Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae

V. I. Kval'vasser; Ja. F. Rutner; L. P. Skrjabina

Смешанные краевые задачи уравнения теплопроводности для бесконечной полосы

*Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae*, Vol. 9 (1968), No. 1, 1--12

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/105150`

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae
9,1 (1968)

# СМЕШАННЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ДЛЯ БЕСКОНЕЧНОЙ ПОЛОСЫ

В.И.КВАЛЬВАССЕР, Я.Ф.РУТНЕР, Л.П.СКРЯБИНА (V.I.KVAL'VASSER, JA.F.RUTNER, L.P.SKRJABINA), Куйбышев

В настоящей работе рассматриваются краевые задачи уравнения теплопроводности и для бесконечной полосы $0 \le y \le \ell$, $-\infty < x < +\infty$ при нулевом начальном условии и различных комбинациях граничных условий из полупрямых $y = \ell$, $x < 0$; $y = \ell$, $x = 0$; $y = 0$, $x < 0$; $y = 0$, $x > 0$. Решение рассматриваемых задач осуществляется методом Винера-Хопфа (Джонса).

Возможны <u>два варианта</u> граничных условий уравнения

(1) $$\frac{\partial}{\partial t} u(x,y,t) = a\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) u(x,y,t)$$

в том аспекте, как это указано:

$$\text{I.}\ \frac{\partial}{\partial y} u(x,0,t) = \varphi_1(x,t),\ x<0, \qquad \text{II.}\ \frac{\partial}{\partial y} u(x,0,t) = \varphi_1(x,t),\ x<0,$$

$$u(x,0,t) = \mathcal{F}_1(x,t),\ x>0, \qquad u(x,0,t) = \mathcal{F}_1(x,t),\ x>0,$$

$$\frac{\partial}{\partial y} u(x,\ell,t) = \varphi_2(x,t),\ x<0, \qquad \frac{\partial}{\partial y} u(x,\ell,t) = \varphi_2(x,t),\ x>0,$$

$$u(x,\ell,t) = \mathcal{F}_2(x,t),\ x>0, \qquad u(x,\ell,t) = \mathcal{F}_2(x,t),\ x<0.$$

Вследствие линейности уравнения (1) каждую из указанных задач можно расщепить на задачи с симметричными и антисимметричными относительно оси $y = \frac{\ell}{2}$ (задача I) и относительно точки $O_1(0; \frac{\ell}{2})$ (задача II) граничными условиями.

Например, решение задачи I, которую мы будем рассматривать в дальнейшем, может быть представлено в виде суммы решений краевых задач:

(а) $\frac{\partial}{\partial y} u(x,0,t)=0, \quad x<0,$ (б) $\frac{\partial}{\partial y} u(x,0,t)=0, \quad x<0,$

$u(x,0,t)=f_1(x,t), x>0, \quad u(x,0,t)=f_2(x,t), \quad x>0,$

$\frac{\partial}{\partial y} u(x,\ell,t)=0, \quad x<0, \quad \frac{\partial}{\partial y} u(x,\ell,t)=0, \quad x<0,$

$u(x,\ell,t)=f_1(x,t), \quad x>0, \quad u(x,\ell,t)=-f_2(x,t), \quad x>0;$

(в) $\frac{\partial}{\partial y} u(x,0,t)=\psi_1(x,t), x<0,$ (г) $\frac{\partial}{\partial y} u(x,0,t)=\psi_2(x,t), \quad x<0,$

$u(x,0,t)=0, \qquad x>0, \quad u(x,0,t)=0, \qquad x>0,$

$\frac{\partial}{\partial y} u(x,\ell,t)=\psi_1(x,t), \quad x<0, \quad \frac{\partial}{\partial y} u(x,\ell,t)=-\psi_2(x,t), \quad x<0,$

$u(x,\ell,t)=0, \qquad x>0, \quad u(x,\ell,t)=0, \qquad x>0,$

где:

$$f_1(x,t)=\frac{\mathcal{F}_1(x,t)+\mathcal{F}_2(x,t)}{2}; \quad f_2(x,t)=\frac{\mathcal{F}_1(x,t)-\mathcal{F}_2(x,t)}{2};$$

$$\psi_1(x,t)=\frac{\varphi_1(x,t)+\varphi_2(x,t)}{2}; \quad \psi_2(x,t)=\frac{\varphi_1(x,t)-\varphi_2(x,t)}{2}.$$

Свойство симметрии (антисимметрии) граничных условий вызывает у искомой функции $u(x,y,t)$ аналогичное свойство относительно оси $y=\frac{\ell}{2}$. Это легко установить после параллельного переноса системы координат в точку $O_1(0;\frac{\ell}{2})$, опираясь на очевидное равенство для функции Грина

$$G(x,y,t;x_0,y_0,t_0)=G(x,-y,t;x_0,-y_0,t_0)\ ^{*)}$$

и интегральное представление решения через нее [1].

Каждая из составляющих задач может быть решена методом Джонса. При этом получающиеся функциональные уравнения совпадают с уравнением, возникающим при решении соответствующей краевой задачи для полуплоскости, что вытекает из свойств симметрии и антисимметрии решений составляющих задач.

Докажем это для случая краевой задачи (б ). Применим к уравнению (1) и граничным условиям (б) последовательно одностороннее преобразование Лапласа относительно времени $t$

$$\bar{u}(x,y,s)=\int_0^\infty u(x,y,t)e^{-st}dt,\ s=\sigma+i\tau,\ 0<\sigma_0<\operatorname{Re}S$$

и преобразование Фурье относительно переменной $x$

$$\bar{\bar{u}}(p,y,s)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\bar{u}(x,y,s)e^{ipx}dx,\ p=\alpha+i\beta,\ -\sigma_1<\beta<\sigma_1,$$

где $u(x,y,t)=O(e^{-\sigma_1|x|})$ при $x\to\pm\infty$, $\sigma_1>0$, в результате чего получаем:

$$(2)\qquad \left(\frac{d^2}{dy^2}-\gamma^2\right)\bar{\bar{u}}(p,y,s)=0,$$

здесь $\gamma^2=k^2+p^2$, $k=\frac{s}{a}$; $k=k_1+ik_2$, $k_1>0$, плоскость $p$ имеет разрезы вдоль полупрямых $\alpha=k_2$, $\beta>k_1$ и $\alpha=-k_2$, $\beta<-k_1$, ветви $\sqrt{p\pm ik}$ выбраны так,

-----------

*) Для задачи II указанное свойство функции Грина имеет вид $G(x,y,t;x_0,y_0,t_0)=G(-x,-y,t;-x_0,-y_0,t_0)$ и функция $u(x,y,t)$ будет обладать теми же свойствами, но уже по двум переменным — $x$ и $y$, т.е. будет симметричной или антисимметричной относительно точки $O_1(0;\frac{l}{2})$.

-----------

что при $\alpha \to \infty$ $\sqrt{p \pm ik} \to \alpha^{1/2}$, тогда при $\alpha \to \infty$ $\sqrt{p^2+k^2} \to +\alpha$, причем, если $p = \sigma + i\beta$ лежит в полосе $-k_1 < \beta < k_1$, то $Re\sqrt{k^2+p^2} > 0$. Будем считать, что $f_2(x,t) = O(e^{-\sigma_2 x})$, измерима на любом конечном интеграле, $\in \mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$, тогда преобразование Фурье функции $f_2(x,t)$ по $x$ аналитично в полуплоскости $-\sigma_2 < \beta < \infty$.

После применения указанных выше преобразований Лапласа и Фурье граничные условия примут вид

(3) $\bar{\bar{u}}_+(p,0,s) = \bar{\bar{f}}_2(p,s), \beta > -\sigma_2; \bar{\bar{u}}'_-(p,0,s) = 0$,

$$\bar{\bar{u}}_+(p,l,s) = -\bar{\bar{f}}_2(p,s), \beta > -\sigma_2; \bar{\bar{u}}'_-(p,l,s) = 0,$$

где обозначено:

$$\bar{\bar{u}}_+(p,y,s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty \bar{u}(x,y,s)e^{ipx}dx, \quad \beta > -\sigma_1,$$

$$\bar{\bar{u}}_-(p,y,s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^0 \bar{u}(x,y,s)e^{ipx}dx, \quad \beta < \sigma_1,$$

а через $\bar{\bar{f}}_2(p,s)$ обозначен результат преобразований Лапласа по $t$ и Фурье по $x$ над функцией $f_2(x,t)$ заданной при $x > 0$.

Решение уравнения (2) имеет вид

(4) $\bar{\bar{u}}(p,y,s) = A(p,s)e^{-\gamma y} + B(p,s)e^{\gamma y}$.

Используя (3) и (4), и т.к. $\bar{\bar{u}}(p,y,s) = \bar{\bar{u}}_+(p,y,s) + \bar{\bar{u}}_-(p,y,s)$, получим

$$A(p,s) + B(p,s) = \bar{\bar{u}}_-(p,0,s) + \bar{\bar{f}}_2(p,s),$$

$$-A(p,s)\gamma + B(p,s)\gamma = \bar{\bar{u}}'_{+}(p,0,s),$$

$$A(p,s)^{-\gamma l} + B(p,s)^{\gamma l} = \bar{\bar{u}}_{-}(p,l,s) - \bar{\bar{f}}_2(p,s),$$

$$-A(p,s)\gamma e^{-\gamma l} + B(p,s)\gamma e^{\gamma l} = \bar{\bar{u}}'_{+}(p,l,s).$$

Т.к. в данной краевой задаче функция $u(x,y,t)$ обладает свойством антисимметрии относительно оси $y = \frac{l}{2}$, то изображения $\bar{\bar{u}}(p,l,s) = -\bar{\bar{u}}_{-}(p,0,s)$, $\bar{\bar{u}}'_{+}(p,l,s) = -\bar{\bar{u}}'_{+}(p,0,s)$, тогда после некоторых преобразований получим

(5) $$\bar{\bar{u}}'_{+}(p,0,s) + \gamma\bar{\bar{u}}_{-}(p,0,s) = -\gamma\bar{\bar{f}}_2(p,s).$$

Такое же функциональное уравнение можно получить после применения преобразований Лапласа по переменной $t$ и Фурье – по $x$ к краевой задаче уравнения теплопроводности (1) для полуплоскости $y \geqslant 0$, $-\infty < x < \infty$ с краевыми условиями

$$u(x,0,t) = f_2(x,t), \quad x > 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial y} u(x,0,t) = 0, \qquad x < 0$$

и нулевой начальной температурой.

Рассмотрим функциональное уравнение (5). Оно должно выполняться в полосе $-m < \beta < m$ комплексной плоскости $p$, где $m = \min[k_1, \sigma_1, \sigma_2]$, причем $\bar{\bar{u}}'_{+}(p,0,s)$ регулярна в полуплоскости $\beta > -\sigma_1$, а $\bar{\bar{u}}_{-}(p,0,s)$ в полуплоскости $\beta < \sigma_1$, функция $\bar{\bar{f}}_2(p,s)$ регулярна в полуплоскости $\beta > -\sigma_2$. Так как $\gamma = \sqrt{p+ik}\cdot\sqrt{p-ik}$, функция $\sqrt{p+ik}$ регулярна и не имеет нулей в полуплоскости $\beta > -k_1$, а функция $\sqrt{p-ik}$ регулярна и не имеет нулей в полуплоскости $\beta < k_1$ (здесь и далее ветви корней выбраны так, чтобы при действительной части подкоренного выражения, большей нуля, действительная часть корня была бы больше нуля), то разделив (5) на $\sqrt{p+ik}$, получим уравнение

$$(6)\quad \frac{\bar{\bar{u}}_+'(p,0,s)}{\sqrt{p+ik}}+\sqrt{p-ik}\,\bar{\bar{u}}_-(p,0,s)=-\sqrt{p-ik}\,\bar{\bar{f}}_2(p,s).$$

Функция $\dfrac{\bar{\bar{u}}_+'(p,0,s)}{\sqrt{p+ik}}$ регулярна в верхней полуплоскости $\beta>-m$ а $\sqrt{p-ik}\cdot\bar{\bar{u}}_-(p,0,s)$ регулярна в нижней полуплоскости $\beta<m$. Функция $\Phi(p)=-\sqrt{p-ik}\cdot\bar{\bar{f}}_2(p,s)$ регулярна в полосе $-\sigma_2<\beta<k_1$, таким образом оба слагаемых левой части и правая часть уравнения (6) регулярны в полосе $-m<\beta<m$. Следовательно, функцию $\Phi(p)$, согласно теореме Коши, можно представить в виде $\Phi(p)=\Phi_+(p)+\Phi_-(p)$, где $\Phi_+(p)$ регулярна в полуплоскости $\beta>-m$, а функция $\Phi_-(p)$ регулярна в полуплоскости $\beta<m$ причем

$$\Phi_+(p)=\frac{1}{2\pi i}\int_{ci-\infty}^{ci+\infty}\frac{\Phi(z)}{z-p}\,dz,$$

$$\Phi_-(p)=-\frac{1}{2\pi i}\int_{di-\infty}^{di+\infty}\frac{\Phi(z)}{z-p}\,dz,\quad -m<c<\beta<d<m.$$

Замкнем контур интегрирования вверх, т.к. известно, что функция $\bar{\bar{f}}_2(p,s)$ регулярна в полуплоскости $\beta>-\sigma_2$, здесь произведен разрез вдоль прямой $\alpha=k_2,\ \beta\geqslant k_1$ (где $k=k_1+ik_2$, $\operatorname{Re}k>0$) и, применяя теорему вычетов, получим

$$(7)\quad \Phi_+(p)=-\sqrt{p-ik}\,\bar{\bar{f}}_2(p,s)-\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\frac{\sqrt{i\rho}\,\bar{\bar{f}}_2(i\rho+ik,s)\,d\rho}{i\rho+ik-p},$$

$$(8)\quad \Phi_-(p)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\frac{\sqrt{i\rho}\,\bar{\bar{f}}_2(i\rho+ik,s)\,d\rho}{i\rho+ik-p}.$$

Перегруппируем (6) и введем новую функцию $\mathcal{J}(p)$ равенствами

$$(9)\quad \mathcal{J}(p)=\frac{\bar{\bar{u}}'_+(p,0,s)}{\sqrt{p+ik}}-\Phi_+(p)=-\sqrt{p-ik}\,\bar{\bar{u}}_-(p,0,s)+\Phi_-(p).$$

Функция $\mathcal{J}(p)$ определена в полосе $-m<\beta<m$, однако, левая часть равенства (9) определена и регулярна в полуплоскости $\beta>-m$, а правая часть – в полуплоскости $\beta<m$. Следовательно, аналитическим продолжением можно определить $\mathcal{J}(p)$ на всей плоскости $p$. Согласно обобщенной теореме Лиувилля $\mathcal{J}(p)$ является некоторым полиномом. Так как при $p\to\infty$ $\bar{\bar{u}}'_+(p,0,s)$, $\Phi_-(p)$, $\Phi(p)$, а значит и $\Phi_+(p)$, стремятся к нулю, то некоторый полином $\mathcal{J}(p)$ тоже стремится к нулю при $p\to\infty$, а это означает, что $\mathcal{J}(p)\equiv 0$.

Отсюда, предполагая, что при $p\to\infty$, $\bar{\bar{f}}_2(p,s)\to 0$ быстрее, чем $p^{-1/2}$, имеем (это предположение не ограничивает общность задачи, т.к. в каждом конкретном случае можно любым другим образом подсчитать контурные интегралы):

$$\bar{\bar{u}}'_+(p,0,s)=\sqrt{p+ik}\;\Phi_+(p)=$$

$$=-\sqrt{p^2+k^2}\,\bar{\bar{f}}_2(p,s)-\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\frac{\sqrt{p+ik}\cdot\sqrt{i\rho}\cdot\bar{\bar{f}}_2(i\rho+ik,s)\,d\rho}{i\rho+ik-p}.$$

Применяя обратное преобразование Фурье, найдем:

$$(10)\quad \bar{u}'_+(x,0,s)=-\sqrt{2\pi}\,\overline{V}_2(x,s)-\frac{\sqrt{2}}{\pi}\int_0^\infty\sqrt{\rho}\,\bar{\bar{f}}_2(i\rho+ik,s)\Big[\frac{e^{-kx}}{\sqrt{\pi x}}+$$
$$+\sqrt{2k+\rho}\;e^{(\rho+k)x}\operatorname{erf}\sqrt{(2k+\rho)x}\,\Big]\,d\rho\,,$$

где $\overline{V}_2(x,s)\div\sqrt{k^2+p^2}\,\bar{\bar{f}}_2(p,s)$.

Обозначим $V_2(x,t)\div\overline{V}_2(x,s)$, $\widetilde{V}_2(\rho,t)\div\bar{\bar{f}}_2(i\rho+i\sqrt{\frac{s}{a}};s)$, переходя в (10) к оригиналу, будем иметь

$$
u'_{+}(x,0,t) = -\sqrt{2\pi}\, V_2(x,t) - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{\rho}}{\sqrt{\pi x}} \Big[ \int_0^t \tilde{V}_2(\rho, t-\tau)\, \Psi\Big(\frac{x}{\sqrt{a}}, \tau\Big) d\tau \Big] d\rho -
$$

$$
- \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \sqrt{\rho}\, e^{\rho x} \frac{d}{dt} \int_0^t \tilde{V}_2(\rho, t-\xi) \Big\{ e^{-\frac{\tau^2}{4\xi}} \Big[\Big[ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{a}} \frac{\exp\big[-\frac{\rho\sqrt{a}}{2}\big(\tau + \frac{x}{\sqrt{a}}\big)\big]}{\sqrt{\pi\big(\tau + \frac{x}{\sqrt{a}}\big)}} +
$$

$$
+ \sqrt{\rho}\, \operatorname{erf} \sqrt{\frac{\rho\sqrt{a}}{2}\Big(\tau + \frac{x}{\sqrt{a}}\Big)} \Big]\Big] d\tau - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi t}} \int_{\frac{2x}{\sqrt{a}}}^{\infty} e^{-\frac{\tau^2}{4\xi}} \int_{\frac{2x}{\sqrt{a}}}^{\tau + \frac{x}{\sqrt{a}}} \frac{e^{-\frac{\rho\sqrt{a}}{2}\nu}}{2\sqrt[4]{a}\, \nu \sqrt{\pi\nu}}\, d\nu\, d\tau -
$$

$$
- \frac{e^{-\rho x}}{\sqrt{\pi x}} \operatorname{erfc}\Big(\frac{x}{\sqrt{a\xi}}\Big) \Big\} d\rho = W_2(x,t) .
$$

Таким образом, <u>решение краевой задачи (б)</u> сводится к решению краевой задачи вида

$$
u'(x,0,t) = \begin{cases} 0 & x < 0 , \\ W_2(x,t) & x > 0 , \end{cases}
$$

$$
u'(x,l,t) = \begin{cases} 0 & x < 0 , \\ -W_2(x,t) & x > 0 , \end{cases}
$$

а решение <u>краевой задачи (а)</u> сводится к решению краевой задачи вида

$$
u'(x,0,t) = \begin{cases} 0 & x < 0 , \\ W_1(x,t) & x > 0 , \end{cases}
$$

$$
u'(x,l,t) = \begin{cases} 0 & x < 0 , \\ W_1(x,t) & x > 0 , \end{cases}
$$

где $W_1(x,t)$ совпадает с $W_2(x,t)$ если считать, что $V_2(x,t) \div \sqrt{k^2+p^2}\, \bar{\bar{f}}_1(p, s)$ а $\tilde{V}_2(\rho,t) \div \bar{\bar{f}}_1\big(i\rho + i\sqrt{\tfrac{s}{a}};\, s\big)$.

Функция Грина для такой краевой задачи известна:

$$
G(x,y,t;\, x_0, y_0, t_0) = \frac{1}{2l\sqrt{\pi a (t-t_0)}} \exp\Big[-\frac{(x-x_0)^2}{4a(t-t_0)}\Big] \cdot
$$

$$
\cdot \Big\{ 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \exp\Big[-\frac{a\pi^2 n^2}{l^2}(t-t_0)\Big] \cos\frac{n\pi y}{l} \cos\frac{n\pi y_0}{l} \Big\} .
$$

Отсюда, <u>решение задачи (б)</u> имеет вид

$u_{(б)}(x,y,t) =$

$$= -\frac{2\sqrt{a}}{\ell\sqrt{\pi}}\int_0^t dt_0 \int_0^\infty \frac{W_2(x_0,t_0)}{\sqrt{t-t_0}} \exp\left[-\frac{(x-x_0)^2}{4a(t-t_0)}\right] \cdot$$

$$\cdot \sum_{m=1}^{\infty} \exp\left[-\frac{a\pi^2(2m-1)^2}{\ell^2}(t-t_0)\right] \cos\frac{(2m-1)\pi y}{\ell}\, dx_0 ;$$

а <u>решение задачи (а)</u>

$$u_{(a)}(x,y,t) = -\frac{2\sqrt{a}}{\ell\sqrt{\pi}}\int_0^t dt_0 \int_0^\infty \frac{W_1(x_0,t_0)}{\sqrt{t-t_0}} \exp\left[-\frac{(x-x_0)^2}{4a(t-t_0)}\right] \cdot$$

$$\cdot \sum_{m=1}^{\infty} \exp\left[-\frac{4a\pi^2 m^2}{\ell^2}(t-t_0)\right] \cos\frac{2m\pi y}{\ell}\, dx_0 .$$

Приведем в качестве примера решение этим методом краевой задачи уравнения теплопроводности (1) $(a = 1)$ вида

(11) $u(x,0,t) = f(t)e^{-bx}, \quad x > 0,$

$$\frac{\partial}{\partial y} u(x,0,t) = 0, \qquad x < 0,$$

$$u(x,\ell,t) = f(t)e^{-bx}, \quad x > 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial y} u(x,\ell,t) = 0, \qquad x < 0;$$

при нулевом начальном условии.

Решение этой краевой задачи можно свести, как это было указано выше, к решению краевой задачи для полуплоскости $0 \le y < +\infty, -\infty < x < +\infty$ вида

(12) $u(x,0,t) = f(t)e^{-bx}, \quad x > 0,$

$$\frac{\partial}{\partial y} u(x,0,t) = 0, \qquad x < 0.$$

В работе [5], в результате решения функционального уравнения, соответствующего краевой задаче для полуплоскости, было найдено $(b = 1,\ f(t) = 1)$

$$\frac{\partial}{\partial y} u_+(x,0,t) = -(I_1 + I_2 + I_3),$$

где:

$$I_1(x,t)=\frac{1}{\pi\sqrt{tx}}\int_x^{\infty}e^{-\frac{\tau^2}{4t}}\left[\frac{e^{-(\tau-x)}}{\sqrt{\pi(\tau-x)}}+\operatorname{erf}\sqrt{\tau-x}\,\right]d\tau\,,$$

$$I_2(x,t)=e^{-x}\left[\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\,e^{t}-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\sqrt{t}}e^{v^2}dv\right]\,,$$

$$-I_3(x,t)=\frac{e^{-x}}{\sqrt{\pi t}}\int_x^{\infty}e^{-\frac{\nu^2}{4t}}\left\{e^{x}\left[\frac{e^{-\nu+x}}{\sqrt{\pi(\nu-x)}}+\operatorname{erf}\sqrt{\nu-x}\,\right]-\right.$$

$$\left.-\int_x^{\nu}\frac{e^{\tau}}{2\sqrt{\pi\tau^3}}\left[\frac{e^{-\nu+\tau}}{\sqrt{\pi(\nu-\tau)}}+\operatorname{erf}\sqrt{\nu-\tau}\,\right]d\tau\right\}d\nu\,.$$

Ввиду симметрии граничных условий (11) имеем:

$$\frac{\partial}{\partial y}u(x,0,t)=\begin{cases}0 & x<0,\\ -(I_1+I_2+I_3) & x>0,\end{cases}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}u(x,\ell,t)=\begin{cases}0 & x<0,\\ -(I_1+I_2+I_3) & x>0\,.\end{cases}$$

Откуда сразу следует решение краевой задачи (11) для уравнения (1) $(a=1)$ при нулевых начальных условиях

$$u(x,y,t)=\frac{2}{\ell\sqrt{\pi}}\int_0^t dt_0\int_0^{\infty}[I_1(x_0,t_0)+I_2(x_0,t_0)+I_3(x_0,t_0)]\cdot$$

$$\cdot\frac{\exp\left[-\frac{(x-x_0)^2}{4(t-t_0)}\right]}{\sqrt{t-t_0}}\sum_{m=1}^{\infty}\exp\left[-\frac{4\pi^2m^2}{\ell^2}(t-t_0)\right]\cos\frac{2m\pi y}{\ell}\}\,dx_0\,.$$

Решение краевых задач вида (в) и (г) осуществляется аналогично, в результате решения соответствующего функционального уравнения и переходя к оригиналу, имеем

$$u_-(x,0,t)=\sqrt{2\pi}\int_0^{-x}d\chi\int_0^t\tilde{\varphi}_1(-x-\chi,t-\tau)\frac{\Psi\left(\frac{\chi}{\sqrt{a}},\tau\right)}{\sqrt{\pi\chi}}d\tau-\tag{13}$$

$$-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}\frac{e^{-\rho x}}{\sqrt{\rho}}\left\{\int_0^t\tilde{\tilde{\varphi}}_1(-x,t-\nu,\rho)\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\left[\frac{\sqrt{a}\,e^{-\frac{\rho\sqrt{a}}{2}}}{2\pi\sqrt{\nu}}\int_0^{\frac{2x}{\sqrt{a}}}\frac{e^{-\frac{\tau^2}{4\nu}}}{\sqrt{\tau}}d\tau\right]d\nu\right\}d\rho=W_3(x,t)\,,$$

где: $\tilde{\varphi}_1(x,t) \div \frac{\bar{\bar{\psi}}_1(p,s)}{\sqrt{k+ip}}$; $\tilde{\tilde{\varphi}}_2(x,t,\rho) \div \sqrt{s}\, e^{x\sqrt{\frac{s}{a}}}\,\bar{\bar{\psi}}_1(i\rho + i\sqrt{\frac{s}{a}}; s)$

(здесь $x > 0$ ).

Отсюда решение краевой задачи (в) сводится, ввиду симметрии функции $u(x,y,t)$ относительно оси $y = \frac{\ell}{2}$, к краевой задачи вида

$$u(x,0,t) = \begin{cases} 0 & x > 0, \\ W_3(x,t) & x < 0, \end{cases}$$

$$u(x,\ell,t) = \begin{cases} 0 & x > 0, \\ W_3(x,t) & x < 0. \end{cases}$$

а решение краевой задачи (г) сводится к решению краевой задачи

$$u(x,0,t) = \begin{cases} 0 & x > 0, \\ W_4(x,t) & x < 0, \end{cases}$$

$$u(x,\ell,t) = \begin{cases} 0 & x > 0, \\ -W_4(x,t) & x < 0, \end{cases}$$

где $W_4(x,t)$ совпадает с $W_3(x,t)$, если

$\tilde{\varphi}_1(x,t) \div \frac{\bar{\bar{\psi}}_2(p,s)}{\sqrt{k+ip}}$; $\tilde{\tilde{\varphi}}_2(x,t,\rho) \div \sqrt{s}\, e^{x\sqrt{\frac{s}{a}}}\,\bar{\bar{\psi}}_2(i\rho + i\sqrt{\frac{s}{a}}; s)$.

Функция Грина для такого вида краевых задач

$$G(x,y,t;x_0,y_0,t_0) = \frac{1}{\ell\sqrt{\pi a(t-t_0)}} \exp\left[-\frac{(x-x_0)^2}{4a(t-t_0)}\right] \cdot$$
$$\cdot \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left[-\frac{a\pi^2 n^2 (t-t_0)}{\ell^2}\right] \sin\frac{n\pi y}{\ell} \sin\frac{n\pi y_0}{\ell}.$$

Отсюда следует <u>решение краевой задачи (в)</u>

$$u_{(в)}(x,y,t) = \frac{2\sqrt{\pi a}}{\ell^2} \int_0^t dt_0 \int_0^\infty \frac{W_3(x_0,t_0)}{\sqrt{t-t_0}} \exp\left[-\frac{(x-x_0)^2}{4a(t-t_0)}\right] \cdot$$
$$\cdot \sum_{m=1}^{\infty} 2m \exp\left[-\frac{4a\pi^2 m^2 (t-t_0)}{\ell^2}\right] \sin\frac{2m\pi y}{\ell}\, dx_0$$

и <u>краевой задачи (г)</u>

$$u_{(г)}(x,y,t)=\frac{2\sqrt{\pi a}}{l^2}\int_0^t dt_0\int_0^\infty\frac{W_4(x_0,t_0)}{\sqrt{t-t_0}}\exp\left[-\frac{(x+x_0)^2}{4a(t-t_0)}\right]\cdot$$

$$\cdot\sum_{m=1}^{\infty}(2m-1)\exp\left[-\frac{(2m-1)^2a\pi^2(t-t_0)}{l^2}\right]\sin\frac{(2m-1)\pi y}{l}dx_0.$$

Складывая решения задач (а),(б),(в) и (г),получим решение задачи I .

Решение задачи II путем разбиения на более простые краевые задачи с симметричными и антисимметричными граничными условиями проводится аналогично, причем, получающиеся при этом функциональные уравнения аналогичны функциональным уравнениям задачи I , их решения уже известны (10) и (13), остается только выписать окончательные решения, что не приводится ввиду экономии места.

Литература

[1] Ф. МОРС, Г. ФЕШБАХ: Методы теоретической физики,т. 1 . ИЛ,М.,1958-1960.

[2] Н. ВИНЕР, Р. ПЭЛИ: Преобразование Фурье в комплексной области, Наука,М.,1964.

[3] Б. НОБЛ: Применение метода Винера-Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных, ИЛ,М.,1962.

[4] В.А. ДИТКИН, А.П. ПРУДНИКОВ: Справочник по операционному исчислению, Высшая скола,М.,1965.

[5] Я.Ф. РУТНЕР, Л.П. СКРЯБИНА: Применение метода Винера-Хопфа к решению одной краевой задачи уравнения теплопроводности, ДУ,№ 8(1966).

(Received March 20,1967)