

Norbert M. Flaisher

Новый тип задач для уравнения теплопроводности (II)

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, Vol. 9 (1968), No. 4, 511-514

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/105194>

Terms of use:

© Charles University in Prague, Faculty of Mathematics and Physics, 1968

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

НОВЫЙ ТИП ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ (II)

Н.М. ФЛАЙШЕР, Москва

Ниже для уравнения $Tu \equiv u_{xx} - u_t = 0$ рассмотрена задача с начальным условием, содержащим производные до n -го порядка ($n < \infty$) по t искомой функции. Случай $n = 1$ изучен в [1].

I. Пусть \mathcal{D} - полуплоскость $t > 0$, \mathcal{M}_f - лежащее на оси Ox множество всех точек непрерывности $f(x)$ заданной на $E \equiv (-\infty, \infty)$, $\mathcal{R}(\mathcal{D})$ - класс ограниченных при $t \rightarrow \infty$ и при $|x| \rightarrow \infty$ функций $u(x, t)$ экспоненциального типа [2] в \mathcal{D} , $C_t^n(\mathcal{D})$ ($n \geq 1$) - класс функций $u(x, t)$ таких, что $u_{t^n} \in C(\mathcal{D})$ (смысл C_x^n аналогичен), $\mathcal{U}(G)$ - класс функций $f(x) \in L(G)$, $G \subseteq E$, удовлетворяющих условиям

$$\int_G f(x) dx = 0, \quad \int_G |x f(x)| dx < \infty,$$

$$a_1, \dots, a_m - \text{вещественны, } P(\lambda) = \lambda^m + a_1 \lambda^{m-1} + \dots + a_m = (\lambda - \lambda_1) \dots (\lambda - \lambda_m), \quad D_t \equiv \frac{\partial}{\partial t}.$$

Задача I. Найти функцию $u \in \mathcal{R}(\mathcal{D}) \cap C_x^2(\mathcal{D}) \cap C_t^n(\mathcal{D} \cup \mathcal{M}_f)$, удовлетворяющую уравнению $Tu = 0$ в \mathcal{D} , а для всех $x \in \mathcal{M}_f$ - условие $P(D_t)u(x, 0) = f(x)$.

Теорема I. 1° При $a_m \neq 0$ и $\operatorname{Re} \lambda_k > 0$, $k = 1, \dots, m$, задача I имеет единственное решение для любой локально сум-

мируемой функции $f(x)$, ограниченной при $|x| \rightarrow \infty$ ¹⁾.

2° При $a_m = 0$, $a_{m-1} \neq 0$ и $\operatorname{Re} \lambda_k > 0$, $k = 1, \dots, m-1$ ($\lambda_m = 0$) задача I имеет единственное, с точностью до постоянного слагаемого μ_0 , решение для $f(x) \in \mathcal{O}(E)$.

3° При $a_m = a_{m-1} = 0$ задача I неразрешима.

Для вещественных простых λ_k обозначив $(\Phi(x) -$
интеграл ошибок)

$$\sum_{k=1}^m \frac{1}{4\sqrt{\lambda_k} P'(\lambda_k)} e^{\lambda_k t} \int_{-\infty}^{\infty} [e^{\sqrt{\lambda_k}(\xi-x)} \Phi(\sqrt{\lambda_k} t + \frac{\xi-x}{2\sqrt{\lambda_k}}) + e^{-\sqrt{\lambda_k}(\xi-x)} \Phi(\sqrt{\lambda_k} t - \frac{\xi-x}{2\sqrt{\lambda_k}}) - 2 \operatorname{ch} \sqrt{\lambda_k} (\xi-x)] f(\xi) d\xi$$

через $I(x, t; \lambda_1, \dots, \lambda_m; f) \equiv I(x, t; \lambda^{(m)}; f)$ имеем в случае 1° $\mu(x, t) = I(x, t; \lambda^{(m)}; f)$ а в случае 2° $\mu(x, t) = I(x, t; \lambda^{(m-1)}; f) + a_{m-1}^{-1} I_0(x, t; f) + \mu_0$, где

$$I_0(x, t; f) = \int_{-\infty}^{\infty} [\frac{\sqrt{t}}{\sigma} e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4t}} + \frac{1}{2} (\xi-x) \Phi(\frac{\xi-x}{2\sqrt{t}})] f(\xi) d\xi.$$

Доказательство. Пусть все λ_k вещественные простые.

1° Для любых $\mu, \nu = 0, 1, 2, \dots$ все интегралы в $I_{x, t, \nu}(x, t; \lambda^{(m)}; f)$ сходятся равномерно при $|x| \leq M, 0 < t_0 \leq t \leq t_1$. В \mathcal{D} $\mu \in \mathcal{O}$ аналитична по x и входит в C_t^∞ , удовлетворяя уравнению $T\mu = 0$ и начальному условию [3], так как

$$P(D_t) I(x, t; \lambda^{(m)}; f) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4t}} f(\xi) d\xi$$

1) Если при каком-либо k $\operatorname{Re} \lambda_k < 0$ и $\operatorname{Im} \lambda_k = 0$ или $\operatorname{Re} \lambda_k \leq 0$ и $\operatorname{Im} \lambda_k \neq 0$, то задача I неразрешима. Это относится и к 2° ($k = 1, \dots, m-1$).

При $\mathcal{M} = E$ единственность решения следует из принципа экстремума для u, u_1, \dots, u_n и из того, что решение ($A_{\pm k}$ - произвольные постоянные)

$$(1) \quad \sum_{k=1}^n (A_k e^{\sqrt{\lambda_k} x} + A_{-k} e^{-\sqrt{\lambda_k} x}) e^{\lambda_k t}$$

уравнения $Tu = 0$, удовлетворяющее условию $P(D_t)u = 0$, входит в $\mathcal{R}(\mathcal{D})$ лишь для $A_{\pm k} \equiv 0, k = 1, \dots, n$. При $\mathcal{M}_f \subset E$ вводим $f(x; t_0) = P(D_t)I(x, t_0; \lambda^{(n)}; f), t_0 > 0$; так как $f(x; t_0) \in C(E), f(\pm \infty; t_0) = 0$, задача $Tu = 0, t > t_0; P(D_t)u(x, t_0) = f(x; t_0), x \in E$, имеет в $\mathcal{R}(\mathcal{D})$ единственное решение

$$(2) \quad u(x, t; t_0) = I(x, t - t_0; \lambda^{(n)}; f(x; t_0)) .$$

Но [3] почти всюду (для всех $x \in \mathcal{M}_f$) $\lim_{t_0 \rightarrow 0} f(x; t_0) = f(x) \in L(E)$, значит в (2) возможен подынтегральный переход к пределу при $t_0 \rightarrow 0$, откуда следует единственность решения $u(x, t) = I(x, t; \lambda^{(n)}; f)$ в классе $\mathcal{R}(\mathcal{D})$.

2° Преобразуем $I_0(x, t; f)$ как в [1], рассуждая далее как в 1° и [1] (в (1) n -ый член заменяем через $Ax + A_0$).

3° Достаточно взять $P(\lambda) = \lambda^2$; но в этом случае утверждение очевидно.

Для мнимых и кратных λ_k доказательство аналогично.

2. Пусть \mathcal{D}^+ - четверть $x > 0, t > 0, E_x^+(E_x^+)$ - полуось $t > 0 (x > 0), f(x) (\varphi(t))$ задана на

E_x^+ (E_t^+), $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ - вещественны, $Q(\lambda) = \lambda^n + \lambda_1 \lambda^{n-1} + \dots$
 $\dots + \lambda_n$, $D_x \equiv \frac{\partial}{\partial x}$.

Задача 2. Найти функцию $u \in \mathcal{K}(\mathcal{D}^+) \cap C_x^r(\mathcal{D}^+ \cup$
 $\cup \mathcal{M}_\varphi) \cap C_t^m(\mathcal{D}^+ \cup \mathcal{M}_f)$, удовлетворяющую уравнению
 $Tu = 0$ в \mathcal{D}^+ и условию $P(D_t)u(x, 0) = f(x)$ для
 $x \in \mathcal{M}_f$ и $Q(D_x)u(0, t) = \varphi(t)$ для $t \in \mathcal{M}_\varphi$.

При $\varphi(\infty) < \infty$, $\varphi \in L(E_t^+)$ теорема 1 верна и
 для задачи 2 (в случае 2° $f \in \mathcal{O}(E_x^+)$). При $\varphi \equiv 0$
 $u(x, t)$ представимо в виде $I(x, t; \lambda^{(m)}; f)$ (случай
 1°), для чего достаточно продолжить $f(x)$ на E_x^-
 так, что $Q(D)f(x)$ - нечетно. Это верно и в случае
 2°, а также при мнимых и кратных λ_{k_0} . Доказательство
 аналогично изложенному в [4] для случая $P(\lambda) \equiv 1$.

Л и т е р а т у р а

- [1] Н.М. ФЛАЙШЕР: Новый тип задач для уравнения теплопроводности, Comment. Math. Univ. Carolinae, 9,1(1968), 71-77.
- [2] Е. ТИТЧМАРШ: Введение в теорию интегралов Фурье, М.-Л., ГИТТЛ, 1948.
- [3] С.Ф. ЛИДЯЕВ: О представимости решения уравнения теплопроводности в виде интеграла Пуассона. Изв. АН СССР, серия матем., 1941, 5, 1, 263-268.
- [4] О.А. ЛАДЫЖЕНСКАЯ, В.А. СОЛОННИКОВ, Н.Н. УРАЛЬЦЕВА: Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа, М., "Наука", 1967.

(Received July 10, 1968)