Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae

Petr Hájek

Eine Bemerkung über standarde nichtreguläre Modelle der Mengenlehre

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, Vol. 6 (1965), No. 1, 1--6

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/104987

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae
6, 1 (1965)

EINE BEMERKUNG ÜBER STANDARDE NICHTREGULÄRE MODELLE DER MENGENLEHRE

Petr HÁJEK , Praha

Unter einem Modell verstehe ich nach Vopěnka ein durch ein Paar $(\bar{E}, \bar{\psi})$ bestimmtes (syntaktisches) Modell der Bernays-Gödelschen Mengenlehre, wobei $\bar{\psi}(X)$ das Prädikat " X ist eine Klasse des Modells" und $\bar{E}$ Konstante ist; über $\bar{E}$ ist in der Mengenlehre u.a. die Behauptung " $\bar{E}$ ist eine schwach innere Relation" beweisbar, siehe [H]. Aus [H] übernehmen wir alle Bezeichnungen. In dieser Note werden wir nur durch innere Relationen gegebene Modelle betrachten; nach [H] existiert zu jedem Modell $(\bar{E}, \bar{\psi})$ ein äquivalentes Modell $(\bar{\bar{E}}, \bar{\bar{\psi}})$ derart, dass die Behauptung " $\bar{\bar{E}}$ ist eine innere Relation" beweisbar ist. Ist ein Modell $(\bar{E}, \bar{\psi})$ gegeben, so ermöglichen das Prädikat $\bar{\psi}$ und die Konstante $\bar{E}$ Prädikate und Variablen "der Sprachen $*$ und $\#$ " zu definieren - siehe [H]. Wir beschränken uns (nach Vopěnka) auf die Modelle, in denen das Fundierungsaxiom gilt. Ist $(\bar{E}, \bar{\psi})$ ein Modell, so kann die Existenz der Klasse $On^{\#}$ bewiesen werden; $\#$-Elemente von $On^{\#}$ sind genau alle $\#$-Ordnungszahlen des Modells $(\bar{E}, \bar{\psi})$. Ihre ε_c^* - Elemente, d.h. Elemente im Sinne der Mengenlehre sind genau alle $*$ -Ordnungszahlen des Modells $(\bar{E}, \bar{\psi})$ denn nach dem Übersetungssatz aus [H] ist $Ord^* x^* \equiv Ord^{\#}(\Phi(x^*))$, $x^* \varepsilon_c^* On^{\#} \equiv$ $\equiv \Phi(x^*) \varepsilon^{\#} On^{\#}$. In [VI] wird gezeigt, dass die Klasse $On^{\#}$ durch die Relation $\bar{E}$ geordnet ist (das folgt daraus, dass

$On^{\#}$ im Sinne des Modells $(\bar{E}, \bar{\psi})$ durch die Relation $E^{\#}$ des Modells wohlgeordnet ist). Die Klasse $On^{\#}$ braucht aber nicht im Sinne der Mengenlehre durch $\bar{E}$ wohlgeordnet zu sein. Wie Vopěnka definieren wir:

Definition 1. Das Modell $(\bar{E}, \bar{\psi})$ ist standard, falls $On^{\#}\ We\ \bar{E}$ beweisbar ist.

Definition 2. Das Modell $(\bar{E}, \bar{\psi})$ ist regulär, falls $M^{\#}(X) \rightarrow M(X)$ beweisbar ist; stark regulär, falls $M(V^{\#})$ beweisbar ist; schwach regulär, falls es regulär ist und $Pt(V^{\#})$ beweisbar ist.x)

In der Arbeit [V3] konstruierte Vopěnka ein nichtstandardes nichtreguläres Modell der Mengenlehre. (Eine Methode zur Konstruktion nichtstandarder schwach regulärer Modelle ist in [V2] angegeben.) In [BJ] zeigen Balcar und Jech unter der Voraussetzung der Existenz zweier unerreichbarer Kardinalzahlen in der Mengenlehre, dass ein Modell konstruiert werden kann, in dem die Konstruktion eines anderen Modells möglich ist, das vom Standpunkt des ersten Modells aus standard und nichtregulär ist.

In der vorliegenden Note zeige ich, dass in jedem standarden nichtregulären Modell die Behauptung "es existiert eine unerreichbare Kardinalzahl" beweisbar ist. Wenn also ein standardes nichtreguläres Modell gefunden wäre, so würde die Unabhängigkeit der Hypothese der Existenz einer unerreichbaren Kardinalzahl nachgewiesen (weil die Hypothese der Nichtexistenz solcher Zahl widerspruchsfrei ist).

Zur Definition der Mengen p_{α} siehe [V1]. Wir führen noch drei Prädikate ein, die die Isomorphie von Klassen betreffen. Wir definieren

$$X \, Ism_{R,S} \, Y \equiv (\exists F)(F \, Isom_{R,S}(X, Y)),$$

$$X \downarrow Ism_{R,S} \, Y \equiv (\exists u \in X)(Seg_R(X, u) \, Ism_{R,S} \, Y),$$

$$X \, Ism \downarrow_{R,S} Y \equiv (\exists v \in Y)(X \, Ism_{R,S} \, Seg_S(Y, v)).$$

(X ist mit Y isomorph; ein Segment von X ist mit Y isomorph; X ist mit einem Segment von Y isomorph. Die Begriffe $Isom$, Seg s. [G]; R , S sind hier beliebige Relationen.)

Lemma 1. $X \, We \, R \rightarrow X \, Ism_{R,E} \, On \vee X \downarrow Ism_{R,E} \, On \vee X \, Ism \downarrow_{R,E} On$.

Beweis. Ist $M(X)$ erfüllt, so folgt $X \, Ism \downarrow_{R,E} On$ aus [G] 7.7,2 ; gilt $Pr(X) \& (u) \, M(Seg_R(X, u))$, so ist $X \, Ism_{R,E} \, On$ nach [G] 7.7,1 ; ist schliesslich $\neg(u) \, M(Seg_R(X, u))$ erfüllt, dann existiert das in der durch R bestimmten Ordnung erste u, für das $Seg_R(X, u)$ keine Menge ist; für dieses u gilt $Seg_R(X, u) \, Ism_{R,E} \, On$, d.h. $X \downarrow Ism_{R,E} \, On$. Es ist klar, dass stets genau eine der angegebenen Alternativen erfüllt ist.

In weiterem nehmen wir an, dass ein bestimmtes standardes Modell $(\bar{E}, \bar{\psi})$ gegeben ist. Nach dem Lemma 1 gilt

$$On^{\#} \, Ism_{\bar{E},E} \, On \vee On^{\#} \downarrow Ism_{\bar{E},E} \, On \vee On^{\#} \, Ism \downarrow_{\bar{E},E} On ,$$

also existiert der eindeutig bestimmte Isomorphismus zwischen On und $On^{\#}$ bzw. zwischen einer diesen Klassen und einem Segment der zweiten; wir bezeichnen diesen Isomopphismus mit Z . Es gilt

Lemma 2. $(\forall \alpha \in \mathfrak{D}(Z))(M(p^{\#}_{\phi(Z'\alpha)}))$.

Beweis. Es gilt $p^{\#}_{0^{\#}} = p^{\#}_{\phi(Z'0)} = 0^{\#} = 0$ und $M(0)$. Ist für alle $\beta < \alpha$ $M(p^{\#}_{\phi(Z'\beta)})$, dann gilt auch $M(p^{\#}_{\phi(Z'\alpha)})$. Es ist nämlich $\bigcup^{\#}_{\beta^{\#} \in^{\#} \phi(Z'\alpha)} p^{\#}_{\beta^{\#}} = \bigcup_{\beta \in \alpha} p^{\#}_{\phi(Z'\beta)}$, daraus folgt $M(\bigcup_{\beta^{\#} \in^{\#} \phi(Z'\alpha)} p^{\#}_{\beta^{\#}})$. Gilt $M(x^{\#})$, so gilt auch $M(P^{\#}(x^{\#}))$, denn $u \in P^{\#}(x^{\#}) \equiv \Phi(u) \subseteq^{\#} x^{\#})$, $\Phi(u) \subseteq^{\#} x^{\#} \rightarrow$ $\rightarrow \Phi(u) \subseteq x^{\#}$, es gibt also höchstens so viele Elemente in

$P^{\#}(x^{\#})$, wie es Elemente in $P(x^{\#})$ gibt. Unter unserer Voraussetzung ist mithin tatsächlich $M(p^{\#}{}_{\phi(Z'\alpha)})$ erfüllt.

Satz 1. Es sei $(\bar{E}, \bar{\psi})$ ein standardes Modell. 1) $(\bar{E}, \bar{\psi})$ ist stark regulär dann und nur dann, wenn $On^{\#}\, Ism \downarrow_{\bar{E},E} On$ beweisbar ist. 2) $(\bar{E}, \bar{\psi})$ ist schwach regulär dann und nur dann, wenn $On^{\#}\, Ism_{\bar{E},E}\, On$ beweisbar ist. 3) $(\bar{E}, \bar{\psi})$ ist nicht regulär dann und nur dann, wenn $On^{\#} \downarrow Ism_{\bar{E},E}\, On$ beweisbar ist.

Beweis. 1) Es sei $(\bar{E}, \bar{\psi})$ stark regulär. Dann gilt $M(V^{\#})$, also $M(On^{\#})$, also $On^{\#}\, Ism \downarrow_{\bar{E},E} On$. Ist $On^{\#}\, Ism \downarrow_{\bar{E},E} On$, d.h. ist $\alpha_0 \in On$, $On^{\#}\, Ism_{\bar{E},E}\, \alpha_0$, so ist $(\alpha^{\#}) M(p^{\#}{}_{\alpha^{\#}})$ (nach dem Lemma 2) und $V^{\#} = \bigcup^{\#}_{\alpha^{\#} \epsilon^{\#} On^{\#}} p^{\#}_{\alpha^{\#}} = \bigcup_{\alpha \epsilon \alpha_0} p^{\#}{}_{\phi(Z'\alpha)}$, daraus folgt $M(V^{\#})$.

3) Es sei $On^{\#} \downarrow Ism_{\bar{E},E}\, On$. Das bedeutet, dass ein $\alpha^{\#} \epsilon^{\#} On^{\#}$ existiert, für das $\alpha^{\#}\, Ism_{\bar{E},E}\, On$ gilt; daraus ergibt sich $Pr(\alpha^{\#})$, $(\bar{E}, \bar{\psi})$ ist also nicht regulär. Es sei $(\bar{E}, \bar{\psi})$ nicht regulär. Es existiert ein $x^{\#}$, so dass $Pr(x^{\#})$, also $(\exists \alpha^{\#})(Pr(p^{\#}_{\alpha^{\#}}))$, nach dem Lemma 2 ist also $\alpha^{\#}$ keiner Ordnungszahl isomorph. Nach dem Beweis des Lemmas 1 ergibt sich daraus $On^{\#} \downarrow Ism_{\bar{E},E}\, On$. Ähnlich beweist man 2).

Satz 2. Es sei $(\bar{E}, \bar{\psi})$ ein standardes nichtreguläres Modell, es sei $\gamma^{\#}$ eine Konstante, die jene Ordnungszahl des Modells bezeichnet, für die $\gamma^{\#}\, Ism_{\bar{E},E}\, On$ beweisbar ist. Im Modell gilt, dass $\gamma^{\#}$ eine unerreichbare Kardinalzahl ist.

Beweis. 1) $\gamma^{\#}$ ist eine Kardinalzahl des Modells. Es sei nämlich $F'\langle Z'\alpha, Z'\beta\rangle^{*} = \langle \alpha, \beta \rangle$; wenn $f^{\#}$ eine im Sinne des Modells eineindeutige Abbildung von γ^{*} auf $\beta^{*} <^{*} \gamma^{*}$ ist und dabei $\beta^{*} = Z'\beta$ gilt, so ist $F''f^{*}$ eine eineindeutige Abbildung von On auf β ; daher kann ein solches f^{*} nicht existieren.

2) γ^{*} hat im Modell ein Limesindex. Ist nämlich β^{*} eine beliebige Kardinalzahl des Modells und gilt $\beta^{*} <^{*} \gamma^{*}$, so existiert ein β derart, dass $\beta^{*} = Z'\beta$. Zu diesem β existiert eine Kardinalzahl (der Mengenlehre) $\bar{\beta} > \beta$ und $Z'\bar{\beta}$ ist eine Kardinalzahl des Modells, $Z'\beta <^{*} Z'\bar{\beta} <^{*} \gamma^{*}$. (Man beweist genau so, wie in 1), dass kein f^{*} existieren kann, das im Sinne des Modells eine eineindeutige Abbildung von $Z'\bar{\beta}$ auf $\delta^{*} <^{*} Z'\bar{\beta}$ ist.)

3) γ^{*} isteine reguläre Kardinalzhal des Modells. Sonst müsste ein f^{*} existieren so, dass $\mathfrak{Fnc}^{*} f^{*} \& \mathfrak{D}^{*}(f^{*}) <^{*} \gamma^{*} \&$
$\& (\forall \beta^{*} \in^{*} \mathfrak{D}^{*}(f^{*}))\, (f^{*\prime *} \beta^{*} <^{*} \gamma^{*}) \& U^{*} \mathcal{W}^{*}(f^{*}) = \gamma^{*}$.
Es sei $\mathfrak{D}^{*}(f^{*}) = Z'\alpha$, $G = F''f^{*}$. Es ist $\mathfrak{Fnc}\, G \& \mathfrak{D}(G) =$
$= \alpha \& U\mathcal{W}(G) = On$. Das ist aber ein Widerspruch, denn On ist mit keiner Ordnungszahl konfinal. 1) - 3) bedeutet, dass γ^{*} eine unerreichbare Kardinalzahl des Modells ist, q.e.d.

L i t e r a t u r

[G] K. GÖDEL, The consistency of the axiom of choice and the generalized continuum-hypothesis etc., Princeton Univ.Press 1940.

[V1] P. VOPĚNKA, Modeli teorii množestv, Zeitschrift für Math. Logik und Grundlagen der Mathematik 8(1962), 281-292.

[V2] P. VOPĚNKA, Postroenie modelej teorii množestv metodom ul´traproizvedenija, Zeitschr.für Math.Logik und G.d.M. 8(1962),293-304.

[V3] P.VOPĚNKA, Postroenie nestandartnoj nereguljarnoj modeli teorii množestv,Zeitschr.f.Math.Logik u.G.d.M. 9(1963),229-233.

[H] P. HÁJEK, Die durch die schwach inneren Relationen gegebenen Modelle der Mengenlehre, Zeitschr. f.Math.Logik u.G.d.M.10(1964),151-157.

[BJ] B. BALCAR, T. JECH, Modeli teorii množestv obrazovannyje soveršennym otnošenijem, Časopis pro pěstování matematiky (im Druck).

x) Das Modell $(\bar{E}, \bar{\psi})$ wird nichtregulär genannt, falls $(\exists X)(M^{*}(X) \;\&\; Pr(X))$ beweisbar ist. Die Frage, ob es z.B. Modelle gibt, die weder regulär noch nichtregulär sind, bleibt offen.