Alois Švec

Les espaces de König du point de vue des espaces fibrés à connexion

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, Vol. 3 (1962), No. 1, 11--14

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/104902

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae

3, 1 (1962)

LES ESPACES DE KÖNIG DU POINT DE VUE DES ESPACES FIBRÉS À CONNEXION

Alois ŠVEC, Praha

1. La groupe affine $G = GA(n, R)$ soit l'ensemble des éléments $\{\mathbb{A}, \mathbb{a}\}$ où $\mathbb{A}$ ou $\mathbb{a}$ resp. sont les matrices $(n \times n)$ ou $(n \times 1)$ resp. avec $\det |\mathbb{A}| \neq 0$ et la multiplication est donnée par

$$\{\mathbb{A}, \mathbb{a}\} \cdot \{\mathbb{B}, \mathbb{b}\} = \{\mathbb{A}\,\mathbb{B},\ \mathbb{A}\,\mathbb{b} + \mathbb{a}\} .$$

Si l'on introduit les coordonnées X_{ij}, x_i d'une manière évidente, on a les champs analytiques des vecteurs $\partial/\partial X_{ij}$, $\partial/\partial x_i$. Les champs

$$R_{ij} = X_{ri} \cdot \partial/\partial X_{rj} , \quad R_i = X_{ri} \cdot \partial/\partial x_r$$

sont invariables de gauche et les éléments $L_{ij} = (R_{ij})_e$, $L_i = (R_i)_e$ (où $e \in G$ est l'unité de G) forment la base de l'algèbre de Lie $\underline{G}$ avec multiplication

$$[L_{ij}, L_{kl}] = \delta_{jk} L_{il} - \delta_{il} L_{kj} ,$$

$$[L_{ij}, L_k] = \delta_{jk} L_i , \quad [L_i, L_j] = 0 .$$

On a

$$\operatorname{adj} \{\mathbb{A}, \mathbb{a}\} (L_{ij}) = A_{ri} \tilde{A}_{js} L_{rs} - A_{ri} \tilde{A}_{jt} a_t L_r ,$$

$$\operatorname{adj} \{\mathbb{A}, \mathbb{a}\} (L_i) = A_{ri} L_r$$

où $(\tilde{A}_{ij}) = (A_{ij})^{-1}$.

2. L'espace de König P s'appelle l'espace fibré trivial $U_r \times GA(n, R)$ où U_r est un domain de l'espace R^r

avec les coordonnées u^α. La translation à droite soit donnée par

$R_g\,(u;\ \mathbb{Y}, \mathbb{y}) = (u; \mathbb{G}^{-1}\mathbb{Y},\ \mathbb{G}^{-1}\mathbb{y} - \mathbb{G}^{-1}\mathbb{g})$ où $g = \{\mathbb{G}, \mathbb{g}\}$.

Sur P nous avons les champs des vecteurs

$\partial/\partial u^\alpha$, $\partial/\partial Y_{ij}$, $\partial/\partial y_i$; les vecteurs verticaux sont $\partial/\partial Y_{ij}$, $\partial/\partial y_i$ et leurs combinations. Définissons la transformation $h_p\colon \pi^{-1}(u) \to G$ par

$h_p\,(u; \mathbb{Y}, \mathbb{y}) = \{\mathbb{P}\mathbb{Y}^{-1},\ \mathbb{p} - \mathbb{P}\mathbb{Y}^{-1}\mathbb{y}\}$ où $p = (u; \mathbb{P}, \mathbb{p})$; h_p est un isomorfism entre $\pi^{-1}(u)$ et G.

La connexion sur P est donnée par la 1-forme ω différentiable sur P avec ses valeurs dans $\underline{G}$ pour laquelle

(1) $\omega\,(V_p) = h_p'\,(V_p)$ pour chaque vecteur vertical,

(2) $\omega\,(R_g'\,\tau) = \operatorname{adj}\,(g^{-1})\ \omega\,(\tau)$ pour chaque vecteur τ et chaque $g \in G$.

<u>Théorème</u>. La connexion la plus générale est donnée par la forme ω pour laquelle

$$\omega\left(\frac{\partial}{\partial u^\alpha}\right)_p = \gamma_{\alpha ij}(p)\,L_{ij} + \gamma_{\alpha i}\,(p)\,L_i\ ,$$

$$\omega\left(\frac{\partial}{\partial Y_{ij}}\right)_p = -\tilde{P}_{js}\,L_{is} + \tilde{P}_{js}\,p_s\,L_i\ , \qquad \omega\left(\frac{\partial}{\partial y_i}\right)_p = -L_i$$

où $\gamma_{\alpha ij}(p)$, $\gamma_{\alpha i}(p)$ sont les fonctions différentiables sur P et on a $\gamma_{\alpha ij}(R_g(p)) = G_{sj}\,\tilde{G}_{ir}\,\gamma_{\alpha rs}(p)$,

$$\gamma_{\alpha ij}\,(R_g(p)) = \tilde{G}_{ir}\,g_s\,\gamma_{\alpha rs}(p) + \tilde{G}_{ir}\,\gamma_{\alpha r}(p)\ .$$

3. Soit $\rho\colon U \to P$ une section de P donnée par $Y_{ij} = P_{ij}(u)$, $y_i = p_i(u)$. On peut définir la forme locale

ω_ρ sur U avec les valeurs dans $\underline{G}$ par $\omega_\rho(V) = \omega(\rho' V)$ pour chaque vecteur V sur U . On trouve

$$\omega_\rho\left(\frac{\partial}{\partial u^\alpha}\right) = \Gamma^{(\rho)}_{\alpha ij}(u)\, L_{ij} + \Gamma^{(\rho)}_{i}(u)\, L_i$$

où

$$\Gamma^{(\rho)}_{\alpha ij}(u) = \gamma_{\alpha ij}(u;\, P_{ij}(u),\, p_i(u)) - \tilde{P}_{kj}(u)\, \frac{\partial P_{ik}(u)}{\partial u^\alpha},$$

$$\Gamma^{(\rho)}_{\alpha i}(u) = \gamma_{\alpha i}(u;\, P_{ij}(u),\, p_i(u)) + \tilde{P}_{js}(u)\, p_s(u)\, \frac{\partial P_{ij}(u)}{\partial u} - \frac{\partial p_i(u)}{\partial u^\alpha}.$$

Si l'on a une autre section $\sigma : U \to P$ donnée par

$Y_{ij} = \tilde{G}_{ik}(u)\, P_{kj}(u), \quad y_i = \tilde{G}_{ij}(u)\, p_j(u) - \tilde{G}_{ij}(u)\, g_j(u)$

de sorte que $\sigma(u) = R_{\{G_{ij}(u),\, g_i(u)\}}\, \rho(u)$, on obtient .

$$\text{(a)} \qquad \Gamma^{(\sigma)}_{\alpha ij} = G_{sj}\, \tilde{G}_{ir}\, \Gamma^{(\rho)}_{\alpha rs} - G_{rj}\, \frac{\partial \tilde{G}_{ir}}{\partial u^\alpha},$$

$$\text{(b)} \qquad \Gamma^{(\sigma)}_{\alpha i} = \tilde{G}_{ir} g_s\, \Gamma^{(\rho)}_{\alpha rs} + \tilde{G}_{ir}\, \Gamma^{(\rho)}_{\alpha r} + \tilde{G}_{ij}\, \frac{\partial g_j}{\partial u^\alpha}.$$

Si je pose $\rho_i = -\tilde{G}_{ij} g_j$, j'obtiens

$$\text{(b')} \qquad \Gamma^{(\sigma)}_{\alpha i} = \tilde{G}_{ir}\, \Gamma^{(\rho)}_{\alpha r} - \rho_k G_{sk}\, \tilde{G}_{ir}\, \Gamma^{(\rho)}_{\alpha rs} - \frac{\partial \rho_i}{\partial u^\alpha} + \rho_u G_{ij}\, \frac{\partial \tilde{G}_{jk}}{\partial u^\alpha}.$$

Les équations (a), (b') sont les équations (12), (13) de mon travail "L'application des variétés à connexion à certains problèmes de la géométrie différentielle", Čech. mat. žurnal, 10(85)1960, 523 - 550, ce qui prouve l'équivalence des définitions des espaces de König.