_2^n \ldots \partial x_m^n$, *systèmes polyvibrants* [14], tandis que les équations correspondantes ont été nommées par différents auteurs "équations de Mangeron" [15].

Puisque la fonction $G(x, y; \xi, \eta)$ est continue dans R et par suite bornée dans ce domaine, on peut écrire, tout en conservant la signification de notre remarque 4),

$$(3.7) \qquad 0 \leqq | G(x, y; \xi, \eta) | \leqq M_0^* \text{ pour tous } (x, y), (\xi, \eta) \in R.$$

Par conséquent on a

$$(3.8) \qquad \begin{gathered} 0 \leqq | G_n(x, y; \xi, \eta) | \leqq M_0^{*n+1}(c - a)^n(d - b)^n, \\ n = 0, 1, 2, \ldots \end{gathered}$$

et donc

$$(3.9) \quad \left| \iint_R G_n(x, y; \xi, \eta)\, h(\xi, \eta; \alpha + n)\, d\xi\, d\eta \right| \leqq M_2 M_0^*(c - a)^{n+1}(d - b)^{n+1}.$$

On en déduit le théorème suivant.

Théoreme 2. — *La série*

$$(3.10) \qquad u(x,y; \alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \iint_R G_n(x, y; \xi, \eta)\, h(\xi, \eta; \alpha + n)\, d\xi\, d\eta$$

est absolument et uniformément convergente dans R pour chaque valeur de $| \lambda | < \dfrac{1}{M_0^*(c - a)\,(d - b)}$ *et représente une solution du système* (3.1). *Dans l'espace de Banach de toutes les fonctions $u(x, y; \alpha)$ continues dans R pour tous $\alpha = \alpha_0 + n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ (ou bien pour $\alpha \geqq \alpha_0$) et douées de norme*

$$(3.11) \qquad \| u \| = \sup_\alpha \max_R | u(x, y; \alpha) |$$

la solution trouvée (3.10) *est aussi bien unique.*

Afin de démontrer la seconde partie du théorème ci-dessus, supposons que $U(x, y; \alpha)$ soit une autre solution, dans le cadre des hypothèses admises, du système polyvibrant aux différences (3.1). Il s'ensuit que la différence

$$(3.12) \qquad v(x, y; \alpha) = u(x, y; \alpha) - U(x, y; \alpha)$$

satisfait au système homogène

$$(3.13) \qquad \frac{\partial^4}{\partial x^2\, \partial y^2} v(x, y; \alpha) = \lambda v(x, y; \alpha + 1), \qquad v(x, y; \alpha) |_{\partial R} = 0,$$

dont l'équation intégrale équivalente est

$$(3.14) \qquad v(x, y; \alpha) = \lambda \iint_R G(x, y; \zeta, \eta)\, v(\zeta, \eta; \alpha + 1)\, d\zeta\, d\eta.$$

D'où la suite des inégalités

$$(3.15) \qquad \| v \| \leqq | \lambda | M_0^*(c - a)\,(d - b) \| v \| < \| v \|$$

et par conséquent on a d'une manière nécessaire $| v(x, y; \alpha) | = 0$ et la solution trouvée est elle bien unique.

Remarques. — 1°. Faute de l'opérateur au différences qui figure dans les équations des systèmes (2.1) et (3.1), on retrouve les problèmes des spectres (dans l'hypothèse des systèmes homogènes) aujourd'hui classiques [18], [19]. Il n'en est rien de semblable pour nos systèmes différentiels aux différences.

2°. Si l'on fait usage des résultats de quelques-unes de nos Notes insérées dans les les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (Paris) [7], on peut exposer entre autres le contenu de cette Note tant pour un nombre quelconque de variables indépendantes, quant à ce que regarde l'ordre des opérateurs polyvibrants figurant dans les systèmes qui peuvent constituer l'extension directe du système (3.1).

3°. In serait intéressant de trouver des phénomènes physiques dont les modèles mathématiques adéquats sont différents systèmes aux structures entremêlées, ou bien d'en trouver, en suivant, par ex., les idées généreuses enfermées dans les problèmes de géométrisation des équations différentielles, ordinaires ou bien aux dérivées partielles, dûs à MM. O. Borůvka [20] et E. Bompiani [21], des interprétations géométriques de tels systèmes.

Reçu le juin 1972

BIBLIOGRAPHIE

[1] Mangeron D.: *Programmation dynamique des systèmes polyvibrants.* C. r. Acad. Sci., Paris, 266A, 1968, 870—873; 976—978; 1050—1053; 1103—1106; 1121—1124.

[2] Oğuztőreli M. N.: *Optimization in Distributed Parameter Control Systems. A. Dynamic Programming Approach.* Revue Roumaine Sci. Techn., Méc. Appl., 14, 1969, 93—114; 329 to 337; 561—577.

[3] Oğuztőreli M. N., Mangeron D.: *Problemi ottimali spettanti ai sistemi di controllo con parametri distribuiti.* Atti Accad. Naz. Lincei, Rend., Cl. sci. fis., mat. natur., (8), 45, 1968, 1—6; 142—146; 236—242.

[4] M. Picone, *Vita ed Opera,* Annuario Accad. Naz. dei XL, 1—29, 1968.

[5] Mangeron D,. Krivoshein L. E.: *Problemi concernenti vari equazioni integro-differenziali con derivate totali di Picone.* Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, 33, 1963, 226—266; 34, 1964, 344—368; 35, 1965, 341—364.

[6] Oğuztőreli M. N., Mangeron .D: *Mathematical Systems with mixed structures. On the solutions of some linear and nonlinear functional-integral equations.* Soviet Mathematics Doklady 12, 1971, 118—120; 187—191.

[7] Mangeron D., Oğuztőreli M. N.: *Sur les solutions d'une classe d'équations intégrofonctionnelles aux différences et opérateurs polyvibrants.* C. r. Acad. Sci., Paris, 271A, 1970, 309—312.

[8] Bellman R., Cooke K. L.: *Differential-Difference Equations,* Academic Press, New York, 1963.

[9] Pinney E.: *Ordinary Difference-Differential Equations.* University of California Press, Berkeley and Los Angeles, 1959.

[10] Truesdell C.: *An essay toward a unified Theory of special functions.* Ann. of Mathematics Stud., 18, 1948, 182 p.

[11] Oğuztőreli M. N., Mangeron D., Leung K. V.: *Calcolo con calcolatrici elettroniche delle soluzioni delle equazioni polivibranti e polivibranti generalizzate ed applicazioni.* Atti Accad. Naz. dei Lincei, Rend., Cl. sci. fis., mat. natur., (8), (sous presse).

[12] Bôcher M.: *Leçons sur les méthodes de Sturm dans la théorie des équations différentielles et ses développements modernes.* Paris, Gauthier-Villars, Paris, 1917.

[13] Mangeron D.: *Problemi al contorno per le equazioni alle derivate parziali con le caratteristiche reali multiple.* Rend. Accad. sci. fis., mat., Napoli, (4), 2, 1932, 29—40.

[14] Oğuztőreli M. N., Mangeron D.: *Darboux problem for a polyvibrating equation: Solution as an „F-equation".* Proc. Nat. Acad. Sci., U.S.A., 67, 1970, 1488—1492.

[15] Birkhoff G.: p. 206, Dans le volume "*Approximations with emphasis on spline functions*". Academic Press, New York, 1969.

[16] Salvadori M.: *Ricerche variazionali per gli integrali doppi in forma non parametrica.* Ann. Scuola Norm. Sup., Pisa, (2), 5, 1936, 51—72.

[17] Manaresi F.: *Applicazione di un procedimento variazionale allo studio di un'equazione differenziale alle derivate parziali con caratteristische reali doppie.* Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, 23, 1954, 163—213.

[18] Picone M.: *Nuovi metodi per il calcolo delle soluzioni delle equazioni alle derivate parziali della fisica matematica.* Ann. Sci. Univ. Jassy, 26, 1, 1940, 183—232.

[19] Picone M., Fichera G.: *Trattato di Analisi Matematica,* Tumminelli, Roma, 1958.

[20] Borůvka O.: *Differential equations and their applications.* Proc. Conf. Prague 1962, 27—38. Publ. House Czechoslovak Acad. Sci., Prague, 1963.

[21] Bompiani E.: *Sulla geometria delle equazioni a derivate parziali di Monge-Ampère.* Atti Accad. Naz. dei Lincei, Rend., Cl. sci. fis., mat. natur., (8), 46, 1969, 369—372.