Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae

Jurij Ivanovich Gribanov

О метризации одного пространства функций

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, Vol. 4 (1963), No. 1, 43--46

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/104927

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae

4, 1 (1963)

О МЕТРИЗАЦИИ ОДНОГО ПРОСТРАНСТВА ФУНКЦИЙ

Ю.И. ГРИВАНОВ , Казань

Пусть (X, Σ, μ) есть пространство с полной мерой [1] и $S = S(X, \Sigma, \mu)$ обозначает множество всех измеримых почти всюду конечных функций, заданных на этом пространстве. Если мера μ конечна, то S метризуемо при помощи

$$\rho(f, g) = \int \frac{|f-g|}{1+|f-g|} \, d\mu .$$

При этом S есть полное метрическое пространство, в котором сходимость по метрике эквивалентна сходимости по мере.

В настоящей заметке показывается, что S может быть метризовано и в том случае, когда μ не является конечной мерой.

§ 1. Ограниченная сходимость по мере

Будем говорить, что последовательность функций $\{f_n\} \subset S$ ограниченно сходится по мере к измеримой функции f , если $f_n \mathcal{X}_E \to f \mathcal{X}_E$ по мере каково бы ни было измеримое множество E конечной меры.

Если $f_n \to f$ ограниченно по мере, то $f \in S$.

Из сходимости по мере вытекает ограниченная сходимость по мере. Обратное имеет место лишь в том случае, когда мера μ конечна. Таким образом, ограниченная сходимость по мере есть новый вид сходимости в пространстве измеримых функций.

Будем говорить, что последовательность функций $\{f_n\} \subset S$ ограниченно фундаментальна по мере, если последовательность функций $\{f_n \mathcal{X}_E\}$ фундаментальна по мере каково бы ни было множество E конечной меры.

Ясно, что если $f_n \to f$ ограниченно по мере, то последовательность функций $\{f_n\}$ ограниченно фундаментальна по мере.

<u>Теорема 1</u>. Пусть мера μ σ-конечна. Тогда если последовательность функций $\{f_n\} \subset S$ ограниченно фундаментальна по мере, то существует такая функция $f \in S$, что $f_n \to f$ ограниченно по мере. Если кроме того $f_n \to g$ ограниченно по мере, то $f = g$ почти всюду.

<u>Доказательство</u>. Так как мера μ σ-конечна, то существует такая последовательность $\{E_n\}$ попарно непересекающихся множеств конечной меры, что $X \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. Последовательность $\{f_n \mathcal{X}_{E_k}\}$ фундаментальна по мере. Поэтому найдется функция $\mathcal{F}_k \in S$ такая, что $\mathcal{F}_k = 0$ вне E_k и $f_n \mathcal{X}_{E_k} \to \mathcal{F}_k$ по мере. Функция $f = \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{F}_k \in S$. Покажем, что $f_n \to f$ ограниченно по мере. Пусть E - любое множество конечной меры. Так как

$$\mu E = \sum_{k=1}^{\infty} \mu (E \cap E_k),$$

то для любого $\varepsilon > 0$ можно указать m так, чтобы $\sum_{k=m+1}^{\infty} \mu (E \cap E_k) < \varepsilon$. Поэтому каково бы ни было

$$\mu [E(|f_n - f| \geq \alpha)] < \sum_{k=1}^{m} \mu [E_k (|f_n - f| \geq \alpha] + \varepsilon .$$

Так как $f_n \to f$ по мере на каждом множестве E_k, то отсюда следует, что $f_n \to f$ по мере на множестве E. Таким образом, $f_n \to f$ ограниченно по мере.

Если $f_n \to g$ ограниченно по мере, то $f = g$ почти всюду на каждом множестве E_k. Отсюда просто вытекает, что $f = g$ почти всюду.

§ 2. Метризация пространства S

Пусть μ - σ-конечная (но не конечная) мера. Тогда можно указать такую последовательность $\{E_n\}$ попарно непересекающихся измеримых множеств конечной меры, что $\mu E_n \geq 1$ $(n = 1, 2, \dots)$ и $X \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$.

Для $f, g \in S$ положим

$$\rho(f, g) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n \mu E_n} \int_{E_n} \frac{|f-g|}{1+|f-g|} d\mu ;$$

Легко убедиться, что $\rho(f, g)$ удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым к метрике. Следовательно, S есть метрическое пространство.

<u>Теорема 2</u>. Метрическое пространство S полно.

Возьмем любую фундаментальную последовательность $\{f_n\} \subset S$. При любом $\alpha > 0$ и каждом $K = 1, 2, \dots$

$$2^k \cdot \mu E_k \cdot \rho(f_n, f_m) \geq \int_{E_k} \frac{|f_n - g_m|}{1+|f_n - g_m|} d\mu \geq \frac{\alpha}{1+\alpha} \cdot \mu[E_k(|f_n - f_m| \geq \alpha)] .$$

Отсюда можно заключить, что последовательность функций $\{f_n\}$ ограниченно фундаментальна по мере. Но тогда в силу теоремы 1 существует функция $f \in S$ такая, что $f_n \to f$ ограниченно по мере. В силу теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла при любом $\ell = 1, 2, \dots$

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{\ell} \frac{1}{2^k \mu E_k} \int_{E_k} \frac{|f_n - f_m|}{1+|f_n - f_m|} d\mu = \sum_{k=1}^{\ell} \frac{1}{2^k \mu E_k} \int_{E_k} \frac{|f_n - f|}{1+|f_n - f|} d\mu .$$

Из последнего соотношения мы, замечая, что $\rho(f_n, f_m) \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0$, легко заключаем, что $\rho(f_n, f) \to 0$. Таким образом, мы показали, что пространство S полно.

<u>Теорема 3</u>. В пространстве S сходимость по метрике эквивалентна ограниченной сходимости по мере.

При доказательстве теоремы 2 фактически было установлено, что из сходимости по метрике вытекает играниченная сходимость по мере. Нетрудно также показать, что и обратно, из ограниченной сходимости по мере вытекает сходимость по метрике в пространстве S .

Литература

[1] П. ХАЛМОШ, Теория меры. ИИЛ, Москва, 1953 .