

Robert Karpe

Die Kombinationen gegebenen Profils. I

Archivum Mathematicum, Vol. 9 (1973), No. 4, 183--202

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/104809>

Terms of use:

© Masaryk University, 1973

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

DIE KOMBINATIONEN GEGEBENEN PROFILS I

ROBERT KARPE, Brno
(Eingegangen am 2. Juli 1973)

Das Hauptziel dieser Arbeit ist es einige neue graphische Prinzipie kombinatorischer Betrachtungen einzuführen.

Man löst hier folgende Aufgabe: Es ist 1) die Gesamtheit, 2) die Anzahl aller Kombinationen festzustellen, die aus n Elementen

$$(1) \quad x_1, x_2, \dots, x_n,$$

mit event. Wiederholung so zusammengesetzt werden, dass die hintereinanderfolgenden Indexe in jeder Kombination $(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k})$ die Bedingungen erfüllen:

$$(2) \quad i_1 Z i_2 Z \dots Z i_k,$$

wo wir für jedes Symbol Z je nach unserer Wahl immer eines der Zeichen einsetzen:

$$(3) \quad \leq, <, \geq, >.$$

1. Vereinbarung. Die durch unsere Wahl realisierte Beziehung (2) bezeichnen wir mit dem Termin „*Profil*“. Weiter heben wir zwei Haupttypen von Profilen hervor: 1) *Die monotonen Profile* – bestehend nur aus den gleichgerichteten Zeichen, z. B. $\leq < <$, oder $> > >$, u. s. w., 2) *Die nichtmonotonen Profile*, die in ihren Zusammenstellungen wenigstens ein entgegengerichtetes gegenüber den übrigen Zeichen haben, z. B. $\leq \leq \geq$, oder $\geq \leq > >$, u. s. w.

2. Bemerkung. Die Gruppen vom gegebenen Profil wäre es möglich durch Einführung einer grösseren Anzahl von Zeichen zu erweitern. Die Zeichen müssten wir dann durch eine andere Symbolik ausdrücken. So z. B. $i_1(+2) i_2$ wäre ein Profil für zweistellige Kombinationen, die aus den Elementen (1) so zusammengestellt würden, dass bei der Besetzung der ersten Stelle mit dem Element x_j die zweite Stelle nur mit einem von den Elementen $x_{j+2}, x_{j+3}, \dots, x_n$ besetzt werden kann. Alle weiteren Betrachtungen würden analog wie diejenigen in dieser Arbeit geführt werden.

Alle Erwägungen gehen hier von gewissem Graphen aus, der eigentlich die möglichst knappe Hinschreibung aller entsprechenden Fälle ist. Diesem Graphen werden wir dann seine Matrix und dieser wieder ihr Vektorfeld zuordnen.

3. Definition. Der *Entwicklungsgraph*. Seine Bestandteile sind die *Elemente* (1) und die *Zweige*, die hier als Verbindungen gewisser Elemente fungieren. Die Elemente (mit event. Wiederholung) werden in dem Graph in den Spalten eingerichtet. Die Elemente, die sich in der r -ten Spalte befinden, erfassen wir als „die r -te Folge des Graphen“, die von oben nach unten hinzielt; $r = 1, 2, 3, \dots$

Der Graph entwickelt sich stufenweise, d. h. immer die $(r + 1)$ -e Folge entwickelt sich aus der r -ten. Diese Entwicklung bezeichnen wir als „die *Verzweigung*“. Es gelten hier folgende Regeln:

1) In der ersten Spalte liegt immer „die *Grundfolge des Graphen*“, d. h. die Folge $\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$.

2) Es sei x_j ein beliebiges Element der r -ten Spalte, und es gelte a) $i_r \leq i_{r+1}$, b) $i_r < i_{r+1}$, c) $i_r \geq i_{r+1}$, d) $i_r > i_{r+1}$. Dann entwickelt sich die entsprechende Folge $P(x_j)$ in der $(r + 1)$ -en Spalte folgendermassen: a) $P(x_j) = \{x_j, x_{j+1}, \dots, x_n\}$, b) $P(x_j) = \{x_{j+1}, x_{j+2}, \dots, x_n\}$, c) $P(x_j) = \{x_1, x_2, \dots, x_j\}$, d) $P(x_j) = \{x_1, x_2, \dots, x_{j-1}\}$. Die Folge $P(x_j)$ nennen wir „die *Verzweigung des Elementes* x_j “ und wir führen von dem Urheber x_j zu jedem ihren Element eine Verbindung, insofern wenigstens ein Element dieser Folge existiert. Jede solche Verbindung bezeichnen wir als „*elementaren Zweig*“ und im Sinne der Graphenentwicklung erfassen wir auch seine Orientierung.

3) Es seien x_j, x_k zwei Nachbarelemente der r -ten Spalte derart, dass das Element x_j über dem Element x_k liegt. Dann sind die Folgen $P(x_j), P(x_k)$ zwei Nachbarfolgen der $(r + 1)$ -en Spalte derart, dass die Elemente der Folge $P(x_j)$ über den Elementen der Folge $P(x_k)$ liegen.

Aus den elementaren, hintereinander angeknüpften Zweigen entstehen einzelne einfachen (orientierten) mehrgliedrigen Zweige. Jeden solchen Zweig, der von der ersten bis zur letzten Graphenspalte führt, bezeichnen wir als den „*Totalzweig*“.

4. Bemerkung. Einen ähnlichen Entwicklungsgraph können wir leicht auch für die Variationen (mit oder ohne Wiederholung) konstruieren; besonders gut kann man hiemit das Wesen der Fakultät ausklären.

5. Satz. Die Anzahl aller Kombinationen k -ter Klasse, aus n Elementen, die einem gegebenen Profil entsprechen, ist gleich der Anzahl aller Elemente der k -ten Folge des zugehörigen Entwicklungsgraphen.

Beweis. Aus dem Graphen kann man gerade alle möglichen Totalzweige ausnehmen; jeder von diesen gehört immer einer anderen, und immer entsprechender Kombination, über deren Elemente läuft er durch. Dabei endet jeder Totalzweig bei seinem eigenen Element.

6. Beispiel. Es ist die Gesamtheit aller Kombinationen vierter Klasse, aus den Elementen $\{x_1, x_2, x_3\}$, festzustellen, die dem Profil $(i_1 \leq i_2 > i_3 < i_4)$ entsprechen.

und die Randbedingungen:

$$(5) \quad a_{r,1} = 1; r = 1, 2, \dots, n. \quad \text{b) } a_{r,j} = 0 \text{ für } r > n, r < 1.$$

Beweis. Aus den gegenseitig übereinstimmenden Elementen x_j der r -ten Graphenspalte, entwickelt sich immer dieselbe Folge $P(x_j)$, d. h. bei jedem Zufall dieses Elementes. Deshalb wird der Zahlenwert des Matrixelementes $a_{j,r}$ in die $(r + 1)$ -e Spalte übertragen, und zwar in die Zeilen vom Index: a) $j, j + 1, \dots, n$. b) $j + 1, j + 2, \dots, n$. c) $1, 2, \dots, j$. d) $1, 2, \dots, j - 1$. Dies gilt für $j = 1, 2, \dots, n$, so dass gilt

$$(6) \quad \begin{array}{ll} \text{a) } a_{j,r+1} = \sum_{i=1}^j a_{i,r} & \text{b) } a_{j,r+1} = \sum_{i=1}^{j-1} a_{i,r} \\ \text{c) } a_{j,r+1} = \sum_{i=j}^n a_{i,r} & \text{d) } a_{j,r+1} = \sum_{i=1}^{j-1} a_{i,r} \end{array}$$

Weiter nehmen wir in Betracht, dass es nach (6) gleichzeitig gilt

$$(7) \quad \begin{array}{ll} \text{a) } a_{j-1,r+1} = \sum_{i=1}^{j-1} a_{i,r} & \text{b) } a_{j-1,r+1} = \sum_{i=1}^{j-2} a_{i,r} \\ \text{c) } a_{j+1,r+1} = \sum_{i=j+1}^n a_{i,r} & \text{d) } a_{j+1,r+1} = \sum_{i=j+2}^n a_{i,r} \end{array}$$

Als die Differenz der entsprechenden Gleichungspaare von (6), (7), bekommen wir dann die Relationen (4). Die Bedingungen (5) sind ersichtliche Folgerungen der Def. 3. Siehe auch die Figur 1.

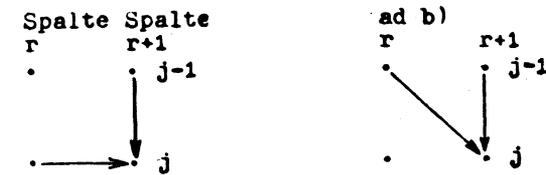
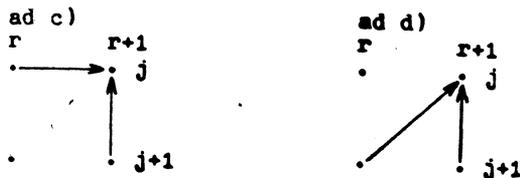


Fig. 1



10. Definition. Es ist eine n -zeilen und k -spalten Matrix M gegeben. Dieser ordnen wir das Vektorfeld F und seine Operationen folgendermassen zu:

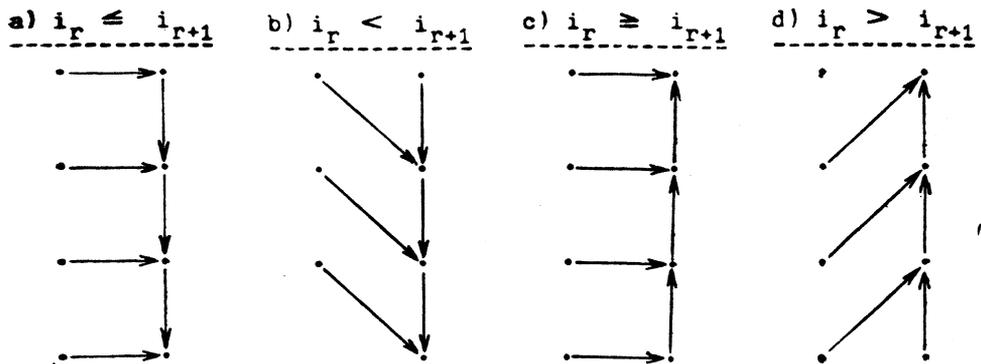
Das Gitter des Vektorfeldes ist das System aller n Zeilen und k Spalten der

Matrix M , die hier als einzelne gezeichnete Strecken gedacht sind. Der Gitterpunkt (i, j) ist der Durchschnittspunkt der i -ten Zeile mit der j -ten Spalte. Der elementare Vektor ist ein gebundener Vektor; er geht immer aus einem Gitterpunkt aus und zielt in einen anderen hin.

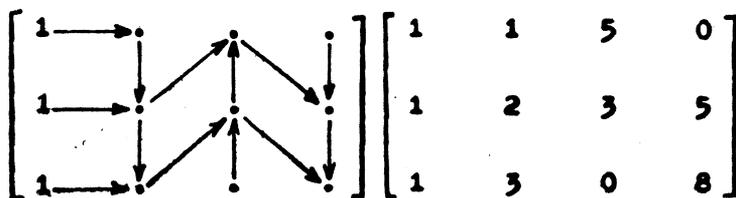
In den Gitterpunkten der ersten Spalte liegen immer die Einsen. Diese Einsen werden wir „die Anfangswerte des Vektorfeldes“ nennen. Jeder Vektor teilt den Wert seines Anfangspunktes seinem Zielpunkt mit. Der seinem Zielpunkt mitgeteilte Wert wird zum Wert dieses Punktes. Wenn in den Punkt (i, j) mehrere Vektoren hinzielen, werden die von ihnen mitgeteilten Werte summiert und diese Summe wird zum Wert des Punktes (i, j) . Zielt kein Vektor in einen (Rand)-punkt hin, so ist der Wert eines solchen Punktes Null. Ausserhalb des Definitionsbereiches werden keine Werte mitgeteilt und umgekehrt.

11. Satz. Jedem von den Zeichen (3) entspricht (immer zwischen den zugehörigen Spalten) sein eigener *Vektorfeldsstreifen*, in dem die gebundenen Vektoren, was es ihrer Richtung und Orientierung betrifft, sich mit jeder Zeile periodisch wiederholen.

Beweis. Der Satz ist eine ersichtliche Folgerung der Formeln (4), und der Def. 10. Siehe auch die Figur 2:

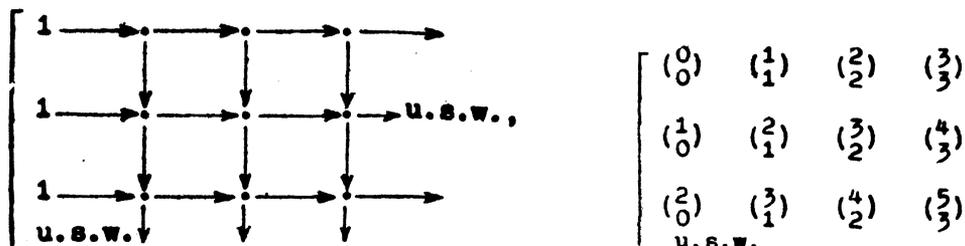


12. Beispiel – ist die Fortsetzung der Aufgabe aus dem Beispiel 6. Es ist jetzt die Anzahl aller entsprechenden Kombinationen unvermittelbar festzustellen – mit kurzer theoretischen Begleitung:



Die Entwicklung der Matrix M als die Operation ihres Vektorfeldes: die Abbildungen zeigen das Vektorfeld am Anfang und am Ende. Also nach dem Satz 8 gilt: $\hat{0} + 5 + 8 = 13$.

13. Bemerkung. Die Definition 10 gilt auch für das Rechtecksystem der binomischen Koeffizienten, siehe (8). Dies ist aus unserer Hinsicht der Zufall eines speziellen Profils, in dem sich das Zeichen \leq , bzw. \geq , stets wiederholt:



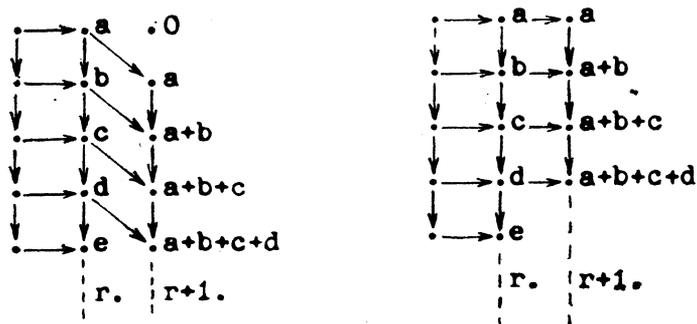
14. Vereinbarung. Die Kombinationen, die einem monotonen Profil entsprechen, bezeichnen wir im allgemeinen „die Kombinationen mit örtlicher Wiederholung“. Die Anzahl aller Kombinationen aus n Elementen, k -ter Klasse und mit örtlicher Wiederholung, wobei das Zeichen \leq (bzw. \geq) r -mal und das Zeichen $<$ (bzw. $>$) s -mal zugelassen wird, ($r + s = k - 1$), bezeichnen wir mit dem Symbol $C_r^k(n)$.

In weiterem werden wir nur die Zeichen \leq , $<$ betrachten; analog würden wir die Betrachtung für die Zeichen \geq , $>$ durchführen.

15. Lemma. Es seien zwei monotone Profile gegeben, die ausser folgender Ausnahme überall übereinstimmen: 1. $i_r < i_{r+1}$, 2. $i_r \leq i_{r+1}$.

Dem ersten, bzw. dem zweiten Profil gehöre die n -zeilen und k -spalten Matrix M , bzw. M^+ . Dann, falls wir in der Matrix M^+ , mi der $(r + 1)$ -en Spalte beginnend, den nachfolgenden Teil der n -ten Zeile nicht registrieren, bekommen wir bei diesen zwei Matrizen dieselbe Folge der Spaltensummen.

Fig. 3



Beweis. Aus der Folge der r -ten Spalte einer Matrix $M: (a_{r1}, a_{r2}, \dots, a_{rn})$, bekommen wir mit dem Gebrauch der Formel (4 - b), bzw. (4 - a), in beiden diesen Fällen zwar dieselbe, doch aber in dem zweiten Fall um eine Zeile höher anfangende Folge der $(r + 1)$ -en Spalte.

Siehe auch die Figur 3.

16. Satz. Es gelte: $n \geq 1, k - 1 \geq r \geq 0$. Dann gilt die Formel:

$$(9) \quad C_r^k(n) = \binom{n+r}{k}.$$

Beweis. Ersetzen wir in dem gegebenen Profil jedes Zeichen $<$ mit dem Zeichen \leq . Dann, nach dem Satz 8 und dem Lemma 15, müssen wir in der k -ten Spalte der Matrix des neu geformten Profils nur die ersten $n - (k - 1 - r)$ Glieder summieren, so dass wir nach (8) folgende Reihe bekommen: $\binom{k-1}{k-1} + \binom{k}{k-1} + \dots + \binom{n+r-1}{k-1}$, die nach [1], S. 248, Formel 11, mit der rechten Seite aus (9) gleich ist.

Damit sind wir zu einer Universalformel für die Kombinationen mit örtlicher Wiederholung gelangt. Es ist ersichtlich, dass die „Kombinationen ohne Wiederholung“ ($r = 0$) und die „Kombinationen mit Wiederholung“ ($r = k - 1$) die Randfälle sind. Es ist gleichzeitig ersichtlich, dass die Anzahl der entsprechenden Kombinationen nicht davon abhängt, zwischen welchen Indexen die Wiederholung zugelassen wurde.

Aus den obigen Betrachtungen kommt auch folgende Formierung unserer Resultate hervor:

17 Korollar. Der Funktionsausdruck $\binom{n}{1}$, der der ersten Spaltenfolge in dem Graphen entspricht, entwickelt sich bei den monotonen Profilen folgendermassen:

- a) Mit jeder Verzweigung mit erlaubter Wiederholung wächst sowohl der obere als auch der untere Zeiger um eins.
- b) Mit jeder Verzweigung ohne erlaubte Wiederholung wächst nur der untere Zeiger um eins.

Nun wollen wir prüfen, ob es auch bei einem willkürlichen, nicht monotonen Profil eine ähnliche, dem Graphen entsprechende, Entwicklung von $\binom{n}{1}$ existiert.

18. Definition. Es seien n Elemente (1) gegeben und x_j sei ein willkürliches Element in der r -ten Spalte des Graphen.

Die vollständige Verzweigung des Elementes x_j bedeutet, dass diesem Element entsprechende Folge $P(x_j)$, die in der $(r + 1)$ -en Spalte liegt, mit der Grundfolge übereinstimmt, siehe Def. 3.

Die vollständige Verzweigung der r -ten Folge des Graphen bedeutet, dass jedem Element dieser Folge seine vollständige Verzweigung entspricht, wobei für die

Entwicklung der elementaren Zweige die Bedingungen aus der Def. 3 gelten. Dies noten wir in einem Profil mit dem Zeichen \leq , d. h. $i_r \leq i_{r+1}$.

Die einem von den Zeichen (3) entsprechende Verzweigung des Elementes x_j wird durch die Verbindung mit ihrer Ergänzungsverzweigung desselben Elementes x_j zur vollständigen Verzweigung dieses Elementes gebracht.

19. Satz. Es sei x_j ein beliebiges Element aus der r -ten Spalte des Graphen. Setzen wir voraus, dass seine Verzweigung dem i -ten Zeichen aus der Folge $\{\leq, <, \overline{\leq}, >\}$ entspricht. Dann entspricht seine Ergänzungsverzweigung dem $(5 - i)$ -ten Zeichen aus derselben Folge.

Die Gültigkeit des Satzes ist ersichtlich aus den Def. 3 und 18.

20. Vereinbarung. Die Zerlegung gewisser Folge in zwei Teilfolgen bezeichnen wir mit den Zeichen $+$, $-$. Zum Beispiel: $P(x_j) + q(x_j) = R(x_j)$, oder $R(x_j) - P(x_j) = q(x_j)$. Dasselbe in Worten.

21. Satz. Es sei x_j ein beliebiges Element aus der r -ten Spalte des Graphen und es sei $H_1(x_j), H_2H_1(x_j), H_3H_2H_1(x_j), \dots$ seine Verzweigung in der $(r + 1)$ -en, $(r + 2)$ -en, $(r + 3)$ -en ... Spalte. Dabei anstatt H_i bezeichnen wir P_i, p_i, Q_i, q_i, R_i , falls die Entwicklung nach dem (entsprechenden) Zeichen $\leq, <, \overline{\leq}, >$ läuft. Dann gilt:

$$(10) \quad P_2Q_1(x_j) = P_2[R_1(x_j) - p_1(x_{j_2})] = P_2R_1(x_j) - P_2p_1(x_j),$$

und weiter:

$$(11) \quad P_3P_2Q_1(x_j) = P_3P_2[R_1(x_j) - p_1(x_j)] = P_3P_2R_1(x_j) - P_3P_2p_1(x_j),$$

und so ähnlich in den übrigen Fällen.

Beweis. Das angezeigte Prinzip „Die Verzweigung der Differenz ist gleich der Differenz der Verzweigung“ gilt hier aus dem Grund, dass die Entwicklungsbedingungen für ein beliebiges Element der r -ten Spalte des Graphen unabhängig daran sind, in welche ihre Teilfolge dieses Element zugeteilt wird.

22. Satz. Es seien die Elemente (1) gegeben; A sei die Anzahl aller Elemente der r -ten Folge des Graphen und es gelte $i_r \leq i_{r+1}$. Dann kann man die $(r + 1)$ -e Folge dieses Graphen als die A -fache der Grundfolge erfassen.

Beweis. Nach der Def. 18 gilt es hier: $a_{r+1,1} = a_{r+1,2} = \dots = a_{r+1,n} = A$. Also nach den Formeln (4) kann man die Konstante A aus jeder weiteren Spalte dieser Matrix ausklammern.

Die Zusammenfassung der Regeln für die Verzweigung bei den nicht monotonen Profilen können wir folgendermassen ausdrücken:

23. Korollar

a) Die Verzweigung der r -ten Folge des Graphen nach einem entgegengerichteten Zeichen erfassen wir als die Differenz zwischen der vollständigen Verzweigung und der Ergänzungsverzweigung von derselben r -ten Folge des Graphen.

- b) Die Ergänzungsverzweigung läuft dann nach den Regeln für die monotonen Profile.
 c) Mit der vollständigen Verzweigung endet die bisherige Entwicklung des zugehörigen Ausdrucks-er ist eine Konstante geworden, und zugleich ein neuer Ausdruck fängt seine Entwicklung wieder von $\binom{n}{1}$ an.
 d) Für die weitere Entwicklung gilt stets das Prinzip: „Die Verzweigung der Differenz wird gleich der Differenz der Verzweigung“.

24. Beispiel. Es sind die Elemente (1) gegeben. Es ist die Anzahl aller 9-stelligen Kombinationen auszudrücken, die dem Profil $i_1 \leq i_2 < i_3 \leq i_4 > i_5 < i_6 \overline{\geq} i_7 \leq i_8 < i_9$ entsprechen. (Der Strich über dem Ausdruck wird hier bedeuten, dass sich derselbe nicht mehr entwickelt). S_r sei hier die Anzahl aller Elemente aus der r -ten Spalte des Graphen:

$$\begin{aligned}
 S_1 &= \binom{n}{1}, & S_2 &= \binom{n+1}{2}, & S_3 &= \binom{n+1}{3}, & S_4 &= \binom{n+2}{4}, \\
 S_5 &= \overline{\binom{n+2}{4}} \binom{n}{1} - \binom{n+3}{5}, & S_6 &= \overline{\binom{n+2}{4}} \binom{n}{2} - \binom{n+3}{6}, \\
 S_7 &= \left[\overline{\binom{n+2}{4}} \binom{n}{2} - \binom{n+3}{6} \right] \cdot \binom{n}{1} - \overline{\binom{n+2}{4}} \binom{n}{3} + \binom{n+3}{7}, \\
 S_8 &= \left[\overline{\binom{n+2}{4}} \binom{n}{2} - \binom{n+3}{6} \right] \cdot \binom{n+1}{2} - \overline{\binom{n+2}{4}} \binom{n+1}{4} + \binom{n+4}{8}, \\
 S_9 &= \left[\overline{\binom{n+2}{4}} \binom{n}{2} - \binom{n+3}{6} \right] \cdot \binom{n+1}{3} - \overline{\binom{n+2}{4}} \binom{n+1}{5} + \binom{n+4}{9}.
 \end{aligned}$$

Es ist ersichtlich, dass die am Anfang dieser Arbeit vorgelegte Aufgabe bewältigt worden ist. Man sieht aber auch, dass es zwecklos wäre, für unregelmässige Profile besondere Formeln zu suchen. Bei speziellen Profilen führt es jedoch zum Auffinden von neuen Beziehungen.

Als ersten Zufall eines speziellen Profils führen wir an

DIE ZWEIFHASIGEN KOMBINATIONEN 1. ART

Diese Kombinationen entsprechen folgendem Profil:

$$(12) \quad i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_k \geq i_{k+1} \geq \dots \geq i_{k+r}.$$

25. Satz. Es sei mit dem Symbol $D_r^k(n)$ die Anzahl aller zweiphasigen Kombinationen bezeichnet, die aus n Elementen mit Wiederholung und $(k+r)$ -ter Klasse sind, und dabei dem Profil (12) entsprechen.

und nach der Umformung, zu der wir die Formel 11 aus [1], Seite 248, benützen:

$$a_{i+1, k+s+1} = \binom{s}{s} \binom{k-1+i}{k-1} + \binom{s+1}{s} \binom{k+i}{k-1} + \dots + \\ + \binom{n+s-i-1}{s} \binom{n+k-2}{k-1}.$$

Wir haben also bewiesen: wenn (15) für $k+s$ gilt, dann gilt sie auch für $k+s+1$.
Es gilt weiter, mit Hinsicht auf (8) und (6-c):

$$a_{i+1, k+1} = \binom{k+i-1}{k-1} + \binom{k+i}{k-1} + \dots + \binom{n+k-2}{k-1},$$

oder:

$$a_{i+1, k+1} = \binom{0}{0} \binom{k+i-1}{k-1} + \binom{1}{0} \binom{k+i}{k-1} + \dots + \binom{n-i-1}{0} \binom{n+k-2}{k-1},$$

was die Form (15) für $s=1$ ist.

Nun nach (15) und nach dem Satz 8 bekommen wir $D_r^k(n)$ durch die Summation der rechten Seiten folgender Gleichungen:

$$a_{1, k+r} = \binom{r-1}{r-1} \binom{k-1}{k-1} + \binom{r}{r-1} \binom{k}{k-1} + \dots + \binom{n+r-2}{r-1} \binom{n+k-2}{k-1},$$

$$a_{2, k+r} = \binom{r-1}{r-1} \binom{k}{k-1} + \binom{r}{r-1} \binom{k+1}{k-1} + \dots + \binom{n+r-3}{r-1} \binom{n+k-2}{k-1},$$

.....

$$a_{n, k+r} = \binom{r-1}{r-1} \binom{n+k-2}{k-1}$$

Addieren wir diese Glieder in Diagonalen, so bekommen wir:

$$D_r^k(n) = \binom{r-1}{r-1} \binom{k-1}{k-1} + \left[\binom{r-1}{r-1} + \binom{r}{r-1} \right] \cdot \binom{k}{k-1} + \dots + \\ + \left[\binom{r-1}{r-1} + \dots + \binom{n+r-3}{r-1} + \binom{n+r-2}{r-1} \right] \cdot \binom{n+k-2}{k-1},$$

und daraus, mit Hilfe der oben erwähnten Formel, bekommen wir sofort (13).

Beweis der Formel (14).

Es sei E_s die Anzahl aller Elemente aus der s -ten Spalte des zugehörigen Entwicklungsgraphen; $s = 1, 2, \dots, k$. Es gelte hier das Zeichen \geq , bzw. \leq für die Grund- bzw. Gegenrichtung. Dann gilt folgende Relation:

$$(17) \quad E_s = \sum_{i=1}^s (-1)^{i+1} \cdot E_{s-i} \cdot \binom{n}{i}, \quad E_0 = 1, \quad s = 1, 2, \dots, k.$$

Beweis. Es gelte (17) für $s < k$. Weil zwischen den Indexen i_s, i_{s+1} , ein inverses Zeichen liegt, so gilt es – nach Korollar 23:

$$E_{s+1} = E_s \cdot \binom{n}{1} - \sum_{i=1}^s (-1)^{i+1} \cdot E_{s-i} \cdot \binom{n}{i+1}.$$

Nach der Substitution der Grenzen:

$$i + 1 = j, \text{ woraus } 1 \leq i \leq s \Rightarrow 2 \leq i + 1 \leq s + 1 \Rightarrow 2 \leq j \leq s + 1,$$

gilt:

$$E_{s+1} = E_s \cdot \binom{n}{1} + \sum_{j=2}^{s+1} (-1)^{j+1} \cdot E_{s+1-j} \cdot \binom{n}{j} = \sum_{j=1}^{s+1} (-1)^{j+1} \cdot E_{s+1-j} \cdot \binom{n}{j},$$

was die Relation (17) für den Index $s + 1$ ist.

Für $s = 1$ lautet (17) so: $E_1 = E_0 \cdot \binom{n}{1} = \binom{n}{1}$, was der Wirklichkeit entspricht.

Es gilt allerdings zugleich: $E_s = \binom{n+s-1}{s}$, $s = 1, 2, \dots, k$, da dem betrachteten Teile des Profils $i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_k$ genügen ersichtlich die Kombinationen mit (dauernder) Wiederholung.

Es gilt also

$$(18) \quad E_k = \sum_{i=1}^k (-1)^{i+1} \cdot \overline{\binom{n+k-i-1}{k-i}} \binom{n}{i},$$

in dem der Strich über die Kombinationszahl die schon bekannte Bedeutung hat. Die weitere Verzweigung des Graphen verläuft weiter stets nach dem Zeichen \geq , das hier das Grundzeichen ist. Nach den r Verzweigungen wachsen daher die beiden Zeiger des nicht konstanten Ausdruckes im (18) um r Einheiten. Dadurch bekommen wir Formel (14).

26. Folgerung. Durch die Verbindung der Formeln (13), (14), bekommen wir unmittelbar eine neue kombinatorische Identität.

Illustrationen.

Fig. 1. Die Konfigurationen für die Formeln (4)—a, b, c, d.

Fig. 2. Die Vektorfeldstreifen für die Zeichen (3).

Fig. 3. Die Darstellung für das Lemma 15.

In folgenden Absätzen dieser Arbeit werden wir zwei weitere speziellen Arten des Profils prüfen:

DIE OSZILLIERENDEN KOMBINATIONEN 1. UND 2. ART

27. Definition. Die oszillierenden Kombinationen erster bzw. zweiter Art sind die Kombinationen aus den Elementen (1), mit Wiederholung, k -ter Klasse, deren Profil aus zwei fortwährend wechselnden Zeichenarten besteht: bei der ersten bzw. zweiten Art sind es die Zeichen $\leq \geq$, bzw. $< >$. Es ist unwichtig, mit welchem von den zwei zusammenwirkenden Zeichen das Profil beginnt.

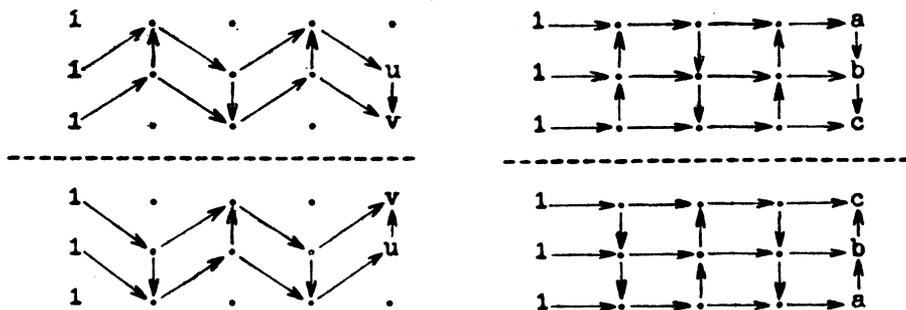
Die oszillierenden Kombinationen werden wir mit der Abkürzung *OK* bezeichnen.

Die Anzahl aller *OK* der 1-en, bzw. der 2-ten Art, k -ter Klasse, aus n Elementen, bezeichnen wir A_n^k , bzw. B_n^k . Dazu definieren wir:

$$(19) \quad A_n^0 = B_n^0 = 1; \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

28. Satz. Die Anzahl aller *OK* erster bzw. Zweiter Art, aus n Elementen, k -ter Klasse, ist unabhängig von der Art des ersten Profilzeichens.

Beweis. Zeichnen wir zwei, aus n Zeilen und k Spalten bestehende Vektorfelder, so dass ihre (disjunkte) Symetrieachse mit ihren Zeilen parallel sei. Die ersten Profilzeichen dieser Felder seien gegeneinander entgegengesetzt: \leq, \geq , bzw. $<, >$. Dann aus den Gleichungen (4)-a, -c, bzw. (4)-b, -d, geht es hervor, dass zwischen den entsprechenden zwei Feldern die Spiegelsymmetrie existiert. Dann aber, je nach der Def. 10, gilt dasselbe für die Größen a_{ik} der zugehörigen Matrizen, und daraus, nach dem Satz 8, geht unser Satz hervor. Siehe auch die Figur 4:



29. Satz. Es sei $n \geq 1$. Dann gilt:

$$(20) \quad \text{a) } A_n^k = B_{n+1}^k \text{ für } k \geq 2, \text{ oder } k = 0. \quad \text{b) } A_n^1 = B_{n+1}^1 - 1.$$

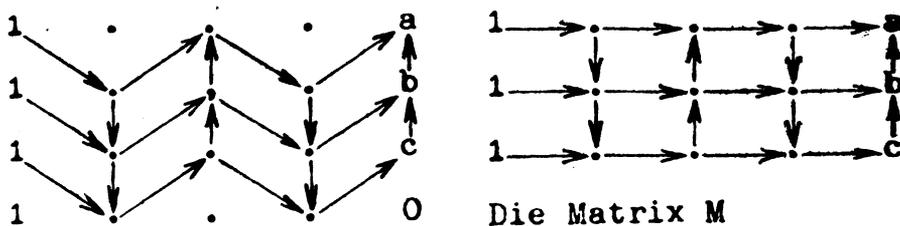
Beweis. Es sei ein n -zeilen und k -spalten Vektorfeld F für die *OK* der ersten Art gegeben. Das zugehörige System aller gebundenen Vektoren dieses Feldes sei in der Deckung mit einem zusammenhängenden Netz, dessen elastische, bzw. nicht elastische Elemente in der Richtung der Zeilen, bzw. der Spalten des Vektorfeldes sind.

Nun, wenn wir jede gerade (ungerade) Spalte dieses Netzes um eine Zeile nach unten aufspannen und dagegen jede ungerade (gerade) Spalte in der ursprünglichen Lage behalten, dann wird (nach 11. und 27.) dieses Netz mit jenem System gebundener Vektoren in die Deckung übergehen, der dem $(n + 1)$ -zeilen und k -spalten Vektorfeld F^+ für die *OK* der zweiten Art gehört.

Betrachten wir nun die Matrizen M, M^+ , die den Vektorfeldern F, F^+ entsprechen: Nach 10] liegt in der s -ten Spalte der beiden Matrizen dieselbe Folge der Nichtnull-elemente; $s = 2, 3, \dots, k$. Die einzelne Ausnahme entsteht nur in der ersten Spalte, weil die Matrix M , bzw. M^+ , aus n , bzw. $n + 1$ Zeilen besteht.

Daraus, nach dem Satz 8, folgt sofort der zu beweisende Satz.

Siehe auch die Figur 5:



30. Definition. M_1 bzw. M_2 bedeutet eine endliche Menge von n verschiedenen Elementen:

$$(21) \quad M_1 = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}, \quad M_2 = \{y_1, y_2, \dots, y_n\},$$

die die Ungleichung erfüllen:

$$(22) \quad x_i > y_j, \quad i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, n.$$

Mit der Benennung „die komplexen oszillierenden Kombinationen“ und der Abkürzung *KOK* bezeichnen wir eine k -stellige, aus den Elementen der Menge $(M_1 \cup M_2)$ nach der Vorschrift

$$(23) \quad (x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_r} y_{i_{r+1}} y_{i_{r+2}} \dots y_{i_k}), \quad 0 \leq r \leq k,$$

gebildete Gruppe, wo $(x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_r})$, bzw. $(y_{i_{r+1}} y_{i_{r+2}} \dots y_{i_k})$ eine *OK* erster, bzw. zweiter Art ist, siehe Def. 27.

Das Profil von *KOK* (23) darf nicht zwei gleichgerichtete Zeichen hintereinander enthalten. Dabei statt des Zeichens zwischen i_r, i_{r+1} registrieren wir dasjenige zwischen den Elementen $x_{i_r}, y_{i_{r+1}}$, d. h. nach (22). Also die Fälle a) $\dots i_{r-1} \geq i_r > i_{r+1} \dots$, b) $\dots i_r > i_{r+1} > i_{r+2} \dots$ dürfen nicht entstehen. Es muss also gelten:

$$(24) \quad \begin{array}{ll} i_1 \leq i_2 & \text{für gerade } r, \\ i_{r+1} < i_{r+2} & \text{für alle } r. \end{array} \quad i_1 \geq i_2 \quad \text{für ungerade } r,$$

31. Vereinbarung. Benützen wir die Strukturalbezeichnung

$$(25) \quad (r, k - r); \quad 0 \leq r \leq k,$$

für jede *KOK*, die in ihrer Zusammenstellung r bzw. $k - r$ Elemente aus der Menge M_1 bzw. M_2 hat. Dabei bezeichnen wir eine *KOK* als gerade, bzw. ungerade, wenn die Zahl r in (25) eine gerade bzw. ungerade ist.

32. Satz. Es sei k eine beliebige natürliche Zahl. Die Menge aller *KOK* k -ter Klasse, die aus den Elementen $\in (M_1 \cup M_2)$ nach der Def. 30 zusammengesetzt sind, besitzt eine gleiche Anzahl von geraden und ungeraden *KOK*.

Beweis. Betrachten wir eine gewisse Abbildung der Menge aller, durch die Def. 30 gegebener *KOK* auf sich: diese Abbildung wollen wir „Transformation durch umwerfen des Randelementes“ nennen.

Das Prinzip der Transformation: Bei jeder *KOK* der betrachteten Menge wird immer eines der Randelemente auf die entgegengesetzte Seite umgesetzt, d. h. es wird bei dieser Kombination zu dem Randelement von der entgegengesetzten Seite, und es wird dabei das umzusetzende Element auf gewisse Art transformiert. Alle anderen Elemente bleiben dabei in *KOK* ohne Änderung und in ursprünglicher Zusammenstellung.

Die Transformation des umzuwerfenden Elementes:

1) Es sei die Zahl k (die Klasse *KOK* angehend) eine gerade: dann wird das Element x_i zu dem y_{n+1-i} oder y_j wird zum x_{n+1-j} .

2) Es sei k eine ungerade Zahl: dann wird das Element x_i zu dem y_i , oder das Element y_j wird zu dem x_j .

Es ist allerdings Bedingung der Transformation, dass wieder eine *KOK* entstehen muss, die die Bedingungen (23) und (24) erfüllt.

Zwecks des Beweises unseres Satzes nehmen wir zuerst in Betracht, dass durch die erwähnte Transformation immer aus der geraden, bzw. ungeraden *KOK* eine ungerade, bzw. gerade *KOK* entstehen muss.

Wir beweisen weiter, dass es bei jeder *KOK* möglich ist immer nur eines ihrer Randelemente auf die angeführte Art umzustellen und zu transformieren, wenn wieder eine die Bedingungen (23) und (24) erfüllende *KOK* entstehen soll:

A) Betrachten wir alle *KOK*, für die $r = 0$, oder $r = k$ gilt. Diese Kombinationen haben je nach (23) ersichtlich die einzige Transformationsmöglichkeit.

B) Betrachten wir alle *KOK*, für die gilt: $0 < r < k$, wo k eine gerade Zahl ist. Dann beweisen wir, dass einer *KOK* (23) nicht beide Varianten ihrer Transformation, d. i.

$$\begin{aligned} \text{a)} & \quad (x_{i_2} \dots x_{i_r} y_{i_r+1} \dots y_{i_k-1} y_{i_k} y_{n+1-i_1}), \\ \text{b)} & \quad (x_{n+1-i_k} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_r} y_{i_r+1} \dots y_{i_k-1}), \end{aligned}$$

entsprechen können. Betrachten wir in Bezug auf (24) beide Möglichkeiten : 1) Wenn r eine gerade Zahl ist, dann muss in der ursprünglichen KOK $i_1 \leq i_2$ und gleichzeitig $i_{k-1} < i_k$ gelten. Damit aus dieser wieder eine KOK entstehe, muss es also gelten: im Falle a) $i_k > n + 1 - i_1$, im Falle b) $n + 1 - i_k \geq i$. Aber von diesen zwei Möglichkeiten kann nur eine gelten. 2) Wenn r eine ungerade Zahl ist, dann muss in der ursprünglichen KOK $i_1 \geq i_2$, (oder $i_1 > i_2$, falls schon das zweite Element $\in M_2$), und gleichzeitig $i_{k-1} > i_k$ gelten. Damit aus dieser wieder eine KOK entstehe, muss es also gelten: im Falle a) $i_k < n + 1 - i_1$, im Falle b) $n + 1 - i_k \leq i_1$, was wieder nicht gleichzeitig gelten kann.

C) Betrachten wir alle KOK , für die gilt $0 < r < k$, wo k eine *ungerade* Zahl ist. Wir beweisen wieder, dass einer KOK (23) nicht beide Varianten ihrer Transformation, d. i.

$$a) \quad (x_{i_2} \dots x_{i_r} y_{i_r+1} \dots y_{i_{k-1}} y_{i_k} y_{i_1}),$$

$$b) \quad (x_{i_k} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_r} y_{i_r+1} \dots y_{i_{k-1}}),$$

entsprechen können. Betrachten wir in Bezug auf (24) beide Möglichkeiten: 1) Wenn r eine gerade Zahl ist, dann muss in der ursprünglichen KOK $i_1 \leq i_2$ und gleichzeitig $i_{k-1} > i_k$ gelten. Damit aus dieser wieder eine KOK entstehe, muss es also gelten: im Falle a) $i_k < i_1$, im Falle b) $i_k \geq i_1$, was nicht gleichzeitig gelten kann. 2) Wenn r eine ungerade Zahl ist, dann muss in der ursprünglicher KOK $i_1 \geq i_2$ (oder $i_1 > i_2$) und gleichzeitig $i_{k-1} < i_k$ gelten. Damit aus dieser wieder eine KOK entstehe, muss es also gelten: im Falle a) $i_k > i_1$, im Falle b) $i_k \leq i_1$, was nicht gleichzeitig gelten kann.

Es ist also ersichtlich, dass durch die angeführte Transformation auf der Menge aller gegebenen KOK eine (1,1)-deutige Abbildung zwischen der Untermenge aller geraden und der Untermenge aller ungeraden KOK definiert wird. Dadurch ist aber der Beweis des Satzes erbracht.

33. Lemma. Die Anzahl aller KOK , die nach der Def. 30 zusammengestellt werden und die eine gemeinsame Struktur $(r, k - r)$ haben, ist $A_n^r \cdot B_n^{k-r}$.

Beweis. Betrachten wir 1) die OK 1-er Art, r -ter Klasse, aus M_1 , 2) die OK 2-ter, Art, $(k - r)$ -ter Klasse, aus M_2 . Mit Rücksicht auf (24) verlangen wir, dass bei jeder OK and 1) das erste Zeichen des Profils \leq bzw. \geq sei, wenn die Zahl r gerade, bzw. ungerade ist. Bei jeder OK ad 2) verlangen wir, dass das erste Profilzeichen $<$ sei. Diese Forderungen haben nach dem Satz 5 keinen Einfluss auf die Bestimmung der Formel für die Anzahl aller entsprechenden OK . Wählen wir nun eine beliebige von den angeführten OK 1-er Art und fügen sukzessiv alle der angeführten OK der 2-ten Art dazu. Damit erhalten wir B_n^{k-r} KOK k -ter Klasse, aus $(M_1 \cup M_2)$ von gemeinsamer Struktur $(r, k - r)$. Weil wir von den OK 1-er Art im Ganzen A_n^r wählen können, so ist es ersichtlich, dass die Anzahl aller KOK der $(r, k - r)$ Struktur $A_n^r B_n^{k-r}$ ist.

34. Satz. Für $n > 1, k \geq 1$, gilt:

$$(26) \quad \sum_{r=0}^k (-1)^{k-r} \cdot A_n^r \cdot B_n^{k-r} = 0,$$

Beweis. Nach dem Satz 32 und Lemma 33 handelt es sich um die Differenz zwischen der Anzahl aller geraden und ungeraden, nach der Def. 30 gegebenen *KOK*.

35. Definition. Für die Zahlen $A_n^k, n \geq 1, k \geq 0$, und für die Zahlen $B_n^k, n \geq 2, k \geq 0$, siehe die Def. 27, bestimmen wir und folgendermassen bezeichnen die erzeugende Funktion:

$$(27) \quad \varphi_n(x) = A_n^0 + A_n^1 \cdot x + A_n^2 \cdot x^2 + \dots + A_n^k \cdot x^k + \dots$$

$$(28) \quad \psi_n(x) = B_n^0 + B_n^1 \cdot x + B_n^2 \cdot x^2 + \dots + B_n^k \cdot x^k + \dots$$

36. Lemma. Die Potenzreihe (27), bzw. (28) konvergiert zum wenigsten im Intervall $|x| < \frac{1}{n}$.

Beweis. Sind n verschiedene Elemente und das Profil der dauernden vollständigen Verzweigung gegeben (siehe Def. 18): \leq, \leq, \dots, \leq , dann ist die Anzahl der in der k -ten Spalte des betreffenden Graphen liegenden Elemente ersichtlich $n^k, k = 1, 2, 3, \dots$. Daraus folgt weiter, dass die Potenzreihe $R_n(x) = 1 + nx + (nx)^2 + \dots + (nx)^k + \dots$ für $x > 0$ eine majorante Reihe zu den Reihen (27), (28) ist. Dabei $R_n(x)$ konvergiert im Intervall $|x| < \frac{1}{n}$.

37. Satz. Für $n \geq 2$ und $|x| < \frac{1}{n}$ gilt:

$$(29) \quad \varphi_n(x) \cdot \psi_n(-x) = 1.$$

Beweis. Wir führen das Cauchy-sche Produkt der Potenzreihen $\varphi_n(x) \psi_n(-x)$ durch. Die das Produkt dieser zwei Potenzreihen darstellende Potenzreihe sei bezeichnet: $C_0 + C_1 \cdot x + C_2 \cdot x^2 + \dots$. Dann, wie bekannt, gilt: $C_k = \sum_{r=0}^k (-1)^{k-r} \times A_n^r \cdot B_n^{k-r}$. Hier aber, nach dem Satz 34 gilt: $C_k = 0$ für $k = 1, 2, 3, \dots$. Ausserdem, nach der Def. 27 gilt: $C_0 = A_n^0 \cdot B_n^0 = 1$.

38. Satz. Für die fortschreitende Entwicklung der ausschaffenden Funktionen $\varphi_n(x)$ gilt folgende Rekurrenz:

$$(30) \quad \varphi_n(x) \cdot (-x + \varphi_{n-1}(-x)) = 1; \quad n = 2, 3, 4, \dots$$

$$(31) \quad \varphi_1(x) = \frac{1}{-x + 1}.$$

Beweis ad (30) – ist eine direkte Folgerung der Sätze 29 und 37.

Beweis ad (31) – Weil $A_1^k = 1$ für $k \geq 0$, so gilt nach (27):

$$\varphi_1(x) = 1 + x + x^2 + \dots + x^k + \dots = \frac{1}{-x + 1} \quad \text{für} \quad |x| < \frac{1}{n}.$$

Auf Grund dieser Rekurrenzen versuchen wir in weiterem die direkten Formeln zu finden.

39. Definition. Es sei $[m]$ die Abrundung der Zahl m auf ihr nächstes kleineres Ganze. Dann definieren wir die Zahl

$$(32) \quad D_n^k = \binom{\left[\frac{n+k}{2} \right]}{k},$$

für den Indexbereich

$$(33) \quad k = 0, 1, \dots, n; \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Die dem Indexbereich entsprechenden Zahlen D_n^k ordnen wir in ein Dreieckssystem an, das wir „das verdoppelte Pascal'sche Dreieck“ benennen. Es ist ein System von Zeilen und Spalten, siehe die Nebendarstellung, worin sich die Zahl D_n^k in der n -te Zeile von oben und k -ten Spalte von links befindet.

$$\begin{array}{cccc} D_0^0 & & & \\ D_0^1 & D_1^1 & & \\ D_2^0 & D_2^1 & D_2^2 & \\ D_3^0 & D_3^1 & D_3^2 & D_3^3 \end{array}$$

40. Bemerkung. Die Zahlen D_n^k , die sich ausserhalb des Dreiecksystems befinden, sind im Hinblick auf die Elementardefinition der Zahlen $\binom{n}{k}$ gleich null.

Die Zahl D_n^k bedeutet auch die Anzahl aller Kombinationen $(x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_k})$, wo die Elemente x_i die natürlichen Zahlen der Menge $\{1, 2, \dots, n\}$ sind und gleichzeitig die folgenden 2 Bedingungen erfüllen: 1) $x_{i_1} < x_{i_2} < \dots < x_{i_k}$, 2) $x_{i_{2r-1}}$ resp. $x_{i_{2r}}$ ist eine ungerade, bzw. gerade Zahl; $r = 1, 2, \dots$. Siehe [1], Paragraph 49.

41. Satz. Für die Zahlen D_n^k gilt die Rekursionformel:

$$(34) \quad D_n^k = D_{n-2}^k + D_{n-1}^{k-1},$$

Beweis. Es genügt zu überlegen, dass es gilt: $\left[\frac{n+k-2}{2} \right] = \left[\frac{n+k}{2} - 1 \right] = \left[\frac{n+k}{2} \right] - 1$. Wenn man dann $\left[\frac{n+k}{2} \right] = m$ bezeichnet, lautet die Gleichung

(34) folgendermassen: $\binom{m}{k} = \binom{m-1}{k} + \binom{m-1}{k-1}$, was eine Elementarbekannte Relation ist.

42. Definition. Wir legen fest und bezeichnen mit einem Symbol das folgende Polynom:

$$(35) \quad f_n(x) = \sum_{i=0}^n (-1)^{\binom{i+1}{2}} \cdot D_n^i \cdot x^i; \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

43. Bemerkung. Wie ersichtlich, stimmt die Koeffizientenfolge des Polynoms $f_n(x)$ – bis auf die Vorzeichen – mit der Folge der n -ten Zeile des Zahlensystems D_n^k überein. Wir gebrauchen daher auch im weiteren Text die Bezeichnung für das Polynom nullter Stufe: $f_0(x) = D_0^0 = 1$.

44. Satz. Für Polynome $f_n(x)$, $n \geq 2$, gilt die Rekursionsgleichung:

$$(36) \quad f_n(x) = f_{n-2}(x) - x \cdot f_{n-1}(-x); \quad f_0(x) = 1, \quad f_1(x) = 1 - x.$$

Beweis. $f_{n-2}(x) - x \cdot f_{n-1}(-x) = \sum_{i=0}^{n-2} (-1)^{\binom{i+1}{2}} \cdot D_{n-2}^i \cdot x^i - x \cdot \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^{\binom{i+1}{2}} \times$
 $\times D_{n-1}^i \cdot (-x)^i = D_{n-2}^0 + \sum_{i=0}^{n-3} (-1)^{\binom{i+1}{2}} \cdot D_{n-2}^{i+1} \cdot x^{i+1} + \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^{\binom{i+1}{2} + i + 1} \times$
 $\times D_{n-1}^i \cdot x^{i+1} = D_n^0 + \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^{\binom{i+2}{2}} \cdot (D_{n-2}^{i+1} + D_{n-1}^i) \cdot x^{i+1} = D_n^0 + \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^{\binom{i+2}{2}} \times$
 $\times D_n^{i+1} \cdot x^{i+1} = D_n^0 \cdot x^0 + \sum_{i=1}^n (-1)^{\binom{i+1}{2}} \cdot D_n^i \cdot x^i = \sum_{i=0}^n (-1)^{\binom{i+1}{2}} \cdot D_n^i \cdot x^i = f_n(x),$
w. z. b. w.

45. Definition. Wir setzen fest und bezeichnen die rationale gebrochene Funktion

$$(37) \quad \Phi_n(x) = \frac{f_{n-1}(-x)}{f_n(x)}; \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

46. Satz. Für die Funktion $\Phi_n(x)$, $n > 1$, gilt die Rekursionsbeziehung:

$$(38) \quad \Phi_n(x) \cdot (\Phi_{n-1}(-x) - x) = 1; \quad \Phi_1(x) = \frac{1}{1-x}.$$

Beweis. Es gilt nach (36) und (37):

$$\begin{aligned} \Phi_n(x) &= f_{n-1}(-x) / f_n(x) = f_{n-1}(-x) / (f_{n-2}(x) - x \cdot f_{n-1}(-x)) = \\ &= 1 / \left(-x + \frac{f_{n-2}(x)}{f_{n-1}(-x)} \right) = \frac{1}{-x + \Phi_{n-1}(-x)}, \quad \text{w. z. b. w.} \end{aligned}$$

47. Korolar.

Die ausschaffende Funktion (27) für die oszillierenden Kombinationen der ersten Art, in ihrer beendeten Form, lautet:

$$(39) \quad \varphi_n(x) = \frac{f_{n-1}(-x)}{f_n(x)}; \quad n \geq 1.$$

Beweis. Es genügt ersichtlich die Identität der Funktionen $\varphi_n(x)$, $\Phi_n(x)$ zu beweisen, siehe (27), (37). Das ist aber leicht: weil ihre Rekursionsformeln (30), (38) formal übereinstimmen, und weil auch $\varphi_1(x) = \Phi_1(x)$, siehe (31) und (35) für $n = 1$, wird damit die Identität bewiesen.

48. Satz. Die Summe der r -ten Zeile im Dreieckssystem der Zahlen D_n^k gibt die Anzahl aller oszillierenden Kombinationen erster Art, r -ten Klasse, aus zwei Elementen an.

Beweis. Nach dem Korolar 47 und nach den Definitionen 35 und 42, gilt:

$$\frac{1+x}{1-x-x^2} = A_2^0 + A_2^1 \cdot x + A_2^2 \cdot x^2 + \dots \text{ Es gilt doch zugleich:}$$

$$\frac{1+x}{1-x-x^2} = G_0 + G_1 \cdot x + G_2 \cdot x^2 + \dots, \text{ wo gilt: } G_r = D_r^0 + D_r^1 + \dots + D_r^r;$$

$r = 0, 1, 2, \dots$, siehe [1], Paragraph 49.

In dem nächsten Abschnitt der Arbeit werden wir die Erörterung der Wurzeigenschaften des Polynoms $f_n(x)$ in Angriff nehmen.

LITERATUR

[1] Netto, E.: *Lehrbuch der Combinatorik*, Berlin, Leipzig; 1927.

R. Karpe,
602 00 Brno, Gorkého 13
Tschechoslowakei