Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae
1, 3 (1960)

COMPLEXES OSCULATEURS DES CONGRUENCE W

Vladimír HORÁK, Brno

I.

Les congruences qui admettent des complexes osculateurs le long de ses droites sont les congruences W et les congruences qui possèdent pour nappes focales une courbe et une surface développable, c. à. d. d'après M. E. Čech les congruences du type IV.

L'ensemble des images secondaires des complexes osculateurs Ω signalés est dans l'espace de Klein une variété (Ω) à deux ou à une dimension, alors une surface ou une courbe.

L'étude de ces variétés conduit aux résultats suivants:

Il y a les 4 espèces des congruences non paraboliques du type IV:

Type IV_1 - les congruences dont les surfaces focales sont une surface développable non conique et une courbe directrice; les plans osculateurs de la courbe directrice en leurs points d'intersection avec les plans tangents à la surface développable ne passent pas par les points correspondants de l'arête de rebroussement de la surface développable.

Type IV_2 - une surface focale est un cône et les plans osculateurs de la courbe focale ne passent pas par son sommet.

Type IV_3 - diffère du type IV_1 de la manière que les plans tangents à la surface développable passent par les points correspondants de l'arête de rebroussement de la surface développable.

Type IV_4 - la surface développable est un cône et la courbe directrice est une courbe plane dont le plan passe par le sommet du cône.

La variété (Ω) des images secondaires des complexes osculateurs de la congruence du type $IV_{1,2}$ est une surface réglée et inversement. Les points des droites de la surface mentionnée sont des images secondaires de complexes osculateurs de la congruence envisagée le long des droites qui passent par le même point focal sur la courbe focale.

Pour les congruences du type $IV_{3,4}$ la variété (Ω) est une courbe (dans l'espace de Klein) dont les espaces osculateurs $\bar{P}_2^{\Omega}$ (mais pas les espaces tangents $\bar{P}_1$) sont tangents à l'hyperquadrique de Klein (K-quadrique). Toutes les droites de la congruence qui partent d'un même point focal sur la courbe focale possèdent un complex osculateur commun dont l'image secondaire est le point de la courbe (Ω). On connaît que les courbes dont tous les espaces osculateurs ne sont pas tangents à la K-quadrique représentent dans l'espace de Klein des congruences de Segre.)

Les classes des congruences du type IV_1, IV_2, IV_3, IV_4 dépendent par ordre de 4 ou bien de 3,3,2 fonctions arbitraires d'une variable.

Dorénavant soit L une congruence W. Soit (ϕ) l'image de Klein de la congruence L ; (ϕ) est une surface qui possède un réseau conjugué dont les courbes correspondent aux décompositions asymptotiques de la congruence L. La surface (Ω) possède aussi un réseau conjugué dont les courbes correspondent à la même décomposition de L. Les espaces osculateurs $\bar{P}_2^{\phi}$ de (ϕ) et $\bar{P}_2^{\Omega}$, $\bar{P}_4^{\Omega}$ de (Ω) sont tangents à la K-quadrique au point qui est l'image de la droite correspondante de L. Les espaces osculateurs de la surface (Ω) réalisent une correspondance ponctuelle $(\Omega)\to(\phi)$ entre les surfaces (Ω) et (ϕ); la même correspondance est réalisée par les espaces tangents $\bar{P}_2^{\Omega}$ de (Ω) et par les tangentes et les espaces osculateurs des courbes sur (Ω) qui correspondent à la décomposition canonique relative à la dualisation en tant que déformation projective de L. La correspondance ponctuelle $(\phi)\to(\Omega)$ réalise la polarité par rapport à la K-quadrique de Klein de manière que les points (Ω) sont des pôles des espaces osculateurs $\bar{P}_4^{\phi}$ de (ϕ). A la décomposition canonique mentionnée correspondent alors dans l'espace de Klein des courbes de (Ω) caractérisées géométriquement de la manière suivante: lest tangentes de ces courbes et seulement de ces courbes sont tangentes à la K-quadrique de Klein.

A chaque couche des courbes sur (Ω) correspond une décomposition de L aux surfaces reglées qui réalisent en même temps une décomposition des surfaces focales de L.

A chaque courbe sur la surface (Ω) dont les espaces osculateurs $\overline{P}_1$, $\overline{P}_2$ ne sont pas tangents à la K-quadrique de Klein correspond dans l´espace P_3 une congruence L de Segre tangente à L. Les nappes focales réglées de L sont tangentes aux nappes focales de L aux courbes qui correspondent à la décomposition en surfaces réglées relative de L.

On a déterminé les équations différentielles des surfaces développables des congruences L.

L´étude de la décomposition canonique conduit aux certaines congruences paraboliques dont les nappes focales forment les surfaces de la décomposition mentionnée. Il existe en général une 4-couche des courbes sur la surface (Ω) dont les congruences tangentes à L sont du type IV.

Soit (Ω_1) ou (Ω_2) la transformation de Laplace de la surface (Ω). La condition nécessaire et suffisante pour qu´une des nappes focales de L est réglée est: une certaine des transformations de Laplace est située sur la K-quadrique et elle dégenère en une courbe de la manière de Laplace.

La condition nécessaire et suffisante pour que le point (Ω) soit conjugué en même temps aux deux points (Ω_1) et (Ω_2) par rapport à la K-quadrique de Klein est: La surface (Ω) réprésente une congruence D, c. à. d. une congruence qui réalise l´applicabilité projective des deux nappes focales.

Toutes les considérations précédentes sont effectuées en faisant usage du repère mobile du à M. E. Cartan.

II.

M. E. Čech a introduit au Mémoire: Transformations développables des congruences des droites (Čechosl.mat.žurnal

6, 1956, p.260 - 286) quelques classes des transformations développables ou en d'autre termes des déformations projectives du premier et du seconde ordre.

Pour abréger nous voulons se servir autant qu'il est nécessaire de la notation introduite dans la Mémoire de M. E. Čech: Déformation projective des congruences W (Čechosl. mat.žurn. 6, 1956, p. 401 - 414).

L'étude du contact réalisé entre les variétés des images secondaires des complexes osculateurs par les K-transformations qui correspondent aux homographies tangentes ou osculatrices conduit aux nouvelles propriétés des congruences W et à la déduction de certaines classes de couples de congruences W en déformation projective.

Soit T une transformation développable des congruences L et L' (supposées W) et (Ω) et (Ω'), resp. $(\emptyset)$ et $(\emptyset')$ les surfaces dont les points sont des images secondaires des complexes osculateurs des droites de ces congruences, resp. des images de Klein des droites de L et L'.

L'homographie tangente de T porte le plan tangent $\bar{P}_2^{\Omega}$ et l'espace osculateur $\bar{P}_4^{\Omega}$ dans le plan tangent $\bar{P}_2^{\Omega'}$ et dans l'espace osculateur $\bar{P}_4^{\Omega'}$ de (Ω') et on a en général $H\Omega \neq \Omega'$

Il y a toujours ∞^2 homographies tangentes à T qui transforment des complexes osculateurs Ω et Ω' les unes aux autres. Les K-transformations de l'espace de Klein qui correspondent aux homographies tangentes mentionnées réalisent le contact géométrique du premier ordre des surfaces (Ω) et (Ω') et les tangentes aux courbes du réseau conjugué de (Ω) et (Ω') (v. l'article précédent) ne se portent pas les unes aux autres.

Les homographies qui réalisent les déformations focales (autant qu'elles existent) c. à. d. qui réalisent les contacts analytiques d'une des couples de surfaces focales de L et L', des couples de dualisations des autres surfaces focales et des droites de L et L' se trouvent dans l'ensemble des homographies tangentes qui portent les complexes géometriques osculateurs l'un à l'autre.

La condition nécéssaire et suffisante pour que la transformation développable T soit une déformation focale de la première (seconde) espèce est: il existe une homographie tangente qui porte un certain complex arithmétique osculateur ${}^1\Omega/{}^2\Omega/$ de L dans un certain complex arithmétique osculateur ${}^1\Omega'$ $/{}^2\Omega'/$ de L'.

L'homographie tangente qui réalise la transformation ${}^1\Omega \leftrightarrow {}^1\Omega'$ et l'homographie qui réalise la transformation ${}^2\Omega \leftrightarrow {}^2\Omega'$ (autant qu'elles existent) ne coincident pas en général. Si~~é~~ et seulement s'il existe une homographie tangente qui réalise en même temps les deux transformations ${}^1\Omega \leftrightarrow {}^1\Omega$ et ${}^2\Omega \leftrightarrow {}^3\Omega$ ensuite T est une déformation projective.

Passons à l'examination de l'homographie osculatrice des congruences W, qui ne sont pas de Segre.

La K-transformation H_0 relative à l'homographie H_0 osculatrice à T réalise entre les surfaces (Ω) et (Ω') le contact géometrique du premier ordre et les tangentes aux courbes du réseau conjugué se portent l'une à l'autre. En général sur les surfaces (Ω) et (Ω') il existe justement une couche de courbes entre lesquelles la K-transformation H_0 réalise le contact analytique du premier ordre. Si $\epsilon_i' = \tau\epsilon_i$ $(\tau^2 \neq 0, 1)$ on a ensuite nécessairement $\tau = const.$ et le coefficient de dilatation du contact géométrique de deux courbes quelconques $H_0 C$ et C' qui possèdent dans le poit commun $H_0\Omega \equiv \Omega'$ une tangente commune est $\frac{1}{\tau} = const$.

Si~~é~~ et seulement si les congruences L et L' sont en déformation projective singulière c. à. d. L et L' sont~~d~~ des congruences R , puis la K-transformation H_0 réalise le contact analytique du seconde ordre entre les surfaces (Ω) et (Ω') et en même temps le contact analytique du premier ordre des deux transformations de Laplace (Ω_1), (Ω_1') et (Ω_{-1}), (Ω_{-1}') de ces surfaces.

La condition nécéssaire et suffisante pour que les congruences L et L' (pas de Segre) soient des congruences D en déformation projective c. à. d. des congruences qui réalisent l'applicabilité projective des deux nappes focales est: les surfaces (Ω_1) et (Ω_1') et en même temps les surfaces (Ω_{-1}) et (Ω'_{-1}) ont le contact analytique au premier ordre.

La classe des couples de congruences $\tau_1' = \tau t_1, t_2' = \tau t_2$ ($\tau^2 = const. \neq 0,1$) dépend de 8 fonctions arbitraires d'une variable et si une de ces congruences est donnée l'autre dépend d'une fonction arbitraire d'une variable. Le cas $\tau = 1$ v. E. Čech: Déformation projective des congruences W. La classe des congruences $\tau = -1$ qui ne sont pas dualisations l'une de l'autre dépend aussi de 8 fonctions arbitraires d'une variable et L étant donnée $-L'$ dépend d'une constante arbitraire.

Les résultats qui concernent des couples des congruences en déformation projective dont au moins une est de Segre nous ne voulons pas énoncer.

A chaque courbe de la surface (Ω) correspond dans l'espace P_3 une congruence $\overline{L}$ de Segre tangente à L. Si L et L' sont deux déformations projectives puis en général $\overline{L}$ et $\overline{L}'$ ne sont pas ni dans une transformation développable. Il existe une classe (dépendant d'une fonction arbitraire de deux variables) des couples des congruences L et L' dans déformation projective non singulière dont les congruences de Segre tangentes à L et L' et correspondantes aux courbes des réseaux conjuguées sur (Ω) et (Ω') sont des déformations projectives. Si p. ex. est donnée ensuite L' dépend de 2 fonctions arbitraires d'une variable.