Jan Kadlec

Об одном обобщении уравнения теплопроводности. (Предварительное сообщение)

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, Vol. 6 (1965), No. 1, 13--18

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/104989`

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae
6, 1 (1965)

ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Ян КАДЛЕЦ (Jan Kadlec), Прага (Praha)

Предварительное сообщение.

1. Обозначения: E_{n+1} – $(n+1)$ – мерное Евклидово пространство точек $(x,t) = (x_1,\dots,x_n,t)$, x_i – пространственные переменные, t – время, Ω – ограниченная область в E_n, $-\infty \leqq a < b \leqq +\infty$, $Q = \Omega \times (a,b)$, $M^{\cdot}$ – граница множества M, $i = (i_1,\dots,i_n)$, i_n – неотрицательные целые числа, $|i| = i_1 + \dots i_n$, $D^i = \dfrac{\partial^{|i|}}{\partial x_1^{i_1}\dots\partial x_n^{i_n}}$, $k \geqq 0$, $\ell \geqq 0$ – целые числа, $a^{ij}(x,t)$ – ограниченные измеримые функции в Q $(|i| \leqq k,\ |j| \leqq k$, b^{α} – действительные постоянные $(\alpha = 0,\dots,\ell)$, $b^{\ell} = 1$.

Далее обозначим

$$A(u,v) = \sum_{\substack{|i|\leqq k\\ |j|\leqq k}} \int_Q \overline{a^{ij} D^i u}\, D^j v \, dQ \ ,$$

$$B(u,v) = \sum_{\alpha=0}^{\ell} \int_Q \overline{b^{\alpha} \frac{\partial^{\alpha+1} u}{\partial t^{\alpha+1}}}\, \frac{\partial^{\alpha} v}{\partial t^{\alpha}}\, dQ \ ,$$

$$D(u,v) = A(u,v) + B(u,v) \ ,$$

$\mathcal{D}(Q)$ – множество финитных функций на Q, $\mathcal{E}(Q)$ – множество бесконечно гладких функций на $\overline{Q}$ – замыкании Q, $\alpha' = \alpha + \frac{1}{2}$.

Предпологаем, что для всех $\varphi \in \mathcal{D}(Q)$ имеет место

$$\mathrm{Re}\, A(\varphi,\varphi) \geqq \nu \sum_{|i|\leqq k} |D^i \varphi|^2_{L_2(Q)} \qquad (\nu > 0) \ .$$

Скажем $Du = f$, где f – обобщенная функция, если для всех $\varphi \in \mathcal{D}(Q)$ справедливо $D(u,\varphi) = \overline{f(\bar\varphi)}$.

2. Определение пространства $\,^{\circ}W_2^{(k,\ell')} = \,^{\circ}W_2^{(k,\ell')}(\Omega \times (-\infty, \infty))$. Пусть $(a, b) = (-\infty, \infty)$.

Обозначим
$$|\varphi| = \frac{1}{2\pi}\left(\int_\Omega \int_{-\infty}^{\infty} |\eta|^{2\ell+1} \left|\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x,t) e^{i\eta t} dt\right|^2 d\eta\, dx\right)^{\frac{1}{2}},$$
$$\|\varphi\| = \left(\sum_{|i| \le k} |D^i \varphi|^2_{L_2(Q)} + |\varphi|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$
Тогда $\,^{\circ}W_2^{(k,\ell')}$ – замыкание $\mathcal{D}(Q)$ в норме $\|\,.\,\|$.

3. Определение пространства $\,^{\circ}_{R}W_2^{(k,\ell')}(\Omega \times (a, b))$.

Пусть $\mathfrak{M}$ – подмножество $\mathcal{D}(\Omega \times (-\infty, \infty))$ тех функций, для которых $\frac{\partial^\alpha \varphi}{\partial t^\alpha}(x,a) = \frac{\partial^\alpha \varphi}{\partial t^\alpha}(x,b) = 0$ $(\alpha = 0, 1, \dots, \ell - 1)$.

$\overline{\mathfrak{M}}$ – замыкание множества $\mathfrak{M}$ в пространстве $\,^{\circ}W_2^{(k,\ell')}$.

Обозначим
$$\|u\|_R^{(a,b)} = \inf_v \|v\|,$$
где нижная грань берется по всем функциям $v \in \overline{\mathfrak{M}}$, $v(x,t) = u(x,t)$ для $(x,t) \in \Omega \times (a, b)$.

$\,^{\circ}_{R}W_2^{(k,\ell')}$ – пространство функций u на $\Omega \times (a, b)$, для которых $\|u\|_R^{(a,b)} < +\infty$.

$\,^{\circ}_{R}W_2^{(k,\ell')} \equiv \,^{\circ}_{R}W_2^{(k,\ell')}(\Omega \times (a,b))$ с нормой $\|\,.\,\|_R^{(a,b)}$ является пространством Гильберта.

4. Определение $\,^{\circ}_{P}W_2^{(k,\ell')}(\Omega \times (a, b))$ и $\,^{\circ}_{S}W_2^{(k,\ell')}(\Omega \times (a,b))$.

Для $u \in \,^{\circ}W_2^{(k,\ell')}$ и $\varphi \in \mathcal{D}(Q)$ $(Q = \Omega \times (a, b))$ определим
$$\langle u, \varphi \rangle_a^b = (-1)^{\ell+1} \int_Q \bar u \,\frac{\partial^{2\ell+1}\varphi}{\partial t^{2\ell+1}}\, dQ.$$

Обозначим
$$|u|_P^{(a,b)} = \sup_{\substack{\|\varphi\|_R^{(a,b)} \le 1 \\ \varphi \in \mathcal{D}(Q)}} |\langle u, \varphi \rangle_a^b|$$

и $\overset{\circ}{{}_PW}{}_2^{(k,l')}(\Omega\times(a,b))$ – пространство всех $u\in\overset{\circ}{{}_RW}{}_2^{(k,l')}(\Omega\times(a,b))$, для которых $|u|_P^{(a,b)}<+\infty$ с нормой

$$\|u\|_P^{(a,b)}=\Big(\sum_{|i|\le k}|D^iu|^2_{L_2(Q)}+(|u|_P^{(a,b)})^2\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Далее обозначим $\overset{\circ}{{}_SW}{}_2^{(k,l')}(\Omega\times(a,b))$ подпространство $\overset{\circ}{{}_PW}{}_2^{(k,l')}(\Omega\times(a,b))$ тех функций u, для которых существует $v\in{}^\circ W_2^{(k,l')}$ такая, что $v(x,t)=0$ для $t<a$, $u(x,t)=v(x,t)$ для $a<t<b$.

5. Теорема. Пусть $v\in{}^\circ W_2^{(k,l')}$. Тогда

$$\|v\|_P^{(0,\infty)}\le C(\|v\|+\|v\|_P^{(-\infty,0)}).$$

6. Теорема. $\mathcal{D}(\Omega\times(a,b))$ плотно в $\overset{\circ}{{}_RW}{}_2^{(k,l')}(\Omega\times(a,b))$.

7. Определение. Для $u\in\overset{\circ}{{}_PW}{}_2^{(k,l')}(\Omega\times(a,b))$, $v\in\overset{\circ}{{}_RW}{}_2^{(k,l')}(\Omega\times(a,b))$ существует предел

$$\lim_{\varphi_n\to v}\langle u,\varphi_n\rangle_a^b$$

для $\varphi_n\to v$ в $\overset{\circ}{{}_RW}{}_2^{(k,l')}(\Omega\times(a,b))$, $\varphi_n\in\mathcal{D}(\Omega\times(a,b))$.

Этот предел обозначим $\langle u,v\rangle_a^b$.

8. Теорема. Пусть $u\in\overset{\circ}{{}_PW}{}_2^{(k,l')}(\Omega\times(a,b))$.

Тогда

$$\|u\|_R^{(a,b)}\le C\|u\|_P^{(a,b)}$$

9. Теорема. Все пространства ${}^\circ W_2^{(k,l')}$, $\overset{\circ}{{}_RW}{}_2^{(k,l')}(\Omega\times(a,b))$, $\overset{\circ}{{}_PW}{}_2^{(k,l')}(\Omega\times(a,b))$, $\overset{\circ}{{}_SW}{}_2^{(k,l')}(\Omega\times(a,b))$ являются полными.

10. Определение. Скажем, что $\Omega\in\mathcal{P}$, если для всех $u\in\overset{\circ}{{}_PW}{}_2^{(k,l')}(\Omega\times(-\infty,0))$ справедливо

$$\mathrm{Re}\,\langle u,u\rangle_{-\infty}^0\ge 0.$$

11. Теорема. Пусть $\Omega \in \mathcal{P}$, $u \in {}_S\overset{\circ}{W}{}_2^{(k,l')}(\Omega \times (a,b))$. Тогда существует постоянная $\mu > 0$ так, что

$$\sup_{\|v\|_R^{(a,b)} \leq 1} |D(u,v)| \geq \mu \|u\|_S^{(a,b)} .$$

12. Определение. ${}_R W_2^{(-k,-l')}(\Omega \times (a,b))$ обозначим сопряженное пространство к ${}_R\overset{\circ}{W}{}_2^{(k,l')}(\Omega \times (a,b))$.

13. Теорема. Отображение D является взаимно непрерывным и обратимым отображением пространства ${}_S\overset{\circ}{W}{}_2^{(k,l')}(\Omega \times (a,b))$ на пространство ${}_R W_2^{(-k,-l')}(\Omega \times (a,b))$.

14. Определение пространства ${}_P W_2^{(k,l')}(\Omega \times (a,b))$.

Скажем, что функция $u \in L_2(\Omega \times (a,b))$ находится в пространстве ${}_P W_2^{(k,l')}(\Omega \times (a,b))$, если 1) существует функция $v \in \overset{\circ}{W}{}_2^{(k,l')}(\Omega^* \times E_1)$, где $\Omega^* \supset \bar{\Omega}$, для которой $u(x,t) = v(x,t)$ для всех $(x,t) \in \Omega \times (a,b)$;

2) если обозначим

$$\langle u, \varphi \rangle_a^b = (-1)^{l+1} \int_{\Omega \times (a,b)} \bar{u} \, \frac{\partial^{2l+1} \varphi}{\partial t^{2l+1}} \, d\Omega \, dt ,$$

то

$$|u|_P^{(a,b)} = \sup_{\substack{\|\varphi\|_R^{(a,b)} \leq 1 \\ \varphi \in \mathcal{D}(\Omega \times (a,b))}} |\langle u, \varphi \rangle_a^b| < +\infty ;$$

В ${}_P W_2^{(k,l')}(\Omega \times (a,b))$ введем норму

$$\|u\|_P^{(a,b)} = \Big(\sum_{|i| \leq k} |D^i u|^2_{L_2(\Omega \times (a,b))} + (|u|_P^{(a,b)})^2\Big)^{\frac{1}{2}} .$$

15. Теорема. ${}_P W_2^{(k,l')}(\Omega \times (a,b))$ с нормой $\|\cdot\|_P^{(a,b)}$ является пространством Банаха.

16. Теорема. Пусть $u_0 \in {}_P W_2^{(k,l')}(\Omega \times (a,b))$ и $f \in {}_R W_2^{(-k,-l')}(\Omega \times (a,b))$. Тогда существует одно и только одно u такое, что $Du = f$ и $u - u_0 \in {}_S\overset{\circ}{W}{}_2^{(k,l')}(\Omega \times (a,b))$.

Справедливо, что

$$\|u\|_p^{(a,b)} \leq C(|f|_{{}_R W_2^{(-k,-l')}(\Omega\times(a,b))} + \|u_0\|_p^{(a,b)}) .$$

<u>17. Определение</u>. Скажем, что функция u из теоремы 16 решит задачу

$$\sum_{\substack{|i|\leq k\\|j|\leq k}} D^j((-1)^{|j|}a^{ij}D^i u) + \sum_{\alpha=0}^{l} b^\alpha(-1)^\alpha \frac{\partial^{2\alpha+1}u}{\partial t^{2\alpha+1}} = f$$

с краевыми условиями

$$u(x,t) = u_0(x,t),$$
$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x,t) = \frac{\partial u_0}{\partial \nu}(x,t),$$
$$\dots$$
$$\frac{\partial^{k-1}u}{\partial \nu^{k-1}}(x,t) = \frac{\partial^{k-1}u_0}{\partial \nu^{k-1}}(x,t)$$

для $x\in\Omega$, $t\in(a,b)$ и

(*) $$u(x,a) = u_0(x,a),$$
$$\dots$$
$$\frac{\partial^l u}{\partial t^l}(x,a) = \frac{\partial^l u_0}{\partial t^l}(x,a);$$
$$u(x,b) = u_0(x,b),$$
$$\dots$$
$$\frac{\partial^{l-1}u}{\partial t^{l-1}}(x,b) = \frac{\partial^{l-1}u_0}{\partial t^{l-1}}(x,b)$$

для $x\in\Omega$.

Для $l=0$ принимают соотношения (*) вид $u(x,a)=u_0(x,a)$.

<u>18. Обозначение</u>. $\mathcal{N}^{(0),1}$ обозначаем множество областей, обладающих границей, которая удовлетворяет условию Липшица.

<u>19. Теорема</u>. Если $\Omega\in\mathcal{N}^{(0),1}$, то $\mathcal{E}(\Omega\times(a,b))\cap$ $\cap\, {}_p\overset{\circ}{W}{}_2^{(k,l')}(\Omega\times(a,b))$ плотно в ${}_p\overset{\circ}{W}{}_2^{(k,l')}(\Omega\times(a,b))$.

<u>20. Теорема</u>. $\mathcal{N}^{(0),1}\subset\mathcal{R}$.

<u>21. Теорема</u>. Пусть $\Omega\in\mathcal{R}$ и $a_\beta^{ij}\to a_0^{ij}$ для $\beta\to\infty$ по мере на всех ограниченных подмножествах $\Omega\times(a,b)$. Пусть $b_\beta^\alpha\to b_0^\alpha$ $(\beta\to\infty)$, $b_\beta^l=1$.

Обозначим

$$D_\beta u = \sum_{\substack{|i| \le k \\ |j| \le k}} D^j ((-1)^{|j|} a_\beta^{ij} D^i u) + \sum_{\alpha=0}^{\ell} b_\beta^\alpha (-1)^\alpha \frac{\partial^{2\alpha+1} u}{\partial t^{2\alpha+1}} .$$

Пусть для всех $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega \times (a, b))$, $\beta = 0, 1, \ldots$

$$\mathrm{Re} \int_{\Omega \times (a,b)} \sum_{\substack{|i| \le k \\ |j| \le k}} \overline{a_\beta^{ij} D^i \varphi}\, D^j \varphi \, d\Omega \, dt \ge$$

$$\ge \nu \sum_{|i| \le k} |D^i \varphi|^2_{L_2(\Omega \times (a,b))} \qquad (\nu > 0)$$

и $|a_\beta^{ij}(x,t)| < \frac{1}{\nu}$ для $|i| \le k$, $|j| \le k$.
Пусть $v \in {}_P W_2^{(k,\ell')}(\Omega \times (a, b))$ и $f \in {}_R W_2^{(-k,-\ell')}(\Omega \times (a, b))$.
Пусть $D_\beta u_\beta = f$ и $u_\beta - v \in {}_S \overset{\circ}{W}{}_2^{(k,\ell')}(\Omega \times (a, b))$.
Тогда $u_\beta \longrightarrow u_0$ в пространстве ${}_P \overset{\circ}{W}{}_2^{(k,\ell')}(\Omega \times (a, b))$.

22. Теорема. Если $k = 1$, $\ell = 0$, $a^{ij} \in \mathcal{E}(\Omega \times (a, b))$ и $f \in \mathcal{E}(\Omega \times (a, b))$, то для всех $\Omega_1, \overline{\Omega_1} \subset \Omega$ решение задачи 17 находится в $\mathcal{E}(\Omega_1 \times (a, b))$.