Radu Rosca; Lieven Vanhecke

Sur une classe de variétés pseudo-isotropes

*Archivum Mathematicum*, Vol. 9 (1973), No. 1, 9--18

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/104786`

ARCH. MATH. 1, SCRIPTA FAC. SCI. NAT. UJEP BRUNENSIS
IX:9—18 1973

# SUR UNE CLASSE DE VARIÉTÉS PSEUDO-ISOTROPES

R. Rosca, L. Vanhecke

(Présénté le 20 juin 1972)

## INTRODUCTION

Une $C^\infty$-variété immergée dans une variété lorentzienne $V_L$ a été définie dans [9], [10], [11] comme étant *pseudo-isotrope* (notée $V_{ps}$) si la représentation sphérique par rapport à un vecteur normal spatial est *amétrique*. Dans le travail actuel on étudie des pareilles variétés de dimension ou codimension 2, immergées dans un espace de Minkowski$\mathscr{M}^{2+n}$. Dans le cas de l'immersion $x : V_{ps}^2 \to \mathscr{M}^{2+n}$ on suppose en plus que toutes les formes de connexion normales spatiales associées à $x$ sont identiquement nulles (une pareille connexion est dénommée une *connexion normale spatiale triviale*). L'immersion $x : V_{ps}^2 \to \mathscr{M}^{2+n}$ met alors en évidence une 1-forme $\omega$ et un champ isotrope $I$ dénommés respectivement *forme caractéristique* et *champ caractéristique* associé à $x$. Deux cas importants se présentent suivant que le $\mathscr{M}$-index $V_{ps}^2$ est 1 ou 0. Dans le second cas ($\mathscr{M}$-index $V_{ps}^2 = 0$) la variété $V_{ps}^2$ est *cylindrique* et présente certaines analogies avec un type de variétés cylindriques étudié dans l'espace $E^{2+n}$ par K. Shiohama [13].

Dans le cas de l'immersion $x : V_{ps}^2 \to M^{2+n}$ on définit sur $V_{ps}^2$ une certaine structure *presque cosymplectique* $\boldsymbol{C}_{pc}(\Omega, \alpha)$, *cosymplectique* $\boldsymbol{C}(\Omega, \alpha)$ si $n = 2m + 1$ ou *symplectique* $S(\Omega)$ si $n = 2m$. Différentes propriétés afférentes à ces structures qui font intervenir le champ $I$ et la forme $\omega$ sont mises en évidence.

1. $V_s^2$ étant une C$^\infty$-variété spatiale 2-dimensionnelle (la métrique de $V^2$ est par définition définie négative), soit $x : V_s^2 \to \mathscr{M}^{2+n}$ une immersion de $V_s^2$ dans un espace de Minkowski $\mathscr{M}^{2+n}$ (de signature hyperbolique). Si $F(V_s^2)$ et $F(\mathscr{M}^{2+n})$ sont respectivement les faisceaux des repères orthonormés de $V_s^2$ et $\mathscr{M}^{2+n}$, soit $B \subset V_s^2 \times F(V_s^2)$ le *fibré principal* des repères adaptés tels que les vecteurs $e_i$ $(i, j, k = 1, 2)$ soient tangents à $V_s^2$ et les vecteurs $e_{i^*}$ $(i^*, j^*, k^* = 3, 4, \ldots, n + 2)$ soient normaux en $x(p)$ $(p \in V_s^2)$. Notons par $e_{r^*}$ $(r^*, s^*, t^* = 1, 2, \ldots, n + 1)$ les vecteurs *spatiaux* d'un repère quelconque $b \in B$ et par $T_p(V_s^2)$ le plan tangent en $p$ à $V_s^2$. Si $\omega^i$ sont les formes duales de $e_i$, induites par $x$, on peut écrire

$$\mathrm{d}p = -\omega^i \otimes e_i \tag{1}$$

et $V_s^2$ est alors structurée par la connexion

$$\begin{aligned} \nabla e_{r^*} &= \omega_{r^*}^A \otimes e_A, \\ \nabla e_{n+2} &= -\omega_{n+2}^{r^*} \otimes e_{r^*}, \end{aligned} \tag{2}$$

où $\omega_A^B = \gamma_{Ai}^B \omega^i (A, B, C = 1, 2, \ldots, n+2)$ sont les formes de connexion induites par $x$. Eu égard à (1) et (2) le premier et le second groupe des équations de structure qui résultent de l'immersion $x$ s'écrivent respectivement

$$(3) \qquad d \wedge \omega^i = \omega^j \wedge \omega_j^i,$$

$$(4) \qquad \begin{gathered} d \wedge \omega_{s^*}^{r^*} = \varepsilon_A \omega_{s^*}^A \wedge \omega_A^{r^*}, \quad (\varepsilon_{r^*} = 1, \varepsilon_{n+2} = -1) \\ d \wedge \omega_{s^*}^{n+2} = \omega_{s^*}^{r^*} \wedge \omega_{r^*}^{n+2}. \end{gathered}$$

2. Une variété 2-dimensionnelle telle que la représentation sphérique par rapport à un vecteur normal genre espace soit *amétrique* (isotrope) a été définie dans [9] comme étant une *variété pseudo-isotrope*. Il est manifeste que l'on peut considérer différents types de pareilles variétés suivant que l'on impose à un ou plusieurs vecteurs normaux genre espace d'admettre un représentation sphérique amétrique. Dans ce travail nous étudierons le cas où pour *tous* les vecteursnormaux genre espace $e_r$ $(r, s, t = 3, 4, \ldots, n+1)$ on a

$$(5) \qquad \langle \nabla e_r, \nabla e_r \rangle = 0.$$

Nous supposons de plus que les formes de connexion normales spatiales $\omega_r^s$ associées à l'immersion $x$ sont identiquement nulles. Nous dirons qu'une pareille variété est alors à *connexion normale spatiale triviale*. Une variété douée d'une pareille connexion et qui satisfait à (5) sera notée par $V_{ps}^2$.

Eu égard à la connexion (2) la relation de définition (5) permet de poser

$$(6) \qquad \begin{gathered} \omega_r^{n+2} = \omega_r, \\ \omega_1^r = \omega_r \cos \varphi_r, \quad \omega_2^r = \omega_r \sin \varphi_r, \quad \varphi_r \in \mathscr{D}(V_{ps}^2). \end{gathered}$$

La différentiation extérieure des équations

$$(7) \qquad \omega^r = 0,$$

$$(8) \qquad \omega_s^r = 0$$

donne

$$(9) \qquad \varphi_r = \varphi, \quad \omega_r = t_r \omega, \quad t_r \neq 0 \in \mathscr{D}(V_{ps}^2)$$

où l'on a posé

$$(10) \qquad \omega = \omega^1 \cos \varphi + \omega^2 \sin \varphi.$$

Les relations (2), (6), (8), (9) et (10) permettent d'écrire

$$(11) \qquad \nabla e_r = -t_r \omega \otimes I$$

où $I$ est un *vecteur isotrope* (réel) défini par

$$(12) \qquad I = \cos \varphi e_1 + \sin \varphi e_2 - e_{n+2}.$$

L'égalité (12) montre que $I$ est la différence du champ tangentiel $t = \cos \varphi e_1 + \sin \varphi e_2 \in T_p(V_{ps}^2)$ et du vecteur normal temporel. La forme $\omega$ et le vecteur $I$ seront dénommés respectivement la *forme caractéristique* et le *vecteur caractéristique* associés à l'immersion $x : V_{ps}^2 \to \mathscr{M}^{2+n}$.

3. Comme on peut toujours diagonaliser l'une des secondes formes fondamentales associées à l'immersion d'une variété dans un espace quelconque, nous supposons que cette opération est effectuée pour la seconde forme fondamentale correspondant au vecteur temporel. Dans ce cas on peut écrire

$$\omega_1^{n+2} = \lambda\omega^1, \qquad \omega_2^{n+2} = \mu\omega^2, \qquad \lambda, \mu \in \mathscr{D}(V_{ps}^2) \tag{13}$$

et eu égard à (13) la différentiation extérieure de (6) donne:

$$\begin{aligned} &(\omega_1^2 + \mathrm{d}\varphi) \wedge \omega + (\lambda\omega^1 \sin\varphi - \mu\omega^2 \cos\varphi) \wedge \omega. \\ &(\mathrm{d}\ln t_r - \lambda\omega^1 \cos\varphi - \mu\omega^2 \sin\varphi) \wedge \omega + d \wedge \omega = 0. \end{aligned} \tag{14}$$

Il est facile de voir qu'en général on a

$$\begin{aligned} d \wedge \omega &= (\omega_1^2 + \mathrm{d}\varphi) \wedge {}_*\omega, \\ d \wedge {}_*\omega &= (\omega_1^2 + \mathrm{d}\varphi) \wedge \omega, \end{aligned} \tag{15}$$

où

$${}_*\omega = -\omega^1 \sin\varphi + \omega^2 \cos\varphi$$

est la *forme adjointe* de $\omega$ par rapport à la métrique de $V_s^2$. Ces équations montrent aussitôt:

$$\omega_1^2 + \mathrm{d}\varphi = 0 \Leftrightarrow \Delta\omega = 0 \tag{16}$$

et à l'aide de (14) il résulte

$$\lambda + \mu = 0. \tag{17}$$

Cette relation exprime que si (16) à lieu, alors la variété $V_{ps}^2$ est *minimale* dans la direction du vecteur normal temporel, d'où la

**Proposition.** *Si la forme caractéristique d'une variété $V_{ps}^2$ est harmonique, alors la variété est plate et minimale dans la direction du vecteur normal temporel.*

**Remarques.** 1. Considérons la *structure symplectique* $S(V_{ps}^2, \Omega)$ définie sur $V_{ps}^2$ par la 2-forme $\Omega = \omega^1 \wedge \omega^2$ (élément d'aire) et les isomorphismes $X \in T(V_{ps}^2) \to X \lrcorner\, \Omega \in \wedge^1 (V_{ps}^2)$ définis par $\omega = h \lrcorner\, \Omega$ et ${}_*\omega = {}_*h \lrcorner\, \Omega$. Le *crochet de Poisson* relativement à $S(V_{ps}^2, \Omega)$, étant comme on sait (le crochet de Poisson s'obtient en transportant le crochet de Lie de $T(V_{ps}^2)$ dans $\wedge^1(V_{ps}^2)$) défini par [3]

$$(\omega, {}_*\omega) = [h, {}_*h] \lrcorner\, \Omega \tag{18}$$

on trouve après calculs

$$(\omega, {}_*\omega) = -{}_*(\omega_1^2 + \mathrm{d}\varphi). \tag{19}$$

De la il résulte

$$(\omega, {}_*\omega) = 0 \Leftrightarrow \omega_1^2 + \mathrm{d}\varphi = 0 \tag{20}$$

et par conséquent le crochet de Poisson de la forme caractéristique et son adjointe est nulle si et seulement si cette forme est *harmonique*.

2. Une forme $\alpha$ sur une variété différentiable compacte définit une *transformation infinitésimale conforme* si le tenseur $t(\alpha) = 0$ (voir Lichnerowicz [4]). Puisque l'on a (sous forme invariante)

(21) $$t(\alpha)_{ij} = D_j\alpha_i + D_i\alpha_j + \frac{2}{n} g_{ij}\delta\alpha,$$

(22) $$D_i\alpha_j = \frac{\partial\alpha_j}{\partial\omega^i} - \gamma^k_{ji}\alpha_k,$$

en effectuant le calcul pour une $V^2_s$ compacte et pour la forme $\omega$ on trouve

(23) $$t(\omega)_{ij} = 0 \Leftrightarrow \omega^2_1 + d\varphi = 0.$$

On peut donc dire que $\omega$ définit une transformation infinitésimale conforme si et seulement si $\omega$ est harmonique.

3. Si $\omega^2_1 + d\varphi = 0$ et $\lambda = \mu = 0$, alors on trouve après un calcul élémentaire que $I$ est un *champ parallèle* [15].

4. Etudions maintenant certaines propriétés de rigidité d'une variété $V^2_{ps}$. Eu égard aux relations (1) et (2) les secondes formes fondamentales sont exprimées par

(24) $$\varphi_r = -\langle dp, \nabla e_r\rangle = t_r\omega \otimes \omega,$$

(25) $$\varphi_{n+2} = -\langle dp, \nabla e_{n+2}\rangle = -(\lambda\omega^1 \otimes \omega^1 + \mu\omega^2 \otimes \omega^2).$$

Ces expressions montrent que *l'invariant arithmétique* de Chern [2] est égal à deux ($\omega \neq 0$) et que les secondes formes fondamentales qui correspondent aux vecteurs spatiaux $e_r$ sont *développables*. L'espace $\mathcal{M}^{2+n}$ étant plat et les courbures de Lipschitz—Killing correspondantes aux vecteurs $e_r$ étant nulles, on trouve que la courbure intrinsèque $K_{in}$ de la variété en $p$ a pour expression

(26) $$K_{in} = \lambda\mu.$$

Cette expression de $K_{in}$ montre que si la variété $V^2_{ps}$ est minimale dans la direction du vecteur normal temporel $e_{n+2}$ alors elle est *anti-convexe*. Si l'on suppose que la seconde forme fondamentale afférente à $e_{n+2}$ est *conforme* à la métrique de $V^2_{ps}$, on trouve à l'aide de (13)

$$\lambda = \mu \rightarrow \lambda = \text{const}.$$

Dans ce cas la variété $V^2_{ps}$ est *convexe*.

Considérons maintenant le champ normal

(27) $$X = \xi^r e_r + \xi^{n+2} e_{n+2} \in T^\perp_p(V^2_{ps}).$$

En nous rapportant à la définition donnée dans [6] du *$\mathcal{M}$-index* d'une variété immergée, on trouve dans le cas qui nous occupe

(28) $$\mathcal{M}\text{-}index\ V^2_{ps} = \dim \{\xi^r(\gamma^r_{ij}) + \xi^{n+2}(\gamma^{n+2}_{ij})\}$$

où

(29) $$\sum_r \xi^r\gamma^r + \xi^{n+2}\gamma^{n+2} = 0,$$

$\gamma^r$, $\gamma^{n+2}$ traces des matrices $(\gamma^r_{ij})$, $(\gamma^{n+2}_{ij})$. On obtient après calculs

$$\xi^r t_r + \xi^{n+2}(\lambda + \mu) = 0 \tag{30}$$

ce qui donne les deux cas:

1) $\lambda + \mu \neq 0$:

$$\mathscr{M}\text{-}index\ V^2_{ps} = \dim \xi^r t_r \left\{ \begin{pmatrix} \cos^2\varphi & \cos\varphi \sin\varphi \\ \cos\varphi\sin\varphi & \sin^2\varphi \end{pmatrix} - \frac{1}{\lambda + \mu} \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \right\}; \tag{31}$$

2) $\lambda + \mu = 0$:

$$\mathscr{M}\text{-}index\ V^2_{ps} = \dim \xi^{n+2} \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}. \tag{32}$$

Il résulte donc:

1) $\mathscr{M}$-*index* $V^2_{ps} = 1$ si $\lambda$ ou $\mu \neq 0$;
2) $\mathscr{M}$-*index* $V^2_{ps} = 0 \Leftrightarrow \lambda = \mu = 0$.

Nous énoncons la

**Proposition.** *Soit $V^2_{ps}$ une variété spatiale, pseudo-isotrope par rapport à tous les vecteurs normaux spatiaux et à connexion normale spatiale triviale. Alors:*

(i) *l'invariant arithmétique de Chern associé a l'immersion est en général égal à deux;*
(ii) *les secondes formes fondamentales afférentes aux vecteurs normaux spatiaux sont développables et conformes entre elles;*
(iii) *si la seconde forme fondamentale afférente au vecteur normal temporel est conforme á la métrique de la variété, alors elle est nécessairement homothétique;*
(iv) *le $\mathscr{M}$-index $V^2_{ps} = 1$ pour $\lambda$* ou *$\mu \neq 0$ et le $\mathscr{M}$-index $V^2_{ps} = 0$ pour $\lambda = \mu = 0$.*

5. Soit $t = \cos\varphi e_1 + \sin\varphi e_2$ la composante tangentielle du vecteur caractéristique $I$ (voir n° 2). Si nous considérons la structure symplectique $S(\Omega, V^2_{ps})$ on trouve que la *parenthése de Poisson pfaffienne* de $\omega$ (l'ampplication p: $\wedge^1(V^2_{ps}) \to T(V^2_{ps})$, $\omega \to p(\omega)$ définie par $p(\omega) \lrcorner\, \Omega = -\omega$ [8]) est le champ

$$\bar{t} = -\sin\varphi e_1 + \cos\varphi e_2$$

orthogonal à $t$. Le *shape operator* $S_{\bar{t}}(t)$ des vecteurs $t$ et $\bar{t}$ $(S_{\bar{t}}(t))$ opérateur bilinéaire auto-adjoint de $T_p(V^2_{ps})$ dans $T^{\perp}_p(V^2_{ps}))$ étant défini par [5]

$$S_{\bar{t}}(t) = \gamma^{i*}_{ij} \bar{t}^i t^j e_{i*} \tag{33}$$

on trouve à l'aide de (6) et (13):

$$S_{\bar{t}}(t) = (\mu - \lambda)\, e_{n+2}.$$

Ainsi pour une $V^2_{ps}$, *le shape operator $S_{\bar{t}}(t)$ de la composante tangentielle du vecteur caractéristique $I$ et de son orthogonal est colinéaire au vecteur normal temporel. En particulier, si la variété est sphérique on a $S_{\bar{t}}(t) = 0$.*

6. Soit l'application $\mathscr{A}$: $p \to \bar{p} = p + fe_{n+2}$ $(f \in \mathscr{D}(V^2_{ps})$. A l'aide de (1) et (2) on trouve

$$d\bar{s} \otimes d\bar{s} = -(f\lambda - 1)^2 \omega^1 \otimes \omega^1 - (f\mu - 1)^2 \omega^2 \otimes \omega^2 + df \otimes df - \\ - f^2 \Sigma\, t^2_r \omega \otimes \omega. \tag{34}$$

En posant $\Sigma\, t_r^2 = 1$ et en supposant que la seconde forme fondamentale afférente au vecteur normal temporel est homothétique à la métrique de la variété, on trouve à l'aide de (14) que $\omega$ est un *cobord*. Dans ce cas on peut toujours choisir la fonction $f$ de manière à avoir

$$\mathrm{d}f \otimes \mathrm{d}f = f^2 \omega \otimes \omega. \tag{35}$$

Dans ce cas on déduit de ce qui précède que l'application est conforme.

7. Dans le cas d'une variété $V_{ps}^2$ avec $\mathscr{M}$*-index* $V_{ps}^2 = 0$ la relation (26) montre alors que $V_{ps}^2$ est *plate*. Les courbes $\omega = 0$ sont des *asymptotiques doubles* et il est facile de voir à l'aide de (1) et (2) que ce sont des *droites*. On conclut de tout ce qui vient d'être dit que dans le cas considéré et si en outre $V_{ps}^2$ est *complète* alors elle peut être considérée comme une surface *cylindrique*.

En nous rapportant à l'application $\mathscr{A}$ du numéro précédent on voit que dans ce cas $\mathscr{A}$ est une *isométrie*, résultat qui pouvait être prévisible géométriquement. On a donc la

**Proposition.** *Si la variété est complète et de* $\mathscr{M}$*-index* $V_{ps}^2 = 0$, *alors c'est une variété cylindrique.*

8. Soit $X = c(\cos \varphi e_1 + \sin \varphi e_2) \in T_p(V_{ps}^2)$ un champ tangentiel homothétique au champ $t$. Conformément à la définition donnée dans [1] [12] [14] ce champ définit une *autotransformation infinitésimal équivalente* si

$$\varDelta(p, X) = 0, \tag{36}$$

$\varDelta$ étant le paramètre mixte de Beltrami relatif aux formes invariantes $\omega^1$, $\omega^2$. A l'aide de la connexion (1), (2) et de (15) on trouve que la relation (36) devient

$$(\omega_1^2 + \mathrm{d}\varphi) \wedge \omega = 0 \Leftrightarrow \delta\omega = 0 \tag{37}$$

d'où la

**Proposition.** *La condition nécessaire et suffisante pour que tout champ homothétique à la composante tangentielle du vecteur caractéristique I définisse une autotransformation infinitésimale équivalente de* $V_{ps}^2$ *est que la forme caractéristique soit cofermée.*

9. Envisageons maintenant le cas d'une variété pseudo-isotrope de *codimension 2*. Conformément aux notations du $n^\circ$ 1 les indices parcourent ici les valeurs suivantes:

$$\begin{gathered} 1 \leqq i, j, k \leqq n, \qquad n+1 \leqq i^*, j^*, k^* \leqq n+2, \\ 1 \leqq r^*, s^*, t^* \leqq n+1. \end{gathered} \tag{38}$$

La variété $V_{ps}^n$ étant par hypothèse pseudo-isotrope on devra écrire

$$(\nabla e_{n+1})^2 = 0. \tag{39}$$

Eu égard à la connexion (2) cette relation permet de poser

$$\omega_i^{n+1} = \lambda_i \omega, \qquad \Sigma\, \lambda_i^2 = 1, \qquad \lambda_i \in \mathscr{D}(V_{ps}^n) \tag{40}$$

où $\omega = \omega_{n+1}^{n+2}$ est l'unique forme de connexion normale (ou forme de torsion) associée à l'immersion $x$. Mais $V_{ps}^n$ étant une variété intégrale du système linéaire

$$\omega^{n+1} = \omega^{n+2} = 0, \tag{41}$$

on déduit par différentiation extérieure de (41)

$$\omega = \gamma \lambda_i \omega^i \tag{42}$$

où $\gamma \in \mathscr{D}(V^n_{ps})$ est un facteur de proportionalité. Comme dans le cas d'une variété bidimensionnelle nous supposerons (ce qui est toujours possible) que la seconde forme fondamentale afférente au vecteur normal temporel est diagonale. On peut donc écrire

$$\omega_i^{n+2} = \mu_i \omega^i, \qquad \mu_i \in \mathscr{D}(V^n_{ps}) \qquad \text{(ne pas sommer!).} \tag{43}$$

D'autre part, à l'aide des équations de structure (3) et (4), on déduit de (40) par différentiation extérieure:

$$\lambda_i d \wedge \omega = (\lambda_j \omega_i^j + \mu_i \omega^i - \mathrm{d}\lambda_i) \wedge \omega. \tag{44}$$

Compte tenu de (40) on déduit de (44) par un calcul élémentaire

$$d \wedge \omega = \sum_i \lambda_i \mu_i \omega^i \wedge \omega. \tag{45}$$

En convenant d'appeler, comme au n° 2, $\omega$ la *forme caractéristique* de $V^n_{ps}$, la relation (45) montre bien que cette forme est *complètement intégrable.* Il est bon de signaler qu'un résultat analogue a été obtenu dans l'étude des hypersurfaces pseudo-isotropes immergées dans $\mathscr{M}^{n+2}$ [9].

10. Eu égard aux hypothèses faites au numéro précédent les deux secondes formes fondamentales associées à l'immersion $x$ sont

$$\begin{aligned} \varphi_{n+1} &= -\langle \mathrm{d}p, \mathrm{d}e_{n+1} \rangle = \frac{1}{\gamma} (\omega)^2, \\ \varphi_{n+2} &= -\langle \mathrm{d}p, \mathrm{d}e_{n+2} \rangle = -\Sigma\, \mu_i (\omega^i)^2. \end{aligned} \tag{46}$$

Comme dans le cas d'une surface $V^2_{ps}$ on constate que la seconde forme fondamentale afférente au vecteur normal spatial est *développable.* De plus, il est facilede voir que $\frac{1}{n}\gamma$ est la *courbure moyenne* en $p$ qui correspond à ce vecteur. Le vecteur isotrope caractéristique $I$ s'écrit maintenant

$$I = \Sigma\, \lambda_i e_i - e_{n+2} \tag{47}$$

et nous noterons la composante tangentielle de $I$ aussi par $t$.

La différentiation extérieure de (43) démontre que si la seconde forme fondamentale afférente au vecteur normal temporel est conforme à la métrique de la variété $V^n_{ps}$, alors cette forme est nécessairement homothétique et un calcul élémentaire montre que dans ce cas la variété a une courbure sectionnelle constante. Il résulteaussi de (42) et (45) que $\omega$ est fermée si et seulement si $V^n_{ps}$ est ombilicale dans la direction de $e_{n+2}$.

Dans le cas où la variété $V^n_{ps}$ est *compacte*, la courbure moyenne (ou le facteur de proportionalité) est encore susceptible de l'interprétation de la formule intégrale suivante. Notons par $\eta$ l'élément de volume de la variété. Le *carré scalaire global* de la forme caractéristique $\omega$ est alors défini par

$$\langle \omega, \omega \rangle = \int_{V^n_{pr}} (\omega, \omega)\, \eta \tag{48}$$

où

$$(49)\qquad \omega \wedge {}_*\omega = (\omega, \omega)\,\eta.$$

On a toujours $(\omega, \omega) \geqq 0$. Mais puisque

$${}_*\omega = \Sigma\,(-1)^{i+1}\gamma\lambda_i\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \cdots \wedge \hat{\omega}^i \wedge \ldots \wedge \omega^n,$$

il vient

$$(50)\qquad \langle \omega, \omega \rangle = \int_{V^n_{ps}} \gamma^2\eta.$$

11. Considérons le champ normal $N \in T^1_p(V^n_{ps})$ défini par

$$(51)\qquad N = f(Sh\varphi e_{n+1} + Ch\varphi e_{n+2}), \qquad f, \varphi \in \mathscr{D}(V^n_{ps}).$$

L'immersion $x$ est comme on le sait *substantielle* [15] s'il n'existe pas de vecteur normal $N$ tel que $\nabla N = 0$. A l'aide de la connexion (2) on trouve pour tout $N$ que $\nabla N \neq 0$ si $\omega \neq 0$. D'autre part, on a

$$\nabla N = (\nabla N)_t + (\nabla N)_n$$

où $(\nabla N)_t \in T_p(V^n_{ps})$ et $(\nabla N)_n \in T^\perp_p(V^n_{ps})$ et la condition nécessaire et suffisante pour que $N$ soit *parallèle dans le faisceau normal* est $(\nabla N)_n = 0$ [16]. A l'aide de la connexion (2) on trouve que

$$(52)\qquad (\nabla N)_n = 0 \Leftrightarrow \mathrm{d}f = 0 \qquad \text{et} \qquad \omega + \mathrm{d}\varphi = 0.$$

On a donc la

**Proposition.** *Etant donnée une variété $V^n_{ps}$ pseudo-isotrope de codimension 2, l'immersion pseudo-isotrope $x : V^n_{ps} \to \mathscr{M}^{2+n}$ est toujours substantielle. En outre, la condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe un champ normal parallèle dans le faisceau normal est que le module de ce champ soit constant et que la forme caractéristique de la variété soit un cobord.*

12. Dans l'hypothèse où $n = 2m + 1$ définissons sur $V^n_{ps}$ une *structure presque cosymplectique* $C_{pc}(\Omega, \alpha)$ telle que

$$(53)\qquad \begin{aligned} \Omega &= \omega^1 \wedge \omega^2 + \ldots + \omega^{n-2} \wedge \omega^{n-1}, \\ \alpha &= \omega^n. \end{aligned}$$

En vertu du lemme de Reeb il résulte immédiatement de (53) que le *champ canonique* $E(E \lrcorner\, \Omega = 0, E \lrcorner\, \alpha = 1)$ associé à la structure $C_{pc}(\Omega, \alpha)$ est $e_n$.

Rappelons que l'application

$$l : \wedge^1 (V^n_{ps}) \to T(V^n_{ps}), \qquad \varphi \to l(\varphi)$$

où

$$(54)\qquad \begin{aligned} l(\varphi) \lrcorner\, \alpha &= 0, \\ l(\varphi) \lrcorner\, \Omega &= (E \lrcorner\, \varphi)\,\alpha - \varphi \end{aligned}$$

définit *la parenthèse de Lagrange pfaffienne* relativement à la structure $C_{pc}(\Omega, \alpha)$. Dans le cas de la structure $C_{pc}(\Omega, \alpha)$ défini par (53) et pour $\varphi = \omega$, on trouve

$$(55)\qquad l(\omega) = \gamma(-\lambda_2 e_1 + \lambda_1 e_2 + \ldots - \lambda_{n-1}e_{n-2} + \lambda_{n-2}e_{n-1}).$$

Cherchons maintenant s'il existe un vecteur $W \in T_p^{\perp}(V_{ps}^n)$ qui soit *principal* pour $l(\omega)$ dans le sens d'Ōtsuki. Conformément à la définition donnée dans [7] on doit écrire

$$\forall Z \in T_p(V_{sp}^n) : S_{l(\omega)}Z = \langle l(\omega), Z\rangle\, W. \tag{56}$$

En faisant usage de (40), (43) et (55) on trouve que le champ $W$ existe si et rien que si $\mu_i = \mu_j = \mu$. Dans ces conditions on obtient

$$W = \mu e_{n+2}.$$

Par ailleurs $(HX)_t$ étant un *champ horizontal* quelconque par rapport à la structure $C_{pc}(\Omega, \omega^n)$ et en plus orthogonal au champ $t$, on trouve à l'aide des équations (40), (43) que le shape operator $S_{(HX)_t}(t)$ est *colinéaire* au vecteur normal temporel. On peut donc énoncer la

**Proposition.** *Soit $x : V_{ps}^n \to \mathscr{M}^{2+n}$ une immersion pseudo-isotrope et soit $t$ la composante tangentielle du vecteur caractéristique (isotrope) associé à l'immersion $x$. On peut définir sur $V_{ps}^n$ une structure presque cosymplectique $\mathbf{C}_{pc}(\Omega, \alpha)$ de manière que le shape operator de tout champ orthogonal à $t$ et horizontal relativement à $\mathbf{C}_{pc}(\Omega, \alpha)$ soit colinéaire au vecteur normal temporel. En particulier, si la seconde forme fondamentale afférente au vecteur temporel est conforme à la métrique de $V_{ps}^n$, alors la parenthèse de Lagrange pfaffienne de la forme caractéristique associée a $x$ est un champ principal pour un vecteur bien déterminé, colinéaire au vecteur normal temporel.*

13. En supposant maintenant que la structure $C(\Omega, \omega^n)$ est *cosymplectique*, exprimons que le champ $l(\omega)$ définit un *automorphisme infinitésimal* de cette structure. On doit écrire

$$\mathscr{L}_{l(\omega)}\Omega = 0, \qquad \mathscr{L}_{l(\omega)}\omega^n = 0. \tag{57}$$

En faisant usage de (55) on trouve que la condition nécessaire et suffisante pour que (57) soit satisfaite est que la forme *semi-basique* B$\omega$ définie par

$$B\omega = \omega - \gamma\lambda_n\omega^n \tag{58}$$

soit fermée. Nous énoncons la

**Proposition.** *Dans le cas où la structure $\mathbf{C}(\Omega, \omega^n)$ du numéro 12 est cosymplectique, la condition nécessaire et suffisante pour que la parenthèse de Lagrange pfaffienne de la forme caractéristique définisse un automorphisme de la structure $\mathbf{C}(\Omega, \omega^n)$ est que la forme semi-basique $B\omega = \omega - \gamma\lambda_n\omega^n$ soit un cocycle.*

14. Dans le cas où $n = 2m$ supposons que la forme

$$\Omega = \omega^1 \wedge \omega^2 + \ldots + \omega^{n-1} \wedge \omega^n \tag{59}$$

définit une *structure symplectique* $S(\Omega, V_{ps}^{2m})$ sur $V_{ps}^{2m}$. Cherchons dans quel cas la parenthèse de Poisson pfaffienne $p(\omega)$ de la forme caractéristique définit un automorphisme infinitésimal de la structure $S(\Omega, V_{ps}^{2m})$. On doit écrire

$$\mathscr{L}_{p(\omega)}\Omega = 0, \tag{60}$$

et à l'aide de (42) on trouve

$$\mathscr{L}_{p(\omega)}\Omega = -d \wedge \omega, \tag{61}$$

d'où la

**Proposition.** *Si la variété pseudo-isotrope est de dimension paire et symplectique, alors la condition nécessaire et suffisante pour que la parenthèse de Poisson pfaffienne de la forme caractéristique définisse un automorphisme infinitésimal de la structure est que la forme caractéristique soit un cocycle (ou que la variété soit ombilicale dans la direction du vecteur normal temporel).*

## BIBLIOGRAPHIE


[1] Boudet R., *Sur quelques propriétés géométriques des transformations infinitésimales des surfaces*, Thèse Univ. d'Aix-Marseille, 1961.

[2] Chern S. S. and Kuiper N. H., *Some theorems on the isometric imbedding of compact Riemann manifolds in Euclidean space*, Ann. of Math., vol. 56, 3, 1952.

[3] Godbillon Cl., *Géométrie différentielle et mécanique analytique*, Hermann, Paris, 1969.

[4] Lichnerowicz A., *Géométrie des groupes de transformations*, Dunod, Paris, 1958.

[5] O'Neill B., *Elementary differential geometry*, Academic Press, New York, 1970.

[6] Ōtsuki T., *A theory of Riemannian submanifolds*, Kôdai Math. Sem. Rep., 20, 1968.

[7] Ōtskuki T., *On principal normal vector fields of submanifolds in a Riemannian manifold of constant curvature*, Journ. Math. Soc. Japan, vol. 22, 1, 1970.

[8] Takizawa S., *On contact structures of real and complex manifolds*, Tôhoku Math. Journ., vol. 15, 1, 1963.

[9] Rosca R., *Les hypersurfaces pseudo-isotropes dans un espace de Minkowski*, Bull. Classe Sc. Acad. Roy. Belg., 5e série, LVI, 4, 1970.

[10] Rosca R., *Sur les variétés pseudo-isotropes immergées dans une variété lorentzienne*, Revue Roum. Math. Pures et Appl., XV, 9, 1970.

[11] Rosca R., *Les variétés pseudo-isotropes dans un espace-temps de Minkowski*, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 270, série A, 1970, p. 1071–1073.

[12] Rosca R. et Borel F., *Sur les autotransformations infinitésimales équivalentes des variétés minimales à deux dimensions d'un espace elliptique n-dimensionnel*, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 268, série A, 1969, p. 399–401.

[13] Shiohama K., *Cylinders in Euclidean space* $E^{2+N}$, Kōdai Math. Sem. Rep., 19, 1967.

[14] Vincensini P., *Sur le problème des transformations infinitésimales d'une surface*, Ann. Sc. Ec. Norm. Sup., 3e série, 79, 1962.

[15] Yano K. and Chen B. Y., *On the concurrent vector fields of immersed manifolds*, Kōdai Math. Sem. Rep., 23, 1971.

[16] Yano K. and Chen B. Y., *Minimal submanifolds of a higher dimensional sphere*, Tensor, N. S., vol. 22, 1971.



*R. Rosca, L. Vanhecke*

*Katholieke Universiteit te Leuven*
*Wiskundig Instituut*
*Celestijnenlaan 200B*
*B-3030 (Belgium)*