Archivum Mathematicum

Ladislav Moravský

# Некоторые колеблющиеся свойства решений нелинейного дифференциального уравнения вида $y''' + p(x)y'' + q(x)f(y') + r(x)h(y) = 0$

*Archivum Mathematicum*, Vol. 11 (1975), No. 3, 139--149

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/104852`

ARCH. MATH. 3, SCRIPTA FAC. SCI. NAT. UJEP BRUNENSIS,
XI: 139—150, 1975

# НЕКОТОРЫЕ КОЛЕВЛЮЩИЕСЯ СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВИДА

$$y''' + p(x)y'' + q(x)f(y') + r(x)h(y) = 0$$

ЛАДИСЛАВ МОРАВСКИ, Кошице

(Поступило в редакцию 28-го марта 1975 г.)

Статья является обобщением некоторых результатов работ [1]–[5], при изучении нелинейного дифференциального уравнения вида

$$y''' + p(x)\,y'' + q(x)\,f(y') + r(x)\,h(y) = 0 \tag{1}$$

Во всей работе мы считаем, что $p(x) \in C_0(I)$, $q(x) \in C_0(I)$, $r(x) \in C_0(I)$, $I = \langle a; \infty)$ и $h(y) \in C_0(R)$, $f(u) \in C_0(R)$, $R = (-\infty; \infty)$.

Дальше мы считаем, что рассматриваемые решения уравнения (1) существуют в $I$.

**Теорема 1.** *Пусть $q(x) \in C_1(I)$ и для всех $x \in I$, $y \in R - \{0\}$, $u \in R$ выполняются неравенства $p(x) \geqq 0$, $q(x) \geqq 0$, $r(x) \leqq 0$, $q'(x) + p(x)\,q(x) - 2kr(x) \leqq 0$, причем функции $p(x)$, $q'(x) + p(x)\,q(x) - 2kr(x)$ одновременно тождественно в никаком частичном промежутке не равны нулю и $0 < h(y)\,y \leqq ky^2$, $f(u) = u$, $k$ – постоянная. Потом нулевые точки всякого решения $y(x)$ уравнения* (1) *и его первой производной отделяются направо от точки $x_0 \in I$, в которой выполняется условие*

$$y(x_0)\,y''(x_0) - \frac{1}{2}\,y'^2(x_0) + \frac{1}{2}\,q(x_0)\,y^2(x_0) = F(x_0) \leqq 0. \tag{2}$$

*Если кроме того*

$$\int_{x_0}^{\infty} p(x)\,\mathrm{d}x < \infty, \qquad \int_{x_0}^{\infty} q(x)\,\mathrm{d}x = \infty,$$

*то всякое решение уравнения* (1) *облядающее свойством* (2) *является колеблющимся в $I$.*

**Доказательство.** Умножая уравнение (1) на функцию

$$y(x)\exp\left\{\int_{x_0}^{\infty} p(t)\,\mathrm{d}t\right\}$$

и интегрируя от $x_0$ до $x$ получаем

$$\left[y(x)\,y''(x) - \frac{1}{2}\,y'^2(x) + \frac{1}{2}\,q(x)\,y^2(x)\right]\exp\left\{\int_{x_0}^{x} p(t)\,\mathrm{d}t\right\} +$$

$$(3)\qquad + \frac{1}{2}\int_{x_0}^{x}\{p(t)\,y'^2(t) - [q'(t) + p(t)\,q(t)]\,y^2(t)\}\exp\left\{\int_{x_0}^{t} p(s)\,\mathrm{d}s\right\}\mathrm{d}t +$$

$$+ \int_{x_0}^{x} r(t)\,h[y(t)]\,y(t)\exp\left\{\int_{x_0}^{t} p(s)\,\mathrm{d}s\right\}\mathrm{d}t = F(x_0).$$

Так как

$$0 < h(y)\,y \leqq ky^2,$$

то

$$\int_{x_0}^{x} r(t)\,h[y(t)]\,y(t)\exp\left.\int_{x_0}^{t} p(s)\,\mathrm{d}s\right\}\mathrm{d}t \geqq$$

$$(4)\qquad \geqq \int_{x_0}^{x} r(t)\,ky^2(t)\exp\left\{\int_{x_0}^{t} p(s)\,\mathrm{d}s\right\}\mathrm{d}t.$$

Принимая во внимание (4), из формулы (3) следует

$$\left[y(x)\,y''(x) - \frac{1}{2}\,y'^2(x) + \frac{1}{2}\,q(x)\,y^2(x)\right]\exp\left\{\int_{x_0}^{x} p(t)\,\mathrm{d}t\right\} \leqq F(x_0) -$$

$$(5)\qquad - \frac{1}{2}\int_{x_0}^{x} p(t)\,y'^2(t)\exp\left\{\int_{x_0}^{t} p(s)\,\mathrm{d}s\right\}\mathrm{d}t +$$

$$+ \frac{1}{2}\int_{x_0}^{x}[q'(t) + p(t)\,q(t) - 2kr(t)]\,y^2(t)\exp\left\{\int_{x_0}^{t} p(s)\,\mathrm{d}s\right\}\mathrm{d}t.$$

Из соотношения (5) для $x > x_0$ получим

$$(6)\qquad y(x)\,y''(x) - \frac{1}{2}\,y'^2(x) + \frac{1}{2}\,q(x)\,y^2(x) < 0.$$

Отсюда очевидно, что $y(x)$ не имеет для $x > x_0$ двойной нулевой точки.

Дальше докажем, что нулевые точки $y(x)$ и $y'(x)$ отделяются направо от $x_0$. Пусть $x_1 < x_2 \in (x_0;\, \infty)$ являются соседними нулевыми точками $y'(x)$ и $y(x) \neq 0$ для $x \in \langle x_1;\, x_2\rangle$. Из формулы (5) следует

$$\left[\frac{y'(x)}{y(x)}\right]' \leqq -\frac{1}{2}\frac{y'^2(x)}{y^2(x)} - \frac{1}{2}q(x) + \frac{1}{2y^2(x)}\exp\left\{-\int_{x_0}^{x} p(t)\,\mathrm{d}t\right\}.$$

$$\left[F(x_0) + \int_{x_0}^{x}\{[q'(t) + p(t)q(t) - 2kr(t)]\,y^2(t) - p(t)\,y'^2(t)\}\exp\left\{\int_{x_0}^{t} p(s)\,\mathrm{d}s\right\}\mathrm{d}t\right].$$

Интегрируя последнее соотношение в пределах от $x_1$ до $x_2$ получим противоречие. Значит, между двумя нулевыми точками $y'(x)$ существует хотя бы одна нулевая точка решения $y(x)$. Существование хотя бы одной нулевой точки $y'(x)$ между соседними нулевыми точками решения $y(x)$ вытекает из теоремы Ролля. Этим доказательство первого утверждения окончено.

Доказательство второго утверждения. Пусть $y(x)$ является неколеблющимся. Потом по первому утверждению теоремы существует такое число $\bar{x} > x_0$, что $y(x) \neq 0$, $y'(x) \neq 0$ для всех $x \geqq \bar{x}$. Таким образом, по отношению к (6) для всех $x \in \langle \bar{x}; \infty)$ выполняется

$$\left[\frac{y'(x)}{y(x)}\right]' < -\frac{1}{2}q(x). \tag{7}$$

Интегрируя (7) от $\bar{x}$ до $x$ получим

$$\frac{y'(x)}{y(x)} \leqq -\frac{1}{2}\int_{\bar{x}}^{x} q(t)\,\mathrm{d}t + \frac{y'(\bar{x})}{y(\bar{x})}.$$

Из последнего неравенства очевидно, что существует число $x_1 \geqq \bar{x}$ такое, что для $x \geqq x_1$ имеют силу $y(x) < 0$, $y'(x) > 0$, или $y(x) > 0$, $y'(x) < 0$.
В первом случае из уравнения (1) следует

$$y'''(x) + p(x)\,y''(x) \leqq 0.$$

Пусть существует такое $x_2 \geqq x_1$, что $y''(x_2) < 0$. Умножая последнее неравенство на функцию

$$y''(x)\exp\left\{\int_{x_2}^{x} p(t)\,\mathrm{d}t\right\}$$

и интегрируя от $x_2$ до $x$, получаем

$$y''(x) \leqq y''(x_2)\exp\left\{-\int_{x_2}^{x} p(t)\,\mathrm{d}t\right\} \leqq y''(x_2)\exp\left\{-\int_{x_2}^{\infty} p(x)\,\mathrm{d}x\right\} = K_1 < 0.$$

Повторной интеграцией получим

$$y'(x) \leqq K_1(x - x_2) + y'(x_2),$$

и оттуда вытекает противоречие. Таким образом $y''(x) \geqq 0$, $y'(x) > 0$, $y(x) < 0$ для $x \geqq x_1$. Это значит, что $y(x)$ имеет для $x \in \langle x_1 ; \infty)$ нулевую точку.

Подобно тому покажем, что в случае $y(x) > 0$, $y'(x) > 0$ является $y''(x) \leqq 0$ для $x \geqq x_1$, и следовательно $y(x)$ имеет в интеграле $\langle x_1 ; \infty)$ нулевую точку.

Этим доказательство теоремы становится оконченым.

Тем же самым доказывается аналогичное утверждение для дифференциального уравнения

$$(8) \qquad y''' + q(x)\,y' + r(x)\,h(y, y'') = 0. \qquad (8)$$

**Теорема 2.** *Пусть* $q(x) \in C_1(I)$, $h(y, v) \in C_0(RxR)$ *и для всех* $x \in I$, $y \in R - \{0\}$, $v \in R$ *справедливы неравенства* $q(x) \geqq 0$, $r(x) \leqq 0$, $q'(x) - 2kr(x) \leqq 0$, $0 < h(y, v)$ . . $y \leqq ky^2$, $k$ *— постоянная. Пусть функция* $q'(x) - 2kr(x)$ *тождественно в никаком частичном промежутке не равна нулю и*

$$\int_a^\infty q(x)\,\mathrm{d}x = \infty.$$

*Потом всякое решение* $y(x)$ *уравнения* (8) *обладающее свойством* (2) *является колеблющимся в* $I$.

**Теорема 3.** *Пусть для всех* $x \in I$, $y \in R - \{0\}$, $u \in R - \{0\}$ *выполнены неравенства* $q(x) \leqq 0$, $r(x) \geqq 0$, $q(x) + 2kr_1(x) \geqq 0$, $p(x) + k_2^2 q(x) \geqq 0$, $k_1 y^2 \leqq h(y)\,y$, $0 < f(u)\,u \leqq k_2 u^2$, *причем* $k_1 > 0$, $k_2$ *— постоянные. Пусть функции* $q(x) + 2k_1 r(x)$, $p(x) + k_2^2 q(x)$ *одновременно тождественно в никаком частичном интервале не равны нулю.*

*Потом нулевые точки решения* $y(x)$ *уравнения* (1) *и его первой производной отделяются направо от точки* $x_0 \in I$, *в которой выполнено*

$$(9) \qquad y(x_0)\,y''(x_0) - \frac{1}{2}\,y'^2(x_0) = M(x_0) \leqq 0.$$

*Если кроме того* $p(x) \in C_1(I)$, *и в интервале* $I$ *существует колеблющееся дифференцальное уравнение*

$$(10) \qquad v'' + g(x)\,v = 0,$$

*причем* $g(x) \in C_0(I)$, *так, что* $H(x, y, u) \leqq 0$, *где*

$$H(x, y, u) = \frac{1}{4}\,p^2(x) + \frac{1}{2}\,p'(x) + g(x) - k_2 q(x) + \frac{1}{2}\,r(x)\left[k_2^2\,\frac{h^2(y)}{f^2(u)} + 1\right] \leqq 0.$$

*То всякое решение* $y(x)$ *уравнения* (1) *с одной нулевой точкой в* $I$, *имеет бесконечное число нулей в* $I$.

**Доказательство.** Умножая уравнение (1) на функцию

$$y(x) \exp\left\{\int_{x_0}^{x} p(t)\,\mathrm{d}t\right\}$$

и интегрируя в пределах $x_0$ до $x$, и принимая предположения теоремы

$$r(x)\,h(y)\,y \geqq k_1 r(x)\,y^2,$$

$$q(x)\,f(u)\,u \geqq \frac{1}{2}\,q(x)\,f^2(u) + \frac{1}{2}\,q(x)\,y^2 \geqq \frac{1}{2}\,q(x)\,k_2^2 u^2 + \frac{1}{2}\,q(x)\,y^2,$$

получим

$$\left[y(x)\,y''(x) - \frac{1}{2}\,y'^2(x)\right] \exp\left\{\int_{x_0}^{x} p(t)\,\mathrm{d}t\right\} \leqq$$

$$\leqq M(x_0) - \frac{1}{2}\int_{x_0}^{x} [p(t) + k_2^2 q(t)]\,y'^2(t) \exp\left\{\int_{x_0}^{t} p(s)\,\mathrm{d}s\right\} \mathrm{d}t -$$

$$- \frac{1}{2}\int_{x_0}^{x} [q(t) + 2k_1 r(t)]\,y^2(t) \exp\left\{\int_{x_0}^{t} p(s)\,\mathrm{d}s\right\} \mathrm{d}t.$$

Из этой формулы, аналогично теореме 1, следует первое утверждение теоремы.

В доказательстве второй части теоремы используем подстановку

$$y'(x) = z(x) \exp\left\{-\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x} p(t)\,\mathrm{d}t\right\}. \tag{11}$$

Следовательно из этого вытекает

$$y(x) = \int_{x_0}^{x} z(t) \exp\left\{-\frac{1}{2}\int_{x_0}^{t} p(s)\,\mathrm{d}s\right\} \mathrm{d}t + y(x_0), \tag{12}$$

$$y''(x) = \left[z'(x) - \frac{1}{2}\,p(x)\,z(x)\right] \exp\left\{-\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x} p(t)\,\mathrm{d}t\right\}. \tag{13}$$

(14)

$$y'''(x) = \left[z''(x) - p(x)\,z'(x) - \frac{1}{2}\,p'(x)\,z(x) + \frac{1}{4}\,p^2(x)\,z(x)\right] \exp\left\{-\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x} p(t)\,\mathrm{d}t\right\}.$$

Пусть $y(x_0) = 0$. Тогда подстановками (11), (12), (13), (14) в уравнение (1) получим уравнение вида

$$z'' - \left[\frac{1}{4} p^2(x) + \frac{1}{2} p'(x)\right] z + \left(q(x) f\left[z(x) \exp\left\{-\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x} p(t)\,\mathrm{d}t\right\}\right] + \right.$$
(15)
$$\left. + r(x) h\left[\int_{x_0}^{x} z(t) \exp\left\{-\frac{1}{2}\int_{x_0}^{t} p(s)\,\mathrm{d}s\right\}\mathrm{d}t\right]\right) \exp\left\{\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x} p(t)\,\mathrm{d}t\right\}.$$

Пусть $y(x)$ является неколеблющимся. Потом по первому утверждению теоремы существует такое число $x_1 \geqq x_0$, что $y(x) \neq 0$, $y'(x) \neq 0$ для $x \geqq x_1$. Согласно соотношению (11) является $z(x) \neq 0$ для $x \in \langle x_1 ; \infty)$. Пусть оно является решением уравнения (15) и $v(x)$ – решение уравнения (10).

Потом для всех $x \in \langle x_1 ; \infty)$ выполняется

$$\left\{\frac{v(x)}{z(x)}\left[v(x) z'(x) - v'(x) z(x)\right]\right\}' = 2v(x) v'(x) \frac{z'(x)}{z(x)} +$$
$$+ \frac{v^2(x) z''(x)}{z(x)} - \frac{v^2(x) z'^2(x)}{z^2(x)} - v'^2(x) - v(x) v''(x) =$$
(16)
$$= -\left[v'(x) - \frac{v(x) z'(x)}{z(x)}\right]^2 + v^2(x) \frac{z''(x)}{z(x)} - v(x) v''(x) =$$
$$= -\left[v'(x) - \frac{v(x) z'(x)}{z(x)}\right]^2 + v^2(x)\left(\frac{1}{4} p^2(x) + \frac{1}{2} p'(x) + g(x) - \frac{q(x)}{z(x)} \cdot\right.$$
$$\left. \cdot f\left[z(x) \exp\left\{-\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x} p(t)\,\mathrm{d}t\right\}\right] - \frac{r(x)}{z(x)} h\left[\int_{x_0}^{x} z(t) \exp\left\{-\frac{1}{2}\int_{x_0}^{t} p(s)\,\mathrm{d}s\right\}\mathrm{d}t\right]\right) \cdot$$
$$\cdot \exp\left\{\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x} p(t)\,\mathrm{d}t\right\}.$$

Используя во выражение (16) обозначения из (11) и (12), то согласно предположениям теоремы справедливы соотношения

(17)
$$-q(x) \frac{f(y')}{y'} \leqq -q(x) k_2 .$$

(18)
$$-r(x) \frac{h(y)}{y} \leqq \frac{1}{2} r(x)\left[\frac{h^2(y)}{y'^2} + 1\right] \leqq \frac{1}{2} r(x)\left[k_2^2 \frac{h^2(y)}{f^2(y')} + 1\right],$$

потому что

$$f^2(y') \leqq k_2^2 y'^2,$$
$$\frac{1}{y'^2} \leqq \frac{k_2^2}{f^2(y')} .$$

Подставив соотношения (17) и (18) в (16) получим

$$(19)\quad \left\{\frac{v(x)}{z(x)}\left[v(x)\,z'(x) - v'(x)\,z(x)\right]\right\}' \leqq -\left[v'(x) - \frac{v(x)\,z'(x)}{z(x)}\right]^2 + v^2(x)\,H(x, y, z).$$

Пусть $x_2 > x_3$ являются соседними нулевыми точками решения $v(x)$ уравнения (10), где $x_1 \leqq x_2 < x_3$. Согласно соотношению (11) $z(x) \neq 0$ для $x \in \langle x_1 ; x_2 \rangle$. Интегрируя (19) в пределах от $x_2$ до $x_3$ имеем

$$(20)\qquad 0 \leqq -\int_{x_2}^{x_3}\left[v'(x) - \frac{v(x)\,z'(x)}{z(x)}\right]^2 \mathrm{d}x + \int_{x_2}^{x_3} H[x, y(x), z(x)]\, v^2(x)\,\mathrm{d}x.$$

Соотношение (20) выполнено только тогда, если

$$v'(x) - \frac{v(x)\,z'(x)}{z(x)} \equiv 0,$$

и

$$H[x, y(x), z(x)] = 0$$

для

$$x \in \langle x_2; x_3 \rangle.$$

В случае

$$v'(x) - \frac{v(x)\,z'(x)}{z(x)} = 0$$

для $x \in \langle x_3 ; x_3 \rangle$ являются $z(x)$ и $v(x)$ линейно зависимые, т. е. $z(x)$ обращается в нуль в точках $x_2, x_3$, что является противоречием.

Если функция

$$v'(x) - \frac{v(x)\,z'(x)}{z(x)}$$

тождественно не равна нулю для $x \in \langle x_2 ; x_3 \rangle$, то соотношение (20) приводит противоречие. Этим мы доказали, что функция $z(x)$ имеет нулевую точку в интервале $\langle x_1 ; \infty)$. Согласно формуле (11) имеет $y'(x)$ бесконечное число нулевых точек. Таким образом согласно первому утверждению теоремы, $y(x)$ является колеблющимся в интервале I.

**Теорема 4.** *Пусть для всех $x \in I$, $y \in R - \{0\}$, $u \in R - \{0\}$ выполнены неравенства $q(x) \geqq 0$, $r(x) \geqq 0$, $p(x) - k_2^2 q(x) \geqq 0$, $q(x) - 2k_1^2 r(x) \leqq 0$, $h(y)\,y \geqq k_1 y^2$, $0 < f(u)\,u \leqq k_2 u^2$, причем $k_1 > 0$, $k_2$ — постоянные, и функции $p(x) - k_2^2 q(x)$, $q(x) - 2k_1^2 r(x)$ одновременно тождественно в никаком промежутке не равны нулю. То нулевые точки всякого решения $y(x)$ уравнения (1) и его первой производной отделяются направо от $x_0 \in I$, в которой выполнено условие*

$$y(x_0)\,y''(x_0) - \frac{1}{2}\,y'^2(x_0) = M(x_0) \leqq 0.$$

*Если кроме того $p(x) \in C_1(I)$, и в интервале $I$ существует колеблющееся дифференциальное уравнение*

$$(10) \qquad v'' + g(x)\, v = 0,$$

*причем $g(x) \in C_0(I)$, так, что $H(x, y, u) \leqq 0$, где*

$$H(x, y, u) = \frac{1}{4} p^2(x) + \frac{1}{2} p'(x) + g(x) - q(x) \frac{f(u)}{u} + \\ + \frac{1}{2} r(x) \left[ k_2^2 \frac{h^2(y)}{f^2(u)} + 1 \right] \leqq 0.$$

*То всякое решение $y(x)$ уравнения* (1) *с одной нулевой точкой в $I$, имеет бесконечное число нулей в $I$.*

**Доказательство.** Для решения $y(x)$ уравнения (1) справедливо тождество

$$(21) \qquad \left[ y(x)\, y''(x) - \frac{1}{2} y'^2(x) \right] \exp \left\{ \int_{x_0}^{x} p(t)\, \mathrm{d}t \right\} = M(x_0) - \\ - \frac{1}{2} \int_{x_0}^{x} [p(t)\, y'^2(t) + 2q(t)\, f[y'(t)]\, y(t) + 2r(t)\, h[y(t)]\, y(t)] \exp \left\{ \int_{x_0}^{t} p(s)\, \mathrm{d}s \right\} \mathrm{d}t.$$

Из предположений теоремы имеют силу следующие соотношения

$$(22) \qquad -q(x)\, f(y')\, y \leqq \frac{1}{2} q(x) [f^2(y') + y^2] \leqq \frac{1}{2} q(x)\, k_2^2 y'^2 + \frac{1}{2} q(x)\, y^2,$$

$$(23) \qquad -r(x)\, h(y)\, y \leqq -r(x)\, k_1 y^2.$$

Если выражения (22) и (23) подставим в (21), то получим неравенство

$$(24) \qquad \left[ y(x)\, y''(x) - \frac{1}{2} y'^2(x) \right] \exp \left\{ \int_{x_0}^{x} p(t)\, \mathrm{d}t \right\} \leqq \frac{1}{2} \int_{x_0}^{x} [k_2^2 q(t) - p(t)]\, y'^2(t) \times \\ \times \exp \left\{ \int_{x_0}^{t} p(s)\, \mathrm{d}s \right\} \mathrm{d}t + \frac{1}{2} \int_{x_0}^{x} [q(t) - 2k_1^2 r(t)] \exp \left\{ \int_{x_0}^{x} p(s)\, \mathrm{d}s \right\} \mathrm{d}t + M(x_0).$$

Аналогично теореме 3, при помощи соотношения (24), можно показать первое утверждение теоремы.

Для того, чтобы доказать второе утверждение, надо поступать аналогично теореме 3.

Таким образом получим тождество (16). Смотря на предположения теоремы

$$r(x) \geqq 0, \qquad 0 < f(u)\, u \leqq k_2 u^2$$

выполнено соотношение (18). Если выражение (18) подставим в тождество (16) получаем неравенство

$$
\left\{\frac{v(x)}{z(x)}\left[v(x)\,z'(x) - v'(x)\,z(x)\right]\right\}' \leqq -\left[v'(x) - \frac{v(x)\,z'(x)}{z(x)}\right]^2 +
$$

$$
(25) \qquad + v^2(x)\left[\frac{1}{4}p^2(x) + \frac{1}{2}p'(x) + g(x) - q(x)\frac{f[z(x)]}{z(x)}\right] +
$$

$$
+ \frac{1}{2}r(x)\left[k_2^2\frac{h^2(y)}{f^2[z(x)]} + 1\right].
$$

Отсюда, аналогично теореме 3 следует утверждение теоремы.

**Теорема 5.** *Пусть для всех* $x \in I$, $y \in R - \{0\}$, $u \in R - \{0\}$, *выполнены неравенства* $q(x) \leqq 0$, $r(x) > 0$, $q(x) + 2k_1 r(x) \geqq 0$, $p(x) + k_2^2 q(x) \geqq 0$, $0 < f(u)\,u \leqq k_2 u^2$, $h(y)\,y \geqq k_1 \dot{y}^2$, *причем* $k_1 > 0$, $k_2$ *— постоянные.*

*Обозначим через*

$$
A(x) = \{[p(x) + k_2^2 q(x)]\,[q(x) + 2k_1 r(x)]\}^{\frac{1}{2}}.
$$

*Пусть* $A(x) \in C_1(I)$, $A'(x) + A(x)\,p(x) \leqq 0$, *причем левая часть этого неравенства тождественно в никаком промежутке не равна нулю, и*

$$
\int_a^\infty A(x)\,\mathrm{d}x = \infty.
$$

*Если для некоторово неколеблющеюся решения* $y(x)$ *уравнения* (1), *которое определенно в* $I$, *и для точки* $x_0 \in I$ *выполнено условие*

$$
(26) \qquad y(x_0)\,y''(x_0) - \frac{1}{2}y'^2(x_0) + \frac{1}{2}A(x_0)\,y^2(x_0) \leqq 0,
$$

*потом существует такое число* $b \geqq x_0$, *что в интервале* $\langle b;\, \infty)$ *выполнено* $y(x) \neq 0$, *и*

$$
\operatorname{sgn} y(x) = \operatorname{sgn} y''(x) \neq \operatorname{sgn} y'(x) = \operatorname{sgn} y'''(\dot{x}),
$$

$$
\lim_{x\to\infty} y(x) = \lim_{x\to\infty} y'(x) = \lim_{x\to\infty} y''(x) = 0.
$$

**Доказательство.** Для решения $y(x)$, аналогично теореме 3 получим

$$
\left[y(x)\,y''(x) - \frac{1}{2}y'^2(x)\right]\exp\left\{\int_{x_0}^x p(t)\,\mathrm{d}t\right\} +
$$

$$
(27) \qquad + \frac{1}{2}\int_{x_0}^x \{[p(t) + k_2^2 q(t)]\,y'^2(t) + [q(t) + 2k_1 r(t)]\,y^2(t)\}\,.
$$

$$. \exp\left\{\int_{x_0}^{t} p(s)\,\mathrm{d}s\right\}\mathrm{d}t \leqq y(x_0)\,y''(x_0) - \frac{1}{2}\,y'^2(x_0).$$

Но так как выполнено

$$\frac{1}{2}\left[p(x) + k_2^2 q(x)\right] y'^2(x) + \frac{1}{2}\left[q(x) + 2k_1 r(x)\right] y^2(x) \geqq$$
$$\geqq 2\left\{\frac{1}{4}\left[p(x) + k_2^2 q(x)\right]\left[q(x) + 2k_1 r(x)\right]\right\}^{\frac{1}{2}} y(x)\,y'(x) = A(x)\,y(x)\,y'(x),$$

согласно (27) следует

$$\left[y(x)\,y''(x) - \frac{1}{2}\,y'^2(x) + \frac{1}{2}\,A(x)\,y^2(x)\right]\exp\left\{\int_{x_0}^{x} p(t)\,\mathrm{d}t\right\} \leqq$$
$$\leqq y(x_0)\,y''(x_0) - \frac{1}{2}\,y'^2(x_0) + \frac{1}{2}\,A(x_0)\,y^2(x_0) + \frac{1}{2}\int_{x_0}^{x}\left[A'(t) + A(t)\,p(t)\right] y^2(t)\,.$$
$$(28) \qquad . \exp\left\{\int_{x_0}^{t} p(s)\,\mathrm{d}s\right\}\mathrm{d}t.$$

Учитывая (28), легко можно проверить, что нулевые точки решения $y(x)$ и его первой производной отделяются направо от $x_0$.

Пусть $y(x)$ неколеблющееся в $I$. Потом согласно последнему утверждению существует число $\bar{x} > x_0$ такое, что $y(x) \neq 0$, $y'(x) \neq 0$ для $x \in \langle \bar{x}; \infty)$. При выполнении этого предположения, из неравенства (28) следует

$$(29) \qquad \frac{y'(y)}{y(x)} \leqq -\frac{1}{2}\int_{\bar{x}}^{x} A(t)\,\mathrm{d}t + \frac{y'(\bar{x})}{y(\bar{x})}\,.$$

Из последнего неравенства очевидно, что существует число $x_1 \geqq \bar{x}$ такое, что для $x \geqq x_1$ имеют силу $y(x) > 0$, $y'(x) < 0$, или $y(x) < 0$, $y'(x) > 0$. В первом случае из уравнения (1) следует

$$(30) \qquad y''' + p(x)\,y'' = -q(x)\,f(y') - r(x)\,h(y) < 0.$$

Пусть существует число $x_2 \geqq x_1$ такое, для которого выполнено неравенство $y''(x_2) \leqq 0$. Умножая (30) на функцию

$$\exp\left\{\int_{x_2}^{x} p(t)\,\mathrm{d}t\right\},$$

и интегрируя в пределах от $x_2$ до $x$ постепенно получим

$$y''(x) < y''(x_2) \exp\left\{-\int_{x_2}^{x} p(t)\,\mathrm{d}t\right\} \leqq 0,$$

$$y(x) < y'(x_2)(x - x_2) + y(x_2).$$

Последнее неравенство приводит противоречие. Таким образом для $x \geqq x_1$ получаем неравенство $y''(x) > 0$ для всех $x \in \langle x_1 ; \infty)$. На основании этого из уравнения (1) вытекает $y'''(x) > 0$ для $x \geqq x_1$. В случае $y(x) < 0$, $y'(x) > 0$ для $x \geqq x_1$ аналогично получаем $y''(x) < 0$, $y'''(x) > 0$ для $x \in \langle x_1 ; \infty)$. Следовательно, существует число $b \geqq x_0$ такое, что для $x \geqq b$ выполняется

$$\operatorname{sgn} y(x) = \operatorname{sgn} y''(x) \neq \operatorname{sgn} y'(x) = \operatorname{sgn} y'''(x). \tag{31}$$

Согласно соотношению (31), легко проверить, что $y'(x) \to 0$, $y''(x) \to 0$ для $x \to \infty$.

Пусть $y(x) \to L \neq 0$ для $x \to \infty$. Потом неравенство (29) приводит противоречие. Таким образом, теорема доказана.

## ЛИТЕРАТУРА


[1] Greguš M.: *Oszillatorische Eigenschaften der Lösungen der linearen Differentialgleichungen dritter Ordnung, $y''' + 2Ay' + (A' + b)y = 0$, wo $A = A(x) \leqq 0$ ist*, Czechoslovak Math. J. (84) 9 (1959), 416—428.

[2] Hanan M.: *Oscilation criteria for third-order linear Differential Equation*, Pacific J. Math. (3) 11 (1961), 919—944.

[3] Lazer A. C.: *The behavior of solutions of the Differential Equation $y''' + p(x)y' + q(x)y = 0$.* Pacific Journal of Mathematics, Vol. 17, No. 3, 1966.

[4] Moravský L.: *Einige Eigenschaften der Lösungen der linearen Differentialgleichung 3. Ordnung $y''' + p(x)y'' + 2A(x)y' + [A'(x) + b(x)]y = 0$.* Acta F.R.N. Univ. Comen. Mathematica XVIII — 1967, 35—44.

5] Ráb M.: *Oszilatorische Eigenschaften der Lösungen linearen Differentialgleichung dritter Ordnung.* Acta Acad. Sci. Cechoslovenicae Basis Brunensis 27 (1955), 349—360.



*L. Moravský*
*040 01 Košice, Švermova 5*
Чехословакия