

Jiří Fiala

Eine Verallgemeinerung der Mehlerschen Formel

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, Vol. 6 (1965), No. 1, 7--11

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/104988>

Terms of use:

© Charles University in Prague, Faculty of Mathematics and Physics, 1965

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

EINE VERALLGEMEINERUNG DER MEHLERSCHEN FORMEL

Jiří FIALA, Praha

Es gibt mehrere Beweise (siehe z.B. [1],[2]) der sogenannten Mehlerschen Formel

$$(1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^n n!} H_n(x) H_n(y) = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} \exp\left[\frac{2xyz - z^2(x^2 + y^2)}{1-z^2}\right]$$

wo das $H_n(x)$ das Hermitesche Polynom des n-ten Grades ist. Hier wird ein Beweis auf dem Grund bestimmter Integraldarstellung des Hermiteschen Polynomen gegeben und dieses Resultat auf die n-dimensionale Hermitesche Polynome verallgemeinert.

Die von uns benützte Integraldarstellung hat die folgende Form:

$$H_n(x) = \frac{2^n}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (x+it)^n e^{-t^2} dt$$

und ihr Beweis wird leicht durch die Entwicklung nach der binomischen Formel des Integranden, durch die gliedweise Integration und durch die Vergleichung mit der gewöhnlichen Darstellung gewonnen:

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2}) = 2^n x^n - 2^{n-1} \binom{n}{2} x^{n-2} + 2^{n-2} \cdot 1 \cdot 3 \cdot \binom{n}{4} x^{n-4} - \dots$$

Und jetzt ein neuer Beweis der Mehlerschen Formel (1):

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^n n!} H_n(x) H_n(y) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2z(x+it)(y+it) - s^2 - t^2} ds dt = \\ &= \frac{1}{\pi} e^{2xy} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp[2zix - s^2] \int_{-\infty}^{+\infty} \exp[2zity - 2zts - t^2] dt ds = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{2xyz} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp[2xys - s^2 - y^2 z^2 - 2iysx^2 + x^2 s^2] ds =$$

$$= e^{2xyz - y^2 z^2} \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} \exp\left[-\frac{1}{1-z^2} z^2 (x^2 - 2xyz + y^2 z^2)\right]$$

n-dimensionale Hermitesche Polynome sind so definiert:

Es sei $\varphi(x, x)$ eine reelle positiv-definite quadratische Form mit der Matrix $A = \|a_{ik}\|$. $H_{m_1, \dots, m_n}^{(\varphi)}(x_1, \dots, x_n)$ bezeichnen wir die Koeffizienten der Potenzentwicklung der Funktion

$$\exp\left[2 \sum_{i=1}^n x_i \xi_i - \varphi(x, x)\right],$$

wo

$$\xi_i = \sum_{k=1}^n a_{ik} x_k.$$

Also, die definierende Relation ist:

$$(2) \sum_{m_1, \dots, m_n=0}^{\infty} \frac{x_1^{m_1}}{m_1!} \cdots \frac{x_n^{m_n}}{m_n!} H_{m_1, \dots, m_n}^{(\varphi)}(x_1, \dots, x_n) =$$

$$= \exp\left[2 \sum_{i=1}^n x_i \xi_i - \varphi(x, x)\right].$$

Satz 1. Für das, zu der quadratischen Form φ zugehörige n-dimensionale Hermitesche Polynom gilt diese Integraldarstellung

$$H_{m_1, \dots, m_n}^{(\varphi)}(x_1, \dots, x_n) =$$

$$(3) = \frac{2^{m_1 + \dots + m_n}}{\sqrt{\Delta_\varphi} (\sqrt{\pi})^n} \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} (\xi_1 + it_1)^{m_1} \cdots (\xi_n + it_n)^{m_n} e^{-\tilde{\varphi}(t, t)} dt_1 \cdots dt_n$$

wo Δ_φ die Determinante der Form φ und $\tilde{\varphi}$ die zu φ adjungierte Form sind, d.h.

$$\tilde{\varphi}(x, x) = \sum_{i, k} \frac{A_{ik}}{\Delta_\varphi} x_i x_k$$

wo A_{ik} die algebraischen Komplementen der Elementen a_{ik} sind.

Beweis wird so durchgeführt, dass wir beweisen, dass die durch Integrale (3) definierten Funktionen die Relation (2) erfüllen:

$$\sum_{m_1, \dots, m_n} \frac{z_1^{m_1}}{m_1!} \dots \frac{z_n^{m_n}}{m_n!} \cdot \frac{2^{m_1 + \dots + m_n}}{\sqrt{\Delta_\varphi} (V\pi)^n} \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} (\xi_1 + it_1)^{m_1} \dots$$

$$\dots (\xi_n + it_n)^{m_n} e^{-\tilde{\varphi}(t, t)} dt_1 \dots dt_n = \frac{1}{\sqrt{\Delta_\varphi} (V\pi)^n} \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \exp[2(x_1 t_1 i + \dots$$

$$\dots + x_n t_n i) - \tilde{\varphi}(t, t)] \cdot$$

$$\cdot dt_1 \dots dt_n \cdot \exp[2(x_1 \xi_1 + \dots + x_n \xi_n)] =$$

$$= \exp[2(x_1 \xi_1 + \dots + x_n \xi_n) - \varphi(t, t)] ,$$

nach dem bekannten Integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\varphi(x, x) + 2 \sum_{i=1}^n c_i x_i} dx_1 \dots dx_n = \sqrt{\frac{\pi^n}{\Delta_\varphi}} e^{\tilde{\varphi}(c, c)}$$

(siehe z.B. [1] S. 206).

Satz 2. Seien φ, ψ zwei reelle positiv-definite quadratische Formen und $H_{m_1, \dots, m_n}^{(\varphi)}, H_{m_1, \dots, m_n}^{(\psi)}$ entsprechende Hermitesche Polynome. Die quadratische Form

$$\Phi(s, s) = \tilde{\psi}(s, s) - \varphi(xs, xs)$$

mit der Matrix

$$\left\| \frac{B_{ij}}{\Delta_\psi} - x_i x_j a_{ij} \right\|$$

und mit der Determinante, die wir $\Delta(x)$ bezeichnen, ist positiv-definit für hinreichend kleine x . Für diese x gilt die folgende Verallgemeinerung der Mehlerschen Formel

$$\sum_{m_1, \dots, m_n} \frac{x_1^{m_1}}{2^{m_1} m_1!} \dots \frac{x_n^{m_n}}{2^{m_n} m_n!} H_{m_1, \dots, m_n}^{(\varphi)}(x_1, \dots, x_n) H_{m_1, \dots, m_n}^{(\psi)}(y_1, \dots, y_n) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\Delta_\psi \cdot \Delta(x)}} \exp[2 \sum_{\nu} x_\nu \xi_\nu y_\nu - \varphi(x\eta, x\eta) + \tilde{\Phi}(c, c)]$$

wo

$$\eta_\nu = \sum_{\mu} b_{\nu\mu} x_\mu, \quad c_\nu = x_\nu \left(\xi_\nu - \sum_{\mu} a_{\mu\nu} x_\mu \eta_\mu \right)$$

(die Form ψ hat die Matrix $B = \|b_{\nu\mu}\|$.)

Beweis wird so durchgeführt, dass wir in die rechte Seite der beweisenden Formel die Integraldarstellung nach dem Satz 1 einsetzen und folgende Berechnungen durchführen:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{m_1, \dots, m_n} \frac{z_1^{m_1}}{2^{m_1} m_1!} \dots \frac{z_n^{m_n}}{2^{m_n} m_n!} H_{m_1, \dots, m_n}^{(\varphi)} \cdot H_{m_1, \dots, m_n}^{(\psi)} = \\
 & = \frac{1}{\pi^n \sqrt{\Delta_\varphi} \Delta_\psi} \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \sum \frac{(2z_1)^{m_1} \dots (2z_n)^{m_n}}{m_1! \dots m_n!} (\xi_1 + it_1)^{m_1} \times \\
 & \times (\eta_1 + is_1)^{m_1} \dots (\xi_n + it_n)^{m_n} (\eta_n + is_n)^{m_n} \exp[-\mathcal{Q}(t, t) - \\
 & - \tilde{\psi}(s, s)] dt_1 ds_1 \dots dt_n ds_n = \\
 & = \frac{1}{\pi^n \sqrt{\Delta_\varphi} \Delta_\psi} \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \exp[2 \sum_{\nu} z_\nu (\xi_\nu + it_\nu)(\eta_\nu - is_\nu) - \\
 & - \mathcal{Q}(t, t) - \tilde{\psi}(s, s)] dt_1 \dots dt_n ds_1 \dots ds_n = \\
 & = \frac{\exp[2 \sum_{\nu} z_\nu \xi_\nu \eta_\nu]}{\pi^n \sqrt{\Delta_\varphi} \Delta_\psi} \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \exp[2i \sum_{\nu} z_\nu \xi_\nu s_\nu - \\
 & - \tilde{\psi}(s, s)] \cdot \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \exp[2 \sum_{\nu} z_\nu (i\eta_\nu - s_\nu)t_\nu -}_{2n} \\
 & - \mathcal{Q}(t, t)] dt_1, \dots, dt_n ds_n = \frac{\exp[2 \sum_{\nu} z_\nu \xi_\nu \eta_\nu]}{\pi^n \sqrt{\Delta_\varphi} \Delta_\psi} \times \\
 & \times \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \exp[2i \sum_{\nu} z_\nu \xi_\nu s_\nu - \tilde{\psi}(s, s)] \cdot \sqrt{\pi^n \Delta_\varphi}}_{2n} \times \\
 & \times \exp[\varphi(x_1 \eta - x_2 s, x_1 \eta - x_2 s)] ds_1 \dots ds_n = \\
 & = \frac{\exp[2 \sum_{\nu} z_\nu \xi_\nu \eta_\nu - \varphi(x \eta, x \eta)]}{\sqrt{\pi^n} \sqrt{\Delta_\psi}} \times
 \end{aligned}$$

$$\times \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left[2 \sum_{\nu} i x_{\nu} \left(\xi_{\nu} - \sum_{\mu} a_{\mu\nu} x_{\mu} \eta_{\mu} \right) s_{\nu} - \right. \\ \left. - \tilde{\varphi}(s, s) - \varphi(xs, xs) \right] ds_1 \dots ds_n.$$

Woraus man leicht ersehen kann, was zu bewiesen war.

L i t e r a t u r :

- [1] A. ERDÉLYI, Über eine erzeugende Funktion von Produkten ·
Hermitescher Polynome, Math. Zeitschrift 44
(1939) 201-211.
- [2] N. WIENER, The Fourier Integral and certain of its appli-
cations, N.Y., 1933, Ch. I. § 87.