Kamil John

Zwei Charakterisierungen der nuklearen lokalkonvexen Räume

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, Vol. 8 (1967), No. 1, 117--128

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/105096

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae
8,1 (1967)

ZWEI CHARAKTERISIERUNGEN DER NUKLEAREN LOKALKONVEXEN RÄUME

Kamil JOHN, Praha

Die benutzte Terminologie und Bezeichnung sind aus [1] übernommen. Die Bedingungen für die Nuklearität des Raumes (Satz 4), mit denen sich dieser Artikel befassen wird, entstanden aus den in [1] gestellten Problemen 7.3.4 und 7.4.5. Das erste Problem lässt sich folgenderweise formulieren: "Ist ein lokalkonvexer Raum E nuklear, wenn die ε-Topologie mit der π-Topologie auf $E \otimes E$ übereinstimmt, also wenn die Bedingung

(a) $$E \otimes_{\varepsilon} E \cong E \otimes_{\pi} E$$

gilt?" Das zweite Problem lautet: Ist ein lokalkonvexer Raum E nuklear, wenn die folgende Bedingung (b) gilt?"

(b) Alle stetigen Bilinearformen auf $E \times E$ sind nuklear.

Wir wollten zeigen, dass jede von den Bedingungen (a) oder (b) zusammen mit einer einfachen untenerwähnten Bedingung (c) eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Nuklearität gibt. Der Satz 2 gibt eine interessante Charakterisierung der Räume mit dem Skalarprodukt.

Es sei betont, dass wir unter einer Nullumgebung in einem lokalkonvexen Raume stets eine abgeschlossene absolutkonvexe Nullumgebung verstehen werden und dass wir zwischen den Bilinearformen auf $E \times E$ un den zugehörigen Linearformen auf $E \otimes E$ nicht unterscheiden werden. Die vollständige Hülle eines lokalkonwexen Raumes E wird mit $\widehat{E}$ bezeichnet.

Wir werden nun einige Begriffe und Sätze aus [1] wiederholen. Ist U eine absolutkonvexe absorbierende Teilmenge eines linearen Raumes E, so erhalten wir durch den Ansatz $p_U(x) = \inf\{\rho > 0 \mid x \in \rho U\}$ eine auf E erklärte Halbnorm p_U. Der durch die Bildung des Quotientenraumes erzeugte normierte Raum wird mit $E(U)$ bezeichnet. Ist $x(U)$ die Restklasse des Elementes $x \in E$, so bezeichnen wir $A(U) = \bigcup_{x \in A} x(U)$ für jede $A \subset E$. Für zwei absolutkonvexe absorbierende Teilmengen U und V von E, wo $U \subset \rho V, \rho > 0$ ist, definieren wir eine kanonische Abbildung $E(U, V)$ von $E(U)$ auf $E(V)$ so, dass wir jeder Restklasse $x(U) \in E(U)$ die Restklasse $x(V) \in E(V)$ zuordnen.

Es seien E, F zwei normierte Räume mit den abgeschlossenen Einheitskugeln U und V. Eine stetige lineare Abbildung T von E in F heisst absolutsummierend, wenn es eine Zahl $\rho \geq 0$ gibt, so dass für alle endlichen Familien $\{x_1, \dots, x_n\}$ aus E die Abschätzung

$$\sum_{i=1} p_V(Tx_i) \leq \rho \sup\{\sum_{i=1}^{n} |\langle x_n, a\rangle| \mid a \in U^\circ\}$$

besteht.

Aus [1] brauchen wir auch den wichtigen

<u>Satz 1</u>. Wenn E, F zwei Hilberträume sind, so ist eine stetige lineare Abbildung T von E in F dann und nur dann absolutsummierend, wenn es ein vollständiges Orthonormalsystem $\{e_i, J\}$ in E gibt, so dass $\sum_J p_V(Te_i)^2 < +\infty$ ist.

Ein lokalkonvexer Raum E heisst nuklear, wenn es in ihm eine Nullumgebungsbasis $\{U_\alpha\}$ gibt, so dass die folgende Aussage gilt: Zu jeder Nullumgebung $U_\alpha \in \{U_\alpha\}$ gibt es eine Nullumgebung $U_\beta \in \{U_\alpha\}$, so dass die kanonische Abbildung $E(U_\beta, U_\alpha)$ absolutsummierend ist.

Sind E, F zwei lokalkonvexe Räume, so sind die lokalkonvexen Tensorprodukte $E \otimes_\pi F$ bzw. $E \otimes_\varepsilon F$ aus allen Halbnormen $\pi_{(U,V)}$ bzw. $\varepsilon_{(U,V)}$ auf $E \otimes F$ mit allen Nullumgebungen U in E und allen Nullumgebungen V in F erzeugt , wobei

$$\pi_{(U,V)}(z) = \inf\{\sum_{k=1}^{n} p_U(x_k)p_V(y_k) \mid z = \sum_{k=1}^{n} x_k \otimes y_k\} ,$$

$$\varepsilon_{(U,V)}(z) = \sup\{|\sum_{k=1}^{n} \langle x_k, a\rangle \langle y_k, b\rangle| \mid a \in U^\circ, b \in V^\circ\} ,$$

mit $z = \sum_{k=1}^{n} x_k \otimes y_k$.

Eine Bilinearform B auf $E \times F$ heisst nuklear, wenn sie sich in der Form

$$B(x,y) = \sum_N \langle x, a_n\rangle \langle y, b_n\rangle \quad \text{für } x \in E,\ y \in F$$

darstellen lässt. Dabei soll für die Linearformen $a_n \in E'$ und $b_n \in F'$ mit zwei Nullumgebungen U in E und V in F die Ungleichung

$$\sum_N p_{U^\circ}(a_n)\, p_{V^\circ}(b_n) < +\infty$$

bestehen.

Wir werden auch die folgende Bedingung betrachten.

(c) Der lokalkonvexe Raum E hat eine solche Nullumgebungsbasis $\{U_\alpha\}$, dass alle Banachräume $E\widetilde{(U_\alpha)}$ sogar Hilberträume sind.

Aus dem folgenden Satz werden wir nur die Implikation brauchen.

Satz 2. Es sei E ein normierter Raum mit der Einheitskugel U. Die Norm p_U auf E kann dann und nur dann mit Hilfe eines Skalarproduktes auf E gebildet werden, wenn für alle endlichen Familien $\{x_1, \ldots, x_n\}$ aus E die Gleichung

$$(1) \qquad \pi_{(U,U)}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \otimes x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} p_U^2(x_i)$$

gilt.

Beweis. Wir können uns leicht überzeugen, dass

$$(2) \qquad \pi_{(U,U)}(z) = \sup |B(z)|$$

ist, wobei das Supremum über alle stetigen Bilinearformen B auf $E \times E$ mit der Norm ≤ 1, das heisst über alle Bilinearformen B mit $|B(x,y)| \leq p_U(x)\, p_U(y)$ für alle $x \in E$ und $y \in E$ genommen wird.

Es seien nun $x_1, \ldots, x_n \in E$ und es sei $B(x,y)$ das Skalarprodukt auf E, das die Norm p_U bildet. Dann ist $|B| = 1$ und wir haben

$$\sum_{i=1}^{n} p_U^2(x_i) = \sum_{i=1}^{n} B(x_i, x_i) = B\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \otimes x_i\right) \leq \pi_{(U,U)}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \otimes x_i\right).$$

Die umgekehrte Ungleichung folgt aus der Definition der Norm $\pi_{(U,U)}$.

Es gelte andererseits die Beziehung (1). Es seien $x_1, \ldots, x_n$ aus E und es sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es eine Bilinearform B_ε mit $|B_\varepsilon| \leq 1$, so dass

$$\sum_{i=1}^{n} p_U^2(x_i) - \varepsilon < \left|\sum_{i=1}^{n} B_\varepsilon(x_i, x_i)\right| \leq \sum_{i=1}^{n} p_U^2(x_i)$$

ist. Folglich haben wir $\sum_{i=1}^{n} p_U^2(x_i) = \lim_{\varepsilon \to 0+} |\sum_{i=1}^{n} B_\varepsilon(x_i, x_i)|$.

Nun wollen wir zum Beweis der Existenz des Skalarpoduktes auf E das folgende Kriterium aus [2] benützen: Wenn in einem normierten Raume aus $\|x\| = \|y\| = 1$ die Ungleichung

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 \leq 4$$

folgt, dann kann die Norm aus einem Skalarprodukt gebildet werden.

Es seien also $x, y \in E$. Wählen wir $x_1 = x + y$, $x_2 = x - y$. Dann haben wir die gewünschte Ungleichung

$$p_U^2(x+y) + p_U^2(x-y) = \sum_{i=1}^{2} p_U(x_i) = \lim_{\varepsilon \to 0+} |\sum_{i=1}^{2} B_\varepsilon(x_i, x_i)| =$$

$$= 2 \lim_{\varepsilon \to 0+} |B_\varepsilon(x,x) + B_\varepsilon(y,y)| \leq 2(p_U^2(x) + p_U^2(y)).$$

Bemerken wir, dass es genügend wäre die Geltung der Gleichung (1) nur für $n = 2$ zu verlangen.

<u>Bemerkung</u>. Satz 2 ermöglicht eine äquivalente Formulierung der Eigenschaft (c):

(c′) Der lokalkonvexe Raum E hat eine solche Nullumgebungsbasis $\{U_\alpha\}$, dass für alle α und alle endlich viele $x_1, \dots, x_n$ aus E die Gleichung

$$\pi_{(U_\alpha, U_\alpha)}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \otimes x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} p_{U_\alpha}^2(x_i)$$

gilt. Dabei genügt es nur $n = 2$ voraussetzen.

<u>Satz 3</u>. Ist die ε-Topologie auf $E \otimes E$ die Mackeysche Topologie, so ist (a) eine Folgerung von (b). Dies ist z.B. dann der Fall, wenn E metrisierbar ist.

Beweis. Es sei E der algebraisch duale Raum von $E \otimes E$. Wenn (b) gilt, kann man jede stetige Bilinearform B in der Form $B = \sum \lambda_i a_i \otimes b_i$ mit $a_i \in U^\circ$, $b_i \in U^\circ$, $\sum |\lambda_i| \leq 1$ darstellen. Folglich ist B in der $\sigma(F, E \otimes E)$ - abgeschlossenen absolutkonvexen Hülle der Menge $U^\circ \otimes U^\circ$, also nach der Definition der ε-Topologie ist $B \in (E \otimes_\varepsilon E)'$ (Sieh [3], §23, 2(1)). Wir haben also $(E \otimes_\pi E)' = (E \otimes_\varepsilon E)'$ und deshalb die beiden Topologien zusammenfallen müssen.

Satz 4. Es sei E ein lokalkonvexer Raum. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

(α) $E \otimes_\varepsilon E \equiv E \otimes_\pi E$ und E hat die Eigenschaft (c).

(β) Jede stetige Bilinearform auf $E \times E$ ist nuklear und E hat die Eigenschaft (c).

(γ) E ist nuklear.

Beweis. Es ist bekannt, dass jeder nukleare Raum die Eigenschaften (α) und (β) hat. Nehmen wir zuerst an, dass (α) gilt und zeigen wir, dass E dann nuklear ist. Es sei $\{U_\alpha\}$ eine solche Nullumgebungsbasis, dass alle $E(\widetilde{U_\alpha})$ Hilberträume sind, und wählen wir eine solche U_α. Dann gibt es ein $U_\beta \in \{U_\alpha\}$, so dass $U_\beta \subset U_\alpha$ und $\pi_{(U_\alpha, U_\alpha)} \leq \varepsilon_{(U_\beta, U_\beta)}$ ist. Die Norm auf $E(\widetilde{U_\alpha}) \otimes E(\widetilde{U_\alpha})$, die wir als π-Produkt der Normen auf $E(\widetilde{U_\alpha})$ bekommen, bezeichnen wir mit $\pi'_{(U_\alpha, U_\alpha)}$. $\pi'_{(U_\alpha, U_\alpha)}$ ist also eigentlich die Norm $\pi_{(U,U)}$, wo U die Einheitskugel in $E(\widetilde{U_\alpha})$ ist. Ähnlicherweise bezeichnen wir mit $\varepsilon'_{(U_\beta, U_\beta)}$ die Norm auf $E(\widetilde{U_\beta}) \otimes E(\widetilde{U_\beta})$, die wir als ε-Produkt der Normen auf $E(\widetilde{U_\beta})$ bekommen. Man kann nun auf Grund der Gleichung (2) zeigen, dass für $z = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i \in E \otimes E$ die

Gleichungen

$$\pi_{(U_\alpha, U_\alpha)}(z) = \pi'_{(U_\alpha, U_\alpha)}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i(U_\alpha) \otimes y_i(U_\alpha)\right) \quad \text{und}$$

$$\varepsilon_{(U_\beta, U_\beta)}(z) = \varepsilon'_{(U_\beta, U_\beta)}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i(U_\beta) \otimes y_i(U_\beta)\right)$$

gelten. Die kanonische Abbildung $E(U_\beta, U_\alpha)$ kann auf eine lineare stetige Abbildung T von $E\widetilde{(U_\beta)}$ in $E\widetilde{(U_\alpha)}$ fortgesetzt werden. Aus $\pi_{(U_\alpha, U_\alpha)} \leq \varepsilon_{(U_\beta, U_\beta)}$ bekommen wir die Ungleichung

$$(3) \qquad \pi'_{(U_\alpha, U_\alpha)}(T \otimes T) \leq \varepsilon'_{(U_\beta, U_\beta)} \;,$$

die auf $E(U_\beta) \otimes E(U_\beta)$ besteht. $T \otimes T$ ist eine stetige lineare Abbildung von $E\widetilde{(U_\beta)} \otimes_\pi E\widetilde{(U_\beta)}$ in $E\widetilde{(U_\alpha)} \otimes_\pi E\widetilde{(U_\alpha)}$, denn die zugehörige bilineare Abbildung ist stetitg. Folglich sind beide Seiten von (3) stetig auf $E\widetilde{(U_\beta)} \otimes_\pi E\widetilde{(U_\beta)}$ wobei (3) auf dem dichten Teilraum $E(U_\beta) \otimes E(U_\beta)$ besteht. Also besteht (3) auf $E\widetilde{(U_\beta)} \otimes E\widetilde{(U_\beta)}$.

Ist nun $\{e_i\}$ eine orthonormale Basis in $E\widetilde{(U_\beta)}$ haben wir nach dem Satz 2, Ungleichung (3) und der Definition der ε-Norm die Beziehung

$$\sum_K p^2_{U_\alpha^\circ}(Te_i) = \pi'_{(U_\alpha, U_\alpha)}\left(\sum_K Te_i \otimes Te_i\right) \leq \varepsilon'_{(U_\beta, U_\beta)}\left(\sum_K e_i \otimes e_i\right) =$$

$$= \sup_{a, b \in U_\beta^\circ} \left|\sum_K (e_i, a)(e_i, b)\right| \leq \sup_{a \in U_\beta^\circ} \left(\sum_i (e_i, a)^2 \cdot \sum_i (e_i, b)^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq \sup_{a, b \in U_\beta^\circ} p^{\frac{1}{2}}_{U_\beta^\circ}(a) \cdot p^{\frac{1}{2}}_{U_\beta^\circ}(b) \leq 1 \;,$$

für jede endliche Indexmenge K. Die Reihe $\sum_i p^2_{U_\alpha^\circ}(Te_i)$ ist konvergent und deshalb ist die Abbildung T absolutsummierend. Die Einschränkung $E(U_\beta, U_\alpha)$ von T auf $E(U_\beta)$ ist auch absolutsummierend. Damit ist die Nuklearität des Raumes E bewiesen.

Nun nehmen wir an, dass die Aussage (β) gilt, und zeigen wieder, dass E nuklear ist. Es sei wieder $\{U_\alpha\}$ eine Nullumgebungsbasis in E, so dass $E\widetilde{(U_\alpha)}$ Hilberträume mit den Skalarprodukten $(\ ,\ )_\alpha$ sind. Wählen wir eine $U_\alpha \in \{U_\alpha\}$. Die Bilinearform $B(x, y) = (x(U_\alpha), y(U_\alpha))_\alpha$ ist stetig auf $E \times E$. Nach der Voraussetzung gibt es also $U_\beta \in \{U_\alpha\}$, $U_\beta \subset U_\alpha$ und $a_n \in E'$, $b_n \in E'$, so dass $\sum_N p_{U_\beta^0}(a_n)\, p_{U_\beta^0}(b_n) < +\infty$ und

(4) $$B(x, y) = \sum_N \langle x, a_n\rangle \langle y, b_n\rangle$$

ist. Wir können voraussetzen, dass $p_{U_\beta^0}(a_n) = 1$, also $\sum_N p_{U_\beta^0}(b_n) < +\infty$ ist. Die Formen a_n und b_n kann man als stetige Linearformen auf $E(U_\beta)$ auffassen und wir werden ihre stetige Fortsetzung auf $E\widetilde{(U_\beta)}$ wieder mit a_n und b_n bezeichnen.

Dann ist

(5) $$\langle x, a_n\rangle = \langle x(U_\beta), a_n\rangle = (x(U_\beta), a_n')_\beta$$

für geeignete $a_n' \in E\widetilde{(U_\beta)}$, $p_{U_\beta^0}(a_n') = p_{U_\beta}(a_n)$. Ähnliches gilt für die Linearformen b_n. Es sei wieder T die Fortsetzung der Abbildung $E(U_\beta, U_\alpha)$ auf $E\widetilde{(U_\beta)}$. Für alle $x, y \in E\widetilde{(U_\beta)}$ besteht jetzt die Gleichung

(6) $$(Tx, Ty)_\alpha = \sum_N (x, a_n')_\beta (y, b_n')_\beta ,$$

da diese Gleichung auf Grunde (4) und (5) für den dichten Teilraum $E(U_\beta) \times E(U_\beta)$ von $E\widetilde{(U_\beta)} \times E\widetilde{(U_\beta)}$ gilt, und da beide Seiten in (6) auf $E\widetilde{(U_\beta)} \times E\widetilde{(U_\beta)}$ stetig sind.

Es sei $\{e_i\}$ eine orthonormale Basis in $E(\widetilde{U_\beta})$. Falls wir die untenangeführte Beziehung (8) beweisen, wird wegen des Satzes 1 die Abbildung T wieder absolutsummierbar und dasselbe wird für ihre Einschränkung $E(U_\beta, U_\alpha)$ gelten. Um den Beweis des Satzes 4 zu beenden, brauchen wir nur die Beziehung (8) beweisen.

Es sei S der Raum aller Folgen $\{x_n\}$, wo $x_n \in E(\widetilde{U_\beta})$ und $\sup_n p_{U^\circ_\beta}(x_n) < +\infty$ ist mit der lokalkonvexen Topologie der punktweisen Konvergenz in jedem n. Dann ist $f(\{x_n\}) = \sum_N (x_n, b'_n)_\beta$ eine Linearform auf S. Es sei $K = \{\{x_n\} \in S \mid p_{U^\circ_\beta}(x_n) \leq 1\}$. Dann ist K absolutkonvex und es ist nicht schwer zu zeigen, dass die Einschränkung $f/_K$ in 0 stetig ist. Folglich ist $f/_K$ stetig auf K (siehe [4] Lemma II.14). Auf K gilt

$$(7) \qquad \{a'_n\}_n = \lim_p \{\sum_{i=1}^{p} (a'_n, e_i)_\beta\, e_i\}_n .$$

Aus (7), aus der Stetigkeit $f/_K$ und aus (6) haben wir nun (8):

$$(8) \quad \sum_n p_{U^\circ_\beta}(a'_n)\, p_{U^\circ_\beta}(b'_n) \geq \sum_n (a'_n, b'_n)_\beta = f(\{a'_n\}) =$$

$$= \lim_p \sum_n \Big(\sum_{i=1}^{p} (a'_n, e_i)_\beta (e_i, b'_n)_\beta\Big) = \lim_p \sum_{i=1}^{p} \Big(\sum_n (a'_n, e_i)_\beta (e_i, b'_n)\Big) =$$

$$= \sum_i (Te_i, Te_i)_\alpha = \sum_i p^2_{U^\circ_\alpha}(Te_i) .$$

<u>Satz 5.</u> Es sei $\Lambda(P)$ ein Folgenraum im Sinne [1], aber mit der Topologie, die aus den Halbnormen

$$p_p(\{x_n\}) = \sup_n |x_n| \rho_n$$

für alle $\rho = \{\rho_n\} \in P$ erzeugt wird. Dann ist Λ nuklear dann und nur dann, wenn für Λ die Bedingung (b) gilt.

Beweis. Wählen wir $\rho = \{\rho_n\} \in P$. Dann ist durch den Ansatz

$$B(x, y) = \sum_N x_n y_n \rho_n^2 \quad \text{für alle } x = \{x_n\} \in \Lambda \text{ und } y = \{y_n\} \in \Lambda$$

eine stetige Bilinearform auf $\Lambda \times \Lambda$ definiert. Also gibt es $a^i = \{a_n^i\} \in \Lambda'$, $b^i = \{b_n^i\} \in \Lambda'$ und $\eta = \{\eta_n\} \in P$, so dass

(8) $$B(x, y) = \sum_i \langle x, a^i \rangle \langle y, b^i \rangle$$

mit

$$\sum_i \Big(\sum_{k,l} \frac{|a_k^i|}{\eta_k} \cdot \frac{|b_l^i|}{\eta_l} = k < +\infty ,$$

wo wir $\frac{a}{0} = +\infty$ für $a \neq 0$ und $\frac{0}{0} = 0$ setzen.

Für jedes $\varepsilon > 0$ setzen wir $x_n^\varepsilon = \frac{1}{\eta_n}$, wenn $\eta_n \neq 0$ ist, und $x_n^\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon}$, wenn $\eta_n = 0$ ist. Dann ist $z_p = \{x_1^\varepsilon, x_2^\varepsilon, \dots, x_p^\varepsilon, 0, 0 \dots\} \in \Lambda$ und wenn wir in (8) $x = y = z_p$ setzen, bekommen wir

$$\sum_{n=1}^{p} (x_n^\varepsilon \rho_n)^2 = \sum_i \Big(\sum_{k,l=1}^{p} a_k^i \times \varepsilon_k b_l^i \times \varepsilon_l \Big) \le \sum_i \Big(\sum_{k,l=1}^{\infty} \frac{|a_k^i|}{\eta_k} \cdot \frac{|b_l^i|}{\eta_l} \Big) = k$$

Wir haben also $\sum_N (x_n^\varepsilon \rho_n)^2 \le k$ für alle $\varepsilon > 0$.

Wenn nun $\eta_n = 0$ ist, dann ist $\rho_n^l \le k\, \varepsilon^2$, also $\rho_n = 0$. Zu jedem $\rho = \{\rho_n\} \in P$ gibt es also $\eta = \{\eta_n\} \in P$, so dass $\rho_n^2 \le s_n\, \eta_n^2$ und $\sum s_n < +\infty$ ist. Wenn wir nun zu diesem $\{\eta_n\}$ eine

$\sigma = \{\sigma_n\} \in P$ wählen, so dass $\eta_n^2 \le s'_n\, \sigma_n^2$, und $\sum s'_n < +\infty$, so haben wir $\rho_n \le \sqrt{s_n}\, \eta_n \le \sqrt{s_n s'_n}\, \sigma_n$, wo $\sum \sqrt{s_n s'_n} < +\infty$ ist. Der Raum $\Lambda(P)$ ist also nuklear nach 6.1.2 und 6.1.3 in [1].

Satz 6. Ist E ein normierter Raum, so ist die Bedingung (b) äquivalent mit der Bedingung

$$\text{(d)} \qquad (E \otimes_\pi E)' = E' \tilde{\otimes}_\pi E' .$$

Wenn (d) gilt, ist also auch die Bedingung (a) erfüllt und in (d) fallen die Topologien auf beiden Seiten zusammen.

Wenn $E \tilde{\otimes}_\pi E$ und $E' \tilde{\otimes}_\pi E'$ reflexiv sind, ist (d) äquivalent mit

$$\text{(e)} \qquad E \tilde{\otimes}_\pi E = (E' \otimes_\pi E')' .$$

Beweis. Es gelte (d). Auf der linken Seite haben wir alle stetigen Bilinearformen auf $E \times E$ und auf der rechten Seite haben wir nach einem bekannten Satz (Siehe [1],7.5.1) die Elemente $\sum_N a_n \times b_n$, wo $a_n \in E'$, $b_n \in E'$ und $\sum_N p_{U^\circ}(a_n)\, p_{U^\circ}(b_n) < +\infty$. Alle stetigen Bilinearformen sind also nuklear. Satz 3 zeigt, dass auch (a) gilt. Die Einbettung $E' \tilde{\otimes}_\pi E'$ auf $(E \otimes_\pi E)'$ ist stetig und nach dem Satz von Banach-Steinhaus stellt sie einen topologischen Homomorphismus dar.

Es gelte andererseits die Bedingung (b). Dann kann man jede stetige Bilinearform B in der Form $B(x, y) = \sum_N \langle x, a_n \rangle \langle y, b_n \rangle$ mit $\sum_N p_{U^\circ}(a_n)\, p_{U^\circ}(b_n) < +\infty$ schreiben. $\sum_N a_n \otimes b_n$ existiert in $E' \tilde{\otimes} E'$, also man kann leicht zeigen, dass $B = \sum_N a_n \otimes b_n$ ist. Folglich ist $(E \otimes_\pi E)' \subset E' \tilde{\otimes}_\pi E'$. ($d$) folgt nun wieder aus dem Satz 7.5.1 in [1] über der Form der Elemente aus dem vollständigen π-Tensorprodukt.

(e) ist eine triviale Folgerung von (d).

Bemerkung. Die Äquivalenz (α) und (γ) im Satz 4 ist in [5] enthalten, denn die Eigenschaft (c) bedeutet, dass E die Approximationseigenschaft hat.

Literaturverzeichnis

[1] A. PIETSCH: Nukleare lokalkonvexe Räume, Akademie-Verlag-Berlin 1965.

[2] M. DAY: Normed linear spaces, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1958.

[3] G. KÖTHE: Topologische lineare Räume, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1960.

[4] A. GROTHENDIECK: Espaces vectoriels topologiques, Sao Paulo 1954.

[5] A. GROTHENDIECK: Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires, Memoirs Amer.Math.Soc.16 (1955).

(Received August 10,1966)