Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae

V. D. Tret'yakov

Конформная интерпретация сыметрических конформно-евклидовых пространств

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, Vol. 4 (1963), No. 2, 65--73

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/104931

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae
4, 2 (1963)

КОНФОРМНАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ СИММЕТРИЧЕСКИХ КОМФОРМНО-ЕВКЛИДОВЫХ ПРОСТРАНСТВ

В.Д. ТРЕТЬЯКОВ, г. Куйбышев

В работах [2] и [5] доказано, что линейчатая геометрия любого трехмерного пространства постоянной кривизны является геометрией симметрического конформно-евклидова пространства (которые в дальнейшем называются SC-пространствами) четырех измерений нулевой сигнатуры. Поэтому возникает вопрос о построении конформной интерпретации SC-пространств. Это построение опирается на результат А.П. Широкова [7], доказавшего, что геометрия любого SC-пространства может быть реализована, как внутренняя геометрия В-гиперквардики, нормализованной с помощью абсолютной инволюции.

1. n-мерным конформным пространством $\overset{\ell}{C}_n$ индекса ℓ называется пространство, образом точки которого является точка абсолютной квадрики $\overset{\ell+1}{Q}_n$ индекса $\ell+1$ в проективном пространстве $\mathcal{P}_{n+1}$. ([1], стр. 105, и [3], стр. 391).

m-мерной сферой в $\overset{\ell}{C}_n$ называется множество точек , которому при этом соответствии отвечают точки сечения абсолютной квадрики $\overset{\ell+1}{Q}_n$ $(m+1)$-мерной плоскостью $\mathcal{P}_{m+1}$ m-мерная сфера называется слабо мнимой, если $\mathcal{P}_{m+1}$ вещественна, а ее сечение с $\overset{\ell+1}{Q}_n$ мнимо. Если a_{ab} определяет $Q_n \in \mathcal{P}_{n+1}$, то, как обычно, скалярное произведение определяется формулой:

$$xy = a_{ab}\, x^a y^b \qquad (a, b = 1, 2, \dots n+2) \tag{1}$$

и точке $\xi^a \in \mathcal{P}_{n+1}$, не лежащей на Q_n ($\xi^2 \neq 0$), соот -

ветствует гиперсфера ξ в ${}^{l}C_n$. В дальнейшем будем обозначать точки ${}^{l}C_n$ латинскими буквами, а гиперсферы (сферы) – греческими. Тогда $\xi\eta = 0$, если сферы ξ и η ортогональны, $\xi x = 0$, если точка x принадлежит сфере ξ и $xy = 0$ если точки x и y лежат на одной изотропной прямой. m-мерной плоскости $\mathcal{P}_m \in \mathcal{P}_{n+1}$ соответствует m-мерная связка сфер. Эти связки называются гиперболическими, эллиптическими или параболическими, если соответствующее им $\mathcal{P}_m$ соответсвенно пересекает, не пересекает или касается абсолютной квадрики. Классификация m-мерных и ортогональных к ним $(n-m)$-мерных связок усложняется по сравнению со случаем собственно конформного пространства, разобранным в [1], т.к. она зависит и от m и от l. Однако, и в общем случае имеют место теоремы:

а) Через точку, лежащую на одной из сфер и не лежащую на другой проходит единственная окружность, ортогональная этим сферам.

в) Через две точки x и y, лежащие на данной сфере ξ проходит единственная окружность, ортогональная этой сфере. Если z – точка этой окружности, то

$$z = x + \alpha\xi - \frac{1}{2}e d^2 y$$

(2) $$(x^2 = y^2 = \xi x = \xi y = 0; \quad xy = 1 \quad \xi^2 = e).$$

2. Теория нормализованных конформных пространств C_n со знакоопределенной формой $g_{\alpha\beta}$ разработана А.П. Норденом [1], §§ 82 – 86 и гл. IX для трехмерного пространства. В силу результатов п 1, все результаты §§ 82 – 86 и большинство результатов гл IX 1 переносятся на случай пространства с произвольной метрикой. В частности, переносятся понятия соприкасающегося круга, направляющего круга последовательности сфери-

...ческих элементов, понятие опорной сферы, круга кривизны, таблица скалярных произведений, векторов конформного репера, деривационные уравнения и их условия интегрируемости имеют вид [1], § 84 и § 86

(3)

	x	x_β	X
x	0	0	1
x_α	0	$g_{\alpha\beta}$	0
X	1	0	0

(4)
$$\partial_\alpha x = x_\alpha ,$$
$$\nabla_\beta x_\alpha = -p_{\beta\alpha} x - g_{\beta\alpha} X ,$$
$$\partial_\alpha X = p_\alpha^\sigma x_\sigma ;$$

(5)
$$-\frac{1}{2} R_{\alpha\beta\gamma}{}^{\delta} = \delta^\delta_{[\alpha} p_{\beta]\gamma} + p^\delta_{[\alpha} g_{\beta]\gamma} ,$$
$$\nabla_{[\gamma} p_{\beta]\alpha} = 0 , \quad p_{[\alpha\beta]} = 0 .$$
$$(\alpha, \beta \ldots = 1, 2 \ldots n).$$

и аналогично для гиперповерхностей в ${}^{\ell}C_n$:

(6)

	x	x_j	X	ξ
x	0	0	1	0
x_i	0	g_{ij}	0	0
X	1	0	0	0
ξ	0	0	0	$\overset{\circ}{e}$

$$\begin{aligned}
&\partial_i x = x_i\,, \\
&\nabla_j x_i = -p_{ji}\, x - g_{ji}\, X + e\, b_{ji}\, \xi\,, \\
(7)\quad &\partial_i X = p_i^k x_k + t_i\, \xi\,, \\
&\partial_i \xi = -b_i^k x_k - e\, t_i\, x\,;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&p_{[ij]} = 0\,, \quad \nabla_k g_{ji} = 0\,, \\
&-\frac{1}{2} R_{kji}{}^{m} = \delta_{[k}^{m} p_{j]i} + p_{[k}^{m} g_{j]i} + 2\, b_{[k}^{m} b_{j]i}\,, \\
(8)\quad &\nabla_{[k} b_{j]i} = t_{[k}\, g_{j]i}\,, \\
&\nabla_{[k} p_{j]i} = e\, t_{[k}\, b_{j]i}\,, \\
&\nabla_{[j} t_{i]} = p_{s[i}\, b_{j]}^{s} \qquad (i,j\ldots = 1,2\ldots n-1)\,.
\end{aligned}$$

Тензоры p_{ij}, b_{ij} и t_i зависят от выбора сферы ξ, касающейся поверхности и при ее изменении меняются следующим образом:

если

$$\check{\xi} = \xi - \lambda x\,, \quad \text{то}$$

$$\check{X} = X + e\lambda\xi - \frac{1}{2} e\lambda^2 x$$

и

$$\begin{aligned}
&\check{b}_{ij} = b_{ij} + \lambda g_{ij}\,, \\
&\check{p}_{ij} = p_{ij} - e\lambda b_{ij} - \frac{1}{2} e\lambda^2 g_{ij}\,, \\
&\check{t}_i = t_i + \partial_i \lambda \quad (i,j = 1,2\ldots n-1)\,;
\end{aligned}$$

ср. [1], § 122 и [4], § 4 .

Теоремы:

а) Для того, чтобы гиперповерхность $V_{n-1} \subset \overset{l}{C}_n$ имела неопределенные линии кривизны, необходимо и достаточно, что бы она была гиперсферой [1], § 122 ;

в) Для того, чтобы вектор t_i был градиентен, необходимо и достаточно, чтобы нормализация определялась касательными сферами [1], § 125 ,

легко доказываются в общем случае.

3. В обобщенном бипланарном пространстве B_{n+1} [5] с абсолютной инволюцией

(9) $\gamma^b_a : \gamma^a_c \gamma^c_b = \varepsilon \delta^a_b \quad (\varepsilon = \pm 1, 0;\ a, b, c, d = 1, 2 \ldots n+2)$

рассмотрим B-квадрику Q_n , определяемую матрицей a_{ab} . Т.к. $a_{cd} \gamma^c_a \gamma^d_b = \varepsilon a_{ab}$, то в конформном пространстве ${}^{\ell}C_n$ абсолютная коллинеация индуцирует конформное преобразование, которое мы будем называть абсолютной инволюцией. Каждой точке или гиперсфере ξ соответствует инволюционная ей точка или гиперсфера $\tilde{\xi} : \tilde{\xi}^a = \gamma^a_b \xi^b$ очевидно $\tilde{\xi} \tilde{\eta} = \varepsilon \xi \eta$.

Наряду со скалярным произведением гиперсфер можно ввести внутреннее произведение:

$$\xi \tilde{\eta} = a_{ab} \xi^a \tilde{\eta}^b$$

обладающее свойствами:

(10) $$\xi \tilde{\eta} = \tilde{\eta} \xi = \tilde{\xi} \eta \ .$$

Нормирование гиперсфер определяется условием: $\xi^2 = e$ $(e = \pm 1)$, а нормирование точек ($x^2 = 0, x\tilde{x} \neq 0$) - условием: $x \tilde{x} = 1$. Это нормирование в силу (10) является каноническим; см.[1], стр. 213 . Нормирование особых точек ($x^2 = x\tilde{x} = 0$) определяется в зависимости от вида абсолютной инволюции.

Особой прямой B_{n+1} (т.е. прямой, принадлежащей абсолютной конгруенции) в ${}^{\ell}C_n$ соответствует пучек гиперсфер $\eta = \xi - h \tilde{\xi}$ который при $\varepsilon = 0; -1$ обязательно является гиперболическим. Точки, принадлежащие этому пучку можно назвать центрами, а значения инварианта h , которые им соответствуют – радиусеми гиперсфер этого пучка. Очевидно, что понятия центра, и радиуса являются инвариантами В-движений, сохраняющих В-квадрику. Если $x \in \xi$ и a – центр ξ, то $h = ax/a\tilde{x}$ постоянно для всех точек $x \in \xi$. Скалярное и внутреннее произведение гиперсфер нетрудно выразить через произведения их центров и радиусы.

Деривационные уравнения имеют тот же вид (4), что и в общем случае, причем нормализующей точкой ([1], § 84) является точка $\tilde{x} = X$, инволюционная точке x. К условиям интегрируемости (5) добавляются условия:

$$\nabla_\gamma p_{\beta\alpha} = 0\,, \qquad p^\sigma_\alpha p_{\sigma\beta} = \varepsilon g_{\alpha\beta}\,, \tag{11}$$

налагаемые на тензор $p_{\alpha\beta}$.

Каждому направлению v^α соответствует опорная сфера

$$\nu = v^\alpha X_\alpha\,. \tag{12}$$

Нетрудно доказать следующие теоремы:

1) Для того, чтобы направление v^α переносилось параллельно, необходимо и достаточно, чтобы

$$d\nu = dx + \beta\tilde{x}$$

(ν – опорная сфера направления v^α).

2) Любая геодезическая SC -пространства расположена на двумерной сфере являющейся SC_2. Если векторы $x, \tilde{x}, dx, d\tilde{x}$ линейно независимы, SC_2 определяется однозначно и геодезическая является изогональной траекторией пучка окружностей, пересекающихся в центрах сфер dx и $d\tilde{x}$. Если $x, \tilde{x}, dx$ и $d\tilde{x}$ линейно зависимы, геодезическая является окружностью, переходящей в себя при абсолютной инволюции.

3) Для того, чтобы направление v^α переносилось параллельно,

необходимо и достаточно, чтобы радиус опорной сферы $\nu = v^{\alpha} x_{\alpha}$ оставался постоянным, а вектор, соответствующий её центру, переносился параллельно.

Рассмотрим кривую $x = x(t)$. Если назвать центр сферы $\eta = dx/dt$ нормальной точкой, а кривую, которую он описывает, нормалией, то имеют место теоремы:

4) Для того, чтобы вектор a^{α} , соответствующий точке a ($a = a^{\alpha} x_{\alpha}$) переносился параллельно вдоль кривой Γ , необходимо и достаточно, чтобы Γ была нормалией кривой, описываемой точкой a .

5) Если направление v^{α} переносится параллельно вдоль кривой Γ , то Γ является нормалией кривой, описанной центром опорной сферы $\nu = v^{\alpha} x_{\alpha}$.

4. Выбрав в качестве репера гиперповерхности $V_{n-1} \subset SC_n$ точки x , $\widetilde{x}$ и сферы X_i и ξ $(\xi x_i = 0)$, получим уравнения (7). Если в качестве сферы ξ выбрана опорная сфера пространства SC_n ($\xi = \xi^{\alpha} x_{\alpha}$), ортогональная сферам X_i , к условиям интегрируемости (8) добавляются условия:

$$\nabla_k p_{ji} = e(l_{ik} t_j + l_{jk} t_i),$$
$$\nabla_k t_i = -p_i^s l_{ks} - \sigma l_{ki},$$
$$p_i^s p_{sj} = t_i t_j + \varepsilon g_{ij},$$

где σ - корень характеристического уравнения матрицы p_i^j причем $\sigma = p_s^s + s$, s - сигнатура тензора p_{α}^{β} , обращающаяся в нуль при ε в (9) равном 0 или -1 . Приведенное характеристическое уравнение матрицы p_i^j имеет вид: $(\lambda - \sigma) \cdot (\lambda^2 - \varepsilon) = 0$.

5. Все результаты настоящей работы непосредственно прилагаются к линейчатой геометрии трехмерных пространств, рассмотренных в таблице работы [5] под номерами 5 - 11, в

частности к линейчатой геометрии пространств S_3, ${}^{1}S_3$, $\mathcal{R}_3$, ${}^{1}\mathcal{R}_3$ в обозначениях [3].

При этом гиперсфере соответствует линейный комплекс, ее центрам - оси комплекса, двумерной сфере - линейная конгруенция, нормальной точке - стрикционная нормаль, нормалии - поверхность, описанная стрикционными нормалями.

В случаях 1 - 4 той же таблицы (в частности, для биаксиальных пространств и пространства с линейчатым абсплютом) нужно более детальное исследование, т.к. в этих случаях центр сферы (ось комплекса) может быть как вещественной, так и мнимой.

Результаты, получающиеся при этом для линейчатой геометрии евклидова пространства $\mathcal{R}_3$ были получены М.Е. Цыпкиным, [6].

Литература

[1] А.П. НОРДЕН, Пространства аффинной связности. Г.И.Т.Т.Л., 1950 .

[2] А.П. НОРДЕН, Об одном классе четырехмерных А-пространств. Изв.высш.уч.зав.математика,№ 4 (17), 1960, стр.145.

[3] Б.А. РОЗЕНФЕЛЬД, Неевклидовы геометрии, Г.И.Т.Т.Л., 1955 .

[4] В.Д. ТРЕТЬЯКОВ, К вопросу о гиперповерхностях в конформно-евклидовых пространствах. Волжский математический сборник № 1, 1963 .

[5] В.Д. ТРЕТЬЯКОВ, К вопросу о линейчатой геометрии в трехмерных пространствах Клейна. Д.А.Н., 1963 .

[6] М.Е. ЦЫПКИН, Дифференциальная геометрия линейчатого пространства и ее приложения к теории линейчатых поверхностъй. Уч.зап.Казанского

Ун-та, т. 112, кн.10, 1952 , стр. 77 .

[7] А.П. ШИРОКОВ, Проективная интерпретация конформно-евклидовых симметрических пространств. Уч.зап. Казанского Ун-та, т. 116, кн. 1, 1956 , стр. 15 .