Osvald Demuth

Пространства L_r и S в конструктивной математике

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, Vol. 10 (1969), No. 2, 261--284

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/105232`

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae
10,2 (1969)

ПРОСТРАНСТВА L_n И S В КОНСТРУКТИВНОЙ МАТЕМАТИКЕ

О. ДЕМУТ, Прага
(O. DEMUTH, Praha)

Настоящая статья посвящена конструктивным пространствам L_n и S. Определения этих пространств близки определениям Н.А. Шанина (см.[2],стр.255-272) а в развитии теории этих пространств используются результаты из [5] и [6]. Показано, например, что L_n и S полные сепарабельные пространства, что функция f является неопределенным интегралом от элемента пространства L_1 тогда и только тогда, когда она абсолютно непрерывна на сегменте $0 \Delta 1$ и что в L_1 неверны теорема Лебега и лемма Фату. Для элементов пространства S выполнена теорема Лузина о измеримых функциях.

В следующем пользуемся определениями и результатами из [1] и [2]. Натуральными числами называем положительные целые числа, конструктивными действительными числами (КДЧ) - вещественные дуплексы (см.[2],стр.77), последовательностями конструктивных объектов определенного типа - нормальные алгорифмы [1], перерабатывающие всякое натуральное число в объект этого типа, функциями - конструктивные функции одной действительной переменной, определенные для всякого КДЧ из сегмента $0 \Delta 1$. Напомним, что конструктивные функции непрерывны в каждой точке, в которой они определены (см. [2], стр. 342).

Последовательность неперекрывающихся сегментов назовем ${}^{(1)}S_\sigma$-множеством а КДЧ z мерой этого множества, если частные суммы длин сегментов этой последовательности сходятся к z.

Если H ${}^{(1)}S_\sigma$-множество а x КДЧ, то посредством $x \in H$ обозначим: Не может не существовать сегмент последовательности H, содержащий x.

Будем говорить, что некоторое свойство КДЧ - скажем $P(x)$ - выполнено для почти всех КДЧ x из сегмента $a \Delta b$, если существует последовательность ${}^{(1)}S_\sigma$-множеств $\{H^k\}_k$ такая, что для всякого натурального числа k H^{k+1} является частью H^k, мера H^k меньше чем $\frac{1}{k+1}$ и $\forall x (x \in a \Delta b \mathbin{\&}$ $\mathbin{\&} \neg (x \in H^k) \supset P(x))$.

В дальнейшем буквы k, l, m и n служат переменными для натуральных чисел (НЧ), буквы i и j - переменными для целых чисел (ЦЧ), буква a - переменной для рациональных чисел а буквы x, y и z - переменными для КДЧ.

ω, λ и τ - нормальные алгорифмы такие, что для всяких КДЧ x и НЧ m выполнено

$$\omega(x) \simeq \frac{|x|}{1+|x|} \mathbin{\&} \lambda(x,m) \simeq max(min(x,m),-m)$$

а алгорифм τ применим к x и $\tau(x)$ целое число такое, что $\tau(x)-2 < |x| < \tau(x)$.

Определение: 1) Ступенчатыми остовами (соотв. рациональными ступенчатыми остовами) называем слова вида

(1) $$a_0 \gamma a_1 \ldots \gamma a_m \delta y_1 \gamma y_2 \ldots \gamma y_m ,$$

где все a_i - рациональные числа а все y_j - КДЧ (соотв. все a_i и все y_j - рациональные числа) и выполнено $0 = a_0 < a_1 < \ldots < a_m = 1$.

2) Остов (1) назовем д-остовом, если существует НЧ k такое, что $m = 2^k \& \forall i (0 \leq i \leq 2^k \supset a_i = \frac{i}{2^k})$.

Обозначим (1) через F. Можно построить нормальные алгорифмы σ, ϑ и $\mathscr{C}$ так, что для всякого F и любого КДЧ x из сегмента $0 \Delta 1$ выполнено $\sigma(F) \simeq \simeq \max_{1 \leq i \leq m} |y_i|$, $\forall z (\vartheta(Fx) \simeq z \equiv \exists i (1 \leq i \leq m \& \& a_{i-1} < x < a_i \& z = y_i))$ и $\mathscr{C}(Fx) \simeq \sum_{i=1}^{m} y_i \cdot (\min(x, a_i) - \min(x, a_{i-1}))$.

Заметим, что $\widetilde{\vartheta}_F$ и $\widetilde{\mathscr{C}}_F$ являются конструктивными функциями, $\widetilde{\mathscr{C}}_F$ даже всюду на сегменте $0 \Delta 1$ определенной полигональной функцией.

Для произвольных КДЧ y и z таких, что $0 \leq \leq y \leq z \leq 1$, обозначим

$$\int_y^z F \rightleftharpoons \widetilde{\mathscr{C}}_F(z) - \widetilde{\mathscr{C}}_F(y) .$$

Определения: 1) а) $0 \leq F \rightleftharpoons \forall x (x \in 0 \Delta 1 \& \& ! \vartheta(Fx) \supset 0 \leq \vartheta(Fx))$,

б) Для любой конструктивной функции g, определенной для всех КДЧ, положим

$g_0(F) \rightleftharpoons a_0 \gamma a_1 \ldots \gamma a_m \sigma g(y_1) \gamma g(y_2) \ldots \gamma g(y_m)$,

2) Для произвольных ступенчатых остовов F_1 и F_2 , где $F_i \equiv {}^i a_0 \gamma {}^i a_1 \ldots \gamma {}^i a_{m_i} \sigma {}^i y_1 \gamma {}^i y_2 \ldots \gamma {}^i y_{m_i}$ $(i = 1, 2)$, и любой всюду определенной конструктивной функции двух действительных переменных h определим

а) $h_0(F_1, F_2) \rightleftharpoons {}^3a_0 \gamma {}^3a_1 \ldots \gamma {}^3a_{m_3} \sigma h(\vartheta(F_1 \frac{{}^3a_0 + {}^3a_1}{2}),$

$$\vartheta(F_2 \frac{{}^3a_0 + {}^3a_1}{2})) \gamma h(\vartheta(F_1 \frac{{}^3a_1 + {}^3a_2}{2}),$$

$$\vartheta(F_2 \frac{{}^3a_1 + {}^3a_2}{2})) \ldots \gamma h(\vartheta(F_1 \frac{{}^3a_{m_3-1} + {}^3a_{m_3}}{2}), \vartheta(F_2 \frac{{}^3a_{m_3-1} + {}^3a_{m_3}}{2})),$$

где $(0 = {}^3a_0 < {}^3a_1 < \ldots < {}^3a_{m_3} = 1) \,\&\, \forall a(\exists i(0 \le i \le m_3 \,\&\, a = {}^3a_i) \equiv (\exists i(0 \le i \le m_1 \,\&\, a = {}^1a_i) \vee \exists i(0 \le i \le m_2 \,\&\, a = {}^2a_i)))$, и

б) $F_1 \mathrel{\overset{\circ}{=}} F_2 \rightleftharpoons \forall x(x \in 0 \Delta 1 \,\&\, !\vartheta(F_1 x) \,\&\, !\vartheta(F_2 x) \supset \vartheta(F_1 x) = \vartheta(F_2 x))$.

Заметим, что для всяких ступенчатых остовов F_1 и F_2 и КДЧ u, v, y и x таких, что $0 \le v \le y \le x \le 1$, выполнено $\mathring{\int}_v^x F_1 = \mathring{\int}_v^y F_1 + \mathring{\int}_y^x F_1$, $(0 \le F_1 \supset 0 \le \mathring{\int}_y^x F_1)$, $(F_1 \mathrel{\overset{\circ}{=}} F_2 \supset \mathring{\int}_y^x F_1 = \mathring{\int}_y^x F_2)$, $|\mathring{\int}_y^x F_1| \le \mathring{\int}_y^x |F_1|_0$, $\mathring{\int}_y^x (u \mathbin{\dot{\cdot}} F_1) = u \cdot \mathring{\int}_y^x F_1$ и $\mathring{\int}_y^x (F_1 \mathbin{\overset{\circ}{+}} F_2) = \mathring{\int}_y^x F_1 + \mathring{\int}_y^x F_2$.

Для ступенчатых остовов очевидно выполнены неравенства Гельдера и Минковского, в частности для любых рациональных чисел (РЧ) p и q , $1 < p \le q$, имеем $\mathring{\int}_0^1 |F|_0 \le$ $\le (\mathring{\int}_0^1 |F|_0^p)^{1/p} \le (\mathring{\int}_0^1 |F|_0^q)^{1/q} \le \sigma(F)$. Вариацией функции $\mathcal{E}_F$ на сегменте $0 \Delta 1$ является КДЧ $\mathring{\int}_0^1 |F|_0$.

Ясно, что для всяких ступенчатого остова F и НЧ m можно построить рациональный ступенчатый д-остов H такой, что $\overset{\circ}{\int_0^1} | F \dot{-} H |_\circ < \frac{1}{2^m}$.

В следующем буква F служит переменной для ступенчатых остовов, буква D – переменной для ступенчатых д-остовов а $\varkappa$ – переменной для последовательностей ступенчатых остовов.

<u>Определения</u>: Пусть $\{F_n\}_n$ и $\{G_n\}_n$ последовательности ступенчатых остовов, F ступенчатый остов, u КДЧ а r, p и a РЧ такие, что $1 \leq r \,\&\, 1 < p \,\&\, 0 < a < 1$. Тогда:

а) обозначим $\{F_n\}_n = \{G_n\}_n$ (соотв. $\{F_n\}_n = 0$), если для почти всех КДЧ x из сегмента $0 \triangle 1$ последовательность КДЧ $\{\vartheta(F_n x) - \vartheta(G_n x)\}_n$ (соотв. $\{\vartheta(F_n x)\}_n$) определена и сходится к нулю, а $0 \leq \{F_n\}_n$, если для почти всех КДЧ x из $0 \triangle 1$ последовательность КДЧ $\{\vartheta(F_n x)\}_n$ определена и сходится к неотрицательному пределу,

б) определим $|\{F_n\}_n| \rightleftharpoons \{|F_n|_\circ\}_n$, $\{F_n\}_n^+ \rightleftharpoons \{F_n^+\}_n$, $\{F_n\}_n^- \rightleftharpoons \{F_n^-\}_n$, $|\{F_n\}_n|^a \rightleftharpoons \{|F_{2\tau(\frac{1}{a})\cdot(n+2)}|_\circ^a\}_n$,

$|\{F_n\}_n|^r \rightleftharpoons \{|F_{\tau(p)\cdot(n+5+\max\limits_{1 \leq l \leq n+4} \tau(\sigma(F_l)))}|_\circ^p\}_n$,

$u \cdot \{F_n\}_n \rightleftharpoons \{u \dot{\circ} F_{\tau(u)+n}\}_n$, $F \cdot \{F_n\}_n \rightleftharpoons$

$\rightleftharpoons \{F \dot{\circ} F_{\tau(\sigma(F))+n}\}_n$, $\{F_n\}_n + \{G_n\}_n \rightleftharpoons \{F_{n+1} \dot{+} G_{n+1}\}_n$,

$\{F_n\}_n - \{G_n\}_n \rightleftharpoons \{F_{n+1} \dot{-} G_{n+1}\}_n$, $\{F_n\}_n - F \rightleftharpoons \{F_n \dot{-} F\}_n$ и

$\{F_n\}_n \cdot \{G_n\}_n \rightleftharpoons$

$\rightleftharpoons \{F_{2n+9+\max_{1\le l\le 2n+8}(\tau(\sigma(F_l))+\tau(\sigma(G_l)))} \mathbin{\mathring{\cdot}} G_{2n+9+\max_{1\le l\le 2n+8}(\tau(\sigma(F_l))+\tau(\sigma(G_l)))}\}_n,$

в) $\{F_n\}_n \le \{G_n\}_n \rightleftharpoons 0 \le (\{G_n\}_n - \{F_n\}_n)$ и

г) $\{F_n\}_n \in L_k \rightleftharpoons \forall n\,(\mathring{\int}_0^1 |F_n \mathbin{\mathring{-}} F_{n+1}|^k < \frac{1}{2^{k\cdot n}})$ и

$\{F_n\}_n \in S \rightleftharpoons \forall n\,(\mathring{\int}_0^1 \omega_0(F_n \mathbin{\mathring{-}} F_{n+1}) < \frac{1}{2^n})$.

Пусть k РЧ, $1 \le k$, $\{^1F_n\}_n \in L_1$, $\{^2F_n\}_n \in L_k$, $\{^3F_n\}_n \in S$ и $\{^4F_n\}_n \in S$. Тогда для всяких НЧ n и КДЧ y и x, где $0 \le y \le x \le 1$, имеем $|\mathring{\int}_y^x {}^1F_n - \mathring{\int}_y^x {}^1F_{n+1}| \le \mathring{\int}_y^x |{}^1F_n \mathbin{\mathring{-}} {}^1F_{n+1}|_0 \le$ $\le \mathring{\int}_0^1 |{}^1F_n \mathbin{\mathring{-}} {}^1F_{n+1}|_0 < \frac{1}{2^n}$, $|(\mathring{\int}_0^1 |{}^2F_n|_0^k)^{1/k} - (\mathring{\int}_0^1 |{}^2F_{n+1}|_0^k)^{1/k}| \le$ $\le (\mathring{\int}_0^1 |{}^2F_n \mathbin{\mathring{-}} {}^2F_{n+1}|_0^k)^{1/k} < \frac{1}{2^n}$ и $\mathring{\int}_0^1 |\omega_0({}^3F_{n+1} \mathbin{\mathring{-}} {}^4F_{n+1}) -$ $- \omega_0({}^3F_{n+2} \mathbin{\mathring{-}} {}^4F_{n+2})|_0 \le \mathring{\int}_0^1 \omega_0(({}^3F_{n+1} \mathbin{\mathring{-}} {}^4F_{n+1}) \mathbin{\mathring{-}}$ $\mathbin{\mathring{-}} ({}^3F_{n+2} \mathbin{\mathring{-}} {}^4F_{n+2})) \le \mathring{\int}_0^1 \omega_0({}^3F_{n+1} \mathbin{\mathring{-}} {}^3F_{n+2}) +$ $+ \mathring{\int}_0^1 \omega_0({}^4F_{n+1} \mathbin{\mathring{-}} {}^4F_{n+2}) < \frac{1}{2^n}$.

Ввиду этого $\{\omega_0({}^3F_{n+1} \mathbin{\mathring{-}} {}^4F_{n+1})\}_n \in L_1$ и можно построить нормальные алгорифмы $\int$, $\|\ \|_{L_k}$ и ρ_S такие, что

а) алгорифм $\int$ применим к всякой последовательности ступенчатых остовов $\{^1F_n\}_n \in L_1$ и любым КДЧ y и x, $0 \le y \le x \le 1$, и выдает по ним предел последовательности КДЧ $\{\mathring{\int}_y^x {}^1F_n\}_n$ (результат применения этого алгорифма к перечисленным данным обозначим посредством $\int_y^x \{^1F_n\}_n$), б) алгорифм $\| \quad \|_{L_r}$ применим к всякому $\{{}^2F_n\}_n \in L_r$ и выдает по нему предел последовательности КДЧ $\{(\overset{\circ}{\int_0^1}|{}^2F_n|_0^r)^{1/r}\}_n$ и

в) для любых $\{{}^3F_n\}_n \in S$ и $\{{}^4F_n\}_n \in S$ имеет место

$$\rho_S(\{{}^3F_n\}_n \,\square\, \{{}^4F_n\}_n) \simeq \int_0^1 \{\omega_o({}^3F_{n+1} \mp {}^4F_{n+1})\}_n .$$

На основании отмеченных выше свойств $\overset{\circ}{\int}$ и известных свойств всюду определенной конструктивной функции ω получаем:

__Лемма 1__. Пусть m НЧ, a, p, q и r РЧ, $0 < a < 1 \,\&\, 1 \le r < p \,\&\, 1/p + 1/q = 1$, $\{F_n\}_n$, $\{G_n\}_m$ и $\{H_n\}_n$ последовательности ступенчатых остовов, F ступенчатый остов, u, v, y и z КДЧ, $0 \le v \le y \le z \le 1$, а $\{k_n\}_n$ возрастающая последовательность НЧ такая, что $\forall m\,(m < k_m)$. Тогда:

3) $\{F\}_n \in L_r \,\&\, \{F\}_n \in S$,

2) если $\{F_n\}_n \in L_r \,\&\, \{G_n\}_n \in L_r$, то

а) $|\{F_n\}_n| \in L_r$, $\{F_n\}_n^+ \in L_r$, $\{F_n\}_n^- \in L_r$,
$(u \cdot \{F_n\}_n) \in L_r$, $(F \cdot \{F_n\}_n) \in L_r$, $(\{F_n\}_n - F) \in L_r$,
$\{F_{k_n}\}_n \in L_r$, $\{\lambda_o(F_n, m)\}_n \in L_r$,
$(\{F_n\}_n + \{G_n\}_n) \in L_r$, $(\{F_n\}_n - \{G_n\}_n) \in L_r$,
$\{F_n\}_n \in L_1$, $\{F_n\}_n \in S$ и $|\{F_n\}_n|^a \in L_1$,

б) $\| \{F_n\}_n + \{G_n\}_n \|_{L_r} \le \| \{F_n\}_n \|_{L_r} + \| \{G_n\}_n \|_{L_r}$, $\| \{F_{k_n}\}_n \|_{L_r} = \| \{F_n\}_n \|_{L_r}$, $\| u \cdot \{F_n\}_n \|_{L_r} = |u| \cdot \| \{F_n\}_n \|_{L_r}$ и $\| \{F_n\}_n - F_m \|_{L_r} < \frac{1}{2^{m-1}}$ и

в) можно построить рациональный ступенчатый д-остов H такой, что $\| \{F_n\}_m - \{H\}_n \|_{L_r} < \frac{1}{2^m}$,

3) если $\{F_m\}_n \in L_p$ & $\{G_n\}_n \in L_q$, то $\{F_n\}_n \in L_r$, $|\{F_n\}_n|^r \in L_1$, $(\{F_n\}_n \cdot \{G_n\}_n) \in L_1$ и выполнено $\| \{F_n\}_n \|_{L_r} \le \le \| \{F_n\}_n \|_{L_p} \le \sigma(F_1) + 1$ и $| \int_y^x (\{F_n\}_n \cdot \{G_n\}_n) | \le \le \int_y^x | (\{F_n\}_n \cdot \{G_n\}_n) | \le \| \{F_n\}_n \|_{L_p} \cdot \| \{G_n\}_n \|_{L_q}$,

4) если $\{F_n\}_n \in S$ & $\{G_n\}_n \in S$ & $\{H_n\}_n \in S$, то

а) $|\{F_n\}_n| \in S$, $\{F_n\}_n^+ \in S$, $\{F_n\}_n^- \in S$, $(u \cdot \{F_n\}_n) \in S$, $(F \cdot \{F_n\}_n) \in S$, $(\{F_n\}_n - F) \in S$, $\{F_{k_n}\}_n \in S$, $|\{F_n\}_n|^a \in S$, $|\{F_n\}_n|^r \in S$, $\{\lambda_0(F_n, m)\}_n \in S$, $(\{F_n\}_n + \{G_n\}_n) \in S$, $(\{F_n\}_n - \{G_n\}_n) \in S$, $(\{F_n\}_n \cdot \{G_n\}_n) \in S$,

$\{\omega_0(F_n)\}_n \in L_1$ и

$\{\lambda_0(F_{m+n+1}, m)\}_n \in L_1$,

б) $0 \le \rho_s(\{F_n\}_n \square \{G_n\}_n) = \rho_s(\{G_n\}_n \square \{F_n\}_n)$,

На основании частей 2б) и 4б) леммы 1 получаем:

<u>Лемма 2</u>. 1) Пусть $\varkappa$ РЧ, $1 \leq \varkappa$, $\{\{{}^{m}F_{n}\}_{n}\}_{m}$ последовательность элементов из $L_{\varkappa}$ а $\{k_{\ell}\}_{\ell}$ возрастающая последовательность НЧ такие, что $\forall \ell m (k_{\ell} < m \supset$ $\supset \|\{{}^{k_{\ell}}F_{n}\}_{n} - \{{}^{m}F_{n}\}_{m}\|_{L_{\varkappa}} < \frac{1}{2^{\ell}})$. Тогда $\{{}^{k_{n+2}}F_{k_{n+2}}\}_{n} \in L_{\varkappa}$ и $\forall \ell m (k_{\ell+3} < m \supset \|\{{}^{m}F_{n}\}_{n} - \{{}^{k_{n+2}}F_{k_{n+2}}\}_{n}\|_{L_{\varkappa}} < \frac{1}{2^{\ell}})$.

2) Пусть $\{\{{}^{m}F_{n}\}_{n}\}_{m}$ последовательность элементов из S а $\{k_{\ell}\}_{\ell}$ возрастающая последовательность НЧ такие, что

$\forall \ell m (k_{\ell} < m \supset \wp_{S}(\{{}^{k_{\ell}}F_{n}\}_{n} \square \{{}^{m}F_{n}\}_{n}) < \frac{1}{2^{\ell}})$. Тогда $\{{}^{k_{n+2}}F_{k_{n+2}}\}_{n} \in S$ и $\forall \ell m (k_{\ell+3} < m \supset \wp_{S}(\{{}^{m}F_{n}\}_{n} \square \{{}^{k_{n+2}}F_{k_{n+2}}\}_{n}) < \frac{1}{2^{\ell}})$.

На случай последовательностей ступенчатых остовов из L_{1} (соотв. из S) можно перенести результаты 3) и 4) из [5] и 4а) из [6] (соотв. теоремы 5 и 6 из [6]). Действительно, для всяких 1-полигонального остова ${}^{\{1\}}G_{1}$ (см.[5]), ступенчатого остова F и НЧ m можно построить ступенчатый остов H и 1-полигональный остов ${}^{\{1\}}G_{2}$ такие, что выполнено $\forall x (x \in 0 \triangle 1 \& !\vartheta(Hx) \supset$

$\supset |\widetilde{\mathfrak{Q}}_{\{1\}_{G_1}}(x) - \widetilde{\vartheta}_{H}(x)| < \frac{1}{2^{n}}) \& \forall k x z (1 \leq k \leq m \supset$

$\supset (a_{k-1} + 2^{-n-m-1} \cdot (a_{k} - a_{k-1}) < x < a_{k} - 2^{-n-m-1}(a_{k} - a_{k-1}) \supset$

$\supset \widetilde{\vartheta}_{F}(x) = \widetilde{\mathfrak{Q}}_{\{1\}_{G_2}}(x)) \& (z \int_{a_{k-1} \triangle a_{k}} |\widetilde{\vartheta}_{F} - \widetilde{\mathfrak{Q}}_{\{1\}_{G_2}}| \supset z < \frac{1}{m \cdot 2^{n}}))$

и, следовательно, $\forall x (x \in 0 \triangle 1 \supset |\widetilde{\mathfrak{Y}}_{\{1\}_{G_1}}(x) - \widetilde{\mathfrak{C}}_{H}(x)| < \frac{1}{2^{n}} \&$

$|\widetilde{\mathscr{E}}_F(x) - \widetilde{\mathfrak{I}}_{\{1\}G_2}(x)| < \frac{1}{2^n}$). Заметим, что для ${}^{\{1\}}G_1$ и КДЧ z, для которых выполнено $z \int\limits_{0\Delta 1} |\widetilde{\mathfrak{A}}_{\{1\}G_1}|$, имеет место $z \le \int\limits_{0\Delta 1} M_0({}^{\{1\}}G_1) \le 2z$. Таким образом: 1) для всякой последовательности $\{F_n\}_n \in L_1$ (соотв. $\{F_n\}_n \in S$) можно построить последовательность 1-полигональных остовов $\{{}^{\{1\}}G_n\}_n$ такую, что $\forall n x (x \in 0 \Delta 1 \supset |\widetilde{\mathscr{E}}_{F_{n+2}}(x) - \widetilde{\mathfrak{I}}_{\{1\}G_n}(x)| < \frac{1}{2^n}) \,\&\, \forall n (\int\limits_{0\Delta 1} M_0({}^{\{1\}}G_n \mp {}^{\{1\}}G_{n+1}) < \frac{1}{2^n})$ (соотв. $\forall n z (z \int\limits_{0\Delta 1} \omega(\widetilde{\mathfrak{A}}_{\{1\}G_n} - \widetilde{\mathfrak{A}}_{\{1\}G_{n+1}}) \supset z < \frac{1}{2^n})$) и для почти всех КДЧ x из $0 \Delta 1$ последовательность КДЧ $\{\widetilde{\vartheta}_{F_{n+2}}(x) - \widetilde{\mathfrak{A}}_{\{1\}G_n}(x)\}_n$ определена и сходится к нулю, и

2) для всякой последовательности 1-полигональных остовов $\{{}^{\{1\}}G_n\}_n$ такой, что $\forall n (\int\limits_{0\Delta 1} M_0({}^{\{1\}}G_n \mp {}^{\{1\}}G_{n+1}) < \frac{1}{2^n})$ (соотв. $\forall n z (z \int\limits_{0\Delta 1} \omega(\widetilde{\mathfrak{A}}_{\{1\}G_n} - \widetilde{\mathfrak{A}}_{\{1\}G_{n+1}}) \supset z < \frac{1}{2^n})$), можно построить последовательность ступенчатых остовов $\{F_n\}_n$, для которой имеет место $\{F_n\}_n \in L_1$ (соотв. $\{F_n\}_n \in S$), выполнено $\forall n x (x \in 0 \Delta 1 \,\&\, !\vartheta(F_n x) \supset |\widetilde{\mathfrak{A}}_{\{1\}G_{n+2}}(x) - \widetilde{\vartheta}_{F_n}(x)| < \frac{1}{2^n})$ и, следовательно,

$\forall n x (x \in 0 \Delta 1 \supset |\widetilde{\mathfrak{I}}_{\{1\}G_{n+2}}(x) - \widetilde{\mathscr{E}}_{F_n}(x)| < \frac{1}{2^n})$.

Таким образом можно считать доказанными следующие утверждения:

<u>Теорема 2</u>. 1) Функция f является абсолютно непрерывной на сегменте $0 \Delta 1$ тогда и только тогда, когда

существует $\{F_n\}_n \in L_1$ так, что выполнено

(2) $$\forall x(0 \leq x \leq 1 \supset f(x) - f(0) = \int_0^x \{F_n\}_n),$$

т.е. что f является неопределенным интегралом от $\{F_n\}_n$.

2) Пусть f функция а $\{F_n\}_n \in L_1$ такие, что (2). Тогда для почти всех КДЧ x из $0 \Delta 1$ последовательность КДЧ $\{\vartheta(F_n x)\}_n$ определена и сходится и ее предел является значением производной от f в точке x.

<u>Теорема 3</u>. Пусть $\{F_n\}_n \in S$. Тогда для почти всех КДЧ x из сегмента $0 \Delta 1$ имеет место

$\forall n(!\vartheta(F_n x))$ и последовательность КДЧ $\{\vartheta(F_n x)\}_n$ сходится. Для всякого НЧ m можно построить равномерно непрерывную функцию g_m и ${}^{(1)}S_\sigma$-множество H^m меры меньшей чем $\frac{1}{m+1}$ такие, что для всякого КДЧ x из $0 \Delta 1$ не принадлежащего множеству H^m, последовательность КДЧ $\{\vartheta(F_n x)\}_n$ сходится к $g_m(x)$.

<u>Теорема 4</u>. Пусть $\{g_m\}_m$ - последовательность равномерно непрерывных функций такая, что для всякого НЧ m существует ${}^{(1)}S_\sigma$-множество H^m, меры меньшей чем $\frac{1}{m+1}$, и выполнено $\forall x k(x \in 0 \Delta 1 \,\&\, \neg(x \in H^m) \supset$

$\supset g_m(x) = g_{m+k}(x))$. Тогда существует $\{F_n\}_n \in S$ так, что для почти всех КДЧ x из $0 \Delta 1$ имеет место $\forall n(!\vartheta(F_n x))$ и последовательности КДЧ $\{\vartheta(F_n x)\}_n$ и $\{g_m(x)\}_m$ сходятся к общему пределу.

Теорема 5. Для функции f имеет место $L_1(f)$ (соотв. $\mathcal{N}_1(f)$) (определения см. в [5] и [6]) тогда и только тогда, когда существует $\{F_n\}_n \in L_1$ (соотв. $\{F_n\}_n \in S$) так, что для почти всех КДЧ x из $0 \Delta 1$ последовательность КДЧ $\{\vartheta(F_n x)\}_n$ определена и сходится к $f(x)$.

Доказательство. 1) Если $L_1(f)$ (соотв. $\mathcal{N}_1(f)$), то на основании определения и наших рассуждений, предшествующих теореме 2, знаем, что существует последовательность ступенчатых остовов $\{F_n\}_n$ с требуемыми свойствами.

2) В случае L_1 достаточно использовать упомянутые в 1) рассуждения и применить теорему 2 из [6] а в случае $\mathcal{N}_1$ еще теорему 3 из [6] и аналогичные ей результаты из части 4 леммы 1.

Теорема 6. Абсолютно непрерывная на сегменте $0 \Delta 1$ функция f является постоянной на $0 \Delta 1$ тогда и только тогда, когда f имеет почти всюду на $0 \Delta 1$ производную равную нулю.

Доказательство. Пусть f абсолютно непрерывная на сегменте $0 \Delta 1$ функция, которая имеет почти всюду на $0 \Delta 1$ производную равную нулю. На основании 3 и 4 из [5] и теоремы 1 из [6] и ее следствий знаем, что существует последовательность 1-полигональных остовов $\{{}^{(1)}T_k\}_k$ такая, что а) $\forall k \left(\int_{0\Delta 1} M_0({}^{(1)}T_k - {}^{(1)}T_{k+1}) < \frac{1}{2^k}\right)$,

б) функция $f - f(0)$ является пределом последовательности функций $\{\widetilde{\mathcal{J}}_{{}^{(1)}T_k}\}_k$, где для всякого НЧ k – $\widetilde{\mathcal{J}}_{{}^{(1)}T_k}$ является первообразной функцией для полигональной функции $\widetilde{\mathfrak{D}}_{\{1\}T_k}$ и

в) для почти всех КДЧ x из сегмента $0 \Delta 1$ сходится последовательность КДЧ $\{\widetilde{\mathfrak{D}}_{\{1\}T_k}(x)\}_k$ и ее предел является значением производной от f в точке x и, следовательно, для почти всех x из $0 \Delta 1$ последовательность $\{\widetilde{\mathfrak{D}}_{\{1\}T_k}(x)\}_k$ сходится к нулю.

Заметим, что для любых 1-полигонального остова $^{\{1\}}F$ и КДЧ z таких, что $z \int_{0\Delta 1} |\widetilde{\mathfrak{D}}_{\{1\}F}|$, выполнено $z \leq \leq \int_{0\Delta 1} M_0(^{\{1\}}F) \leq 2z$. Ввиду этого, а) и в) получаем на основании теоремы 2 из [6], что для всякого КДЧ x из $0 \Delta 1$ последовательность КДЧ $\{\widetilde{\mathfrak{I}}_{\{1\}T_k}(x)\}_k$ сходится к нулю. Из этого ввиду б) следует $\forall x (x \in 0\Delta 1 \supset f(x) = f(0))$.

<u>Следствие</u>. Пусть $\varkappa$ РЧ, $1 \leq \varkappa$, $\{F_n\}_n \in L_\varkappa$, $\{H_n\}_n \in \in L_1$, $\{^1G_n\}_n \in S$ и $\{^2G_n\}_n \in S$ а y, z КДЧ такие, что $0 \leq y < z \leq 1$. Тогда

1) если для почти всех КДЧ x из интервала $y \nabla z$ предел последовательности КДЧ $\{\vartheta(H_n x)\}_n$ неотрицателен, то $\int_y^z \{H_n\}_n \geq 0$.

2) $\|\{F_n\}_n\|_{L_\varkappa} = 0 \equiv \{F_n\}_n = 0$ и

3) $\rho_S(\{^1G_n\}_n \,\square\, \{^2G_n\}_n) = 0 \equiv \{^1G_n\}_n = \{^2G_n\}_n$.

<u>Доказательство</u>. 1) Ввиду непрерывности неопределенного интеграла от $\{H_n\}_n$ достаточно доказать, что для

любых РЧ a и b таких, что $y < a < b < x$, выполнено $0 \le \int_a^b \{H_n\}_n$.

Пусть $y < a < b < x$, где a и b РЧ. Построим последовательность ступенчатых остовов $\{H_n^*\}_n$ такую, что $\forall n x (x \in 0 \Delta 1 \supset ((x < a \vee b < x) \supset \vartheta(H_n^* x) \simeq$
$\simeq \vartheta(H_n x)) \,\&\, (a < x < b \supset \vartheta(H_n^* x) \simeq \vartheta(H_n^+ x)))$.

Тогда для всякого НЧ n имеем ${}^{\circ}\!\int_0^1 |H_n^* \mathbin{\dot{-}} H_{n+1}^*|_0 = {}^{\circ}\!\int_0^a |H_n \mathbin{\dot{-}} H_{n+1}|_0 +$
$+ {}^{\circ}\!\int_a^b |H_n^+ \mathbin{\dot{-}} H_{n+1}^+|_0 + {}^{\circ}\!\int_b^1 |H_n \mathbin{\dot{-}} H_{n+1}|_0 \le {}^{\circ}\!\int_0^1 |H_n \mathbin{\dot{-}} H_{n+1}|_0 < \frac{1}{2^n}$
и ${}^{\circ}\!\int_a^b H_n^* = {}^{\circ}\!\int_a^b H_n^+ \ge 0$.

Следовательно, $\{H_n^*\}_n \in L_1 \,\&\, \int_a^b \{H_n^*\}_n = \int_a^b \{H_n^+\}_n \ge 0$ и ввиду предполагаемых свойств последовательности $\{H_n\}_n$ выполнено $\{H_n^*\}_n = \{H_n\}_n$. Но тогда на основании теоремы 6 имеем $\int_a^b \{H_n\}_n = \int_a^b \{H_n^*\}_n \ge 0$.

2) Имеем $\{F_n\}_n \in L_1 \,\&\, |\{F_n\}_n|^k \in L_1 \,\&\, (\{F_n\}_n = 0 \equiv |\{F_n\}_n|^k = 0)$. Последовательность КДЧ $\{{}^{\circ}\!\int_0^1 |F_n|_0^k\}_n$ очевидно сходится к

$\|\{F_n\}_n\|_{L_k}^k$ и к $\int_0^1 |\{F_n\}_n|^k$ (см. соотв.определения).
Видим, что достаточно доказать

(3) $$\int_0^1 |\{F_n\}_n|^k = 0 \equiv |\{F_n\}_n|^k = 0 \, .$$

Очевидно выполнено $0 \le |\{F_n\}_n|^k$ и по 1) получаем

$$\int_0^1 |\{F_n\}_n|^k = 0 \equiv \forall x (0 < x \le 1 \supset \int_0^x |\{F_n\}_n|^k = 0) \, .$$

Отсюда на основании теорем 2 и 6 следует требуемое (3).

3) Ввиду того, что имеет место $\rho_s(\{{}^1G_n\}_n \square \{{}^2G_n\}_n) =$
$= \|\{\omega_0({}^1G_{n+1} \mathbin{\dot{-}} {}^2G_{n+1})\}_n\|_{L_1} \,\&\, \{\omega_0({}^1G_{n+1} \mathbin{\dot{-}} {}^2G_{n+1})\}_n = 0 \equiv \{{}^1G_n\}_n = \{{}^2G_n\}_n$,

получаем на основании 2) сразу 3).

Из пунктов 2) и 3) этого следствия, лемм 1 и 2 непосредственно следует:

Теорема 7. Для всякого РЧ $\varkappa, 1 \leq \varkappa, (L_\varkappa, \| \ \|_{L_\varkappa})$ является полным сепарабельным нормированным пространством. (S, φ_S) является полным сепарабельным линейным метрическим пространством.

Лемма 3. Пусть $\{F_n\}_n \in S$ и $\{G_n\}_n \in L_1$ и пусть выполнено $|\{F_n\}_n| \leq \{G_n\}_n$. Тогда имеет место

$\{\lambda_0(F_{k_n+n+5}, k_n)\}_n \in L_1 \ \& \ \{\lambda_0(F_{k_n+n+5}, k_n)\}_n = \{F_n\}_n$,

где $\forall n \ (k_n = n + \max\limits_{1 \leq \ell \leq n+3} \tau(\sigma(G_\ell)))$.

Доказательство. Пусть m НЧ. Из предположений настоящей леммы следует на основании части 4а) леммы 1

$\{\lambda_0(F_{k_m+n+2}, k_m)\}_n \in L_1$. Выполнено

$|\{\lambda_0(F_{k_{m+1}+n+3}, k_{m+1})\}_n - \{\lambda_0(F_{k_m+n+2}, k_m)\}_n| \leq$

$\leq \{\lambda_0(G_n, k_{m+1})\}_n - \{\lambda_0(G_n, k_m)\}_n$.

Для всякого НЧ ℓ, $m + 3 < \ell$, имеем ${}^{\circ}\!\int_0^1 |\lambda_0(G_\ell, k_{m+1}) \dot{-}$

$\dot{-} \lambda_0(G_\ell, k_m)|_0 \leq {}^{\circ}\!\int_0^1 |\lambda_0(G_\ell, k_{m+1}) \dot{-} \lambda_0(G_{m+3}, k_{m+1})|_0 +$

$+ {}^{\circ}\!\int_0^1 |\lambda_0(G_{m+3}, k_{m+1}) \dot{-} \lambda_0(G_{m+3}, k_m)|_0 + {}^{\circ}\!\int_0^1 |\lambda_0(G_{m+3}, k_m) \dot{-}$

$\dot{-} \lambda_0(G_\ell, k_m)|_0 \leq 2 \cdot \int_0^1 |G_\ell \dot{-} G_{m+3}|_0 < \frac{1}{2^{m+1}}$.

Следовательно,

$${}^{\circ}\!\int_0^1 |\lambda_0(F_{k_{m+1}+m+6}, k_{m+1}) \dot{-} \lambda_0(F_{k_m+m+5}, k_m)|_0 <$$

$$< \int_0^1 |\{\lambda_0(F_{k_{m+1}+n+3}, k_{m+1})\}_n - \{\lambda_0(F_{k_m+n+2}, k_m)\}_n| + \frac{1}{2^{m+1}} \leq$$

$$\leq \int_0^1 (\{\lambda_0(G_n, k_{m+1})\}_n - \{\lambda_0(G_n, k_m)\}_n) + \frac{1}{2^{m+1}} \leq \frac{1}{2^{m+1}} + \frac{1}{2^{m+1}} = \frac{1}{2^m} .$$

<u>Лемма 4</u>. Пусть p РЧ, $1 < p$, а $\{F_n\}_n$ последовательность ступенчатых остовов, для которой выполнено $\{F_n\}_n \in S \& \{|F_n|_0^p\}_n \in L_1$. Тогда можно построить последовательность ступенчатых остовов $\{G_n\}_n$ так, что $\{G_n\}_n \in L_p \& \{G_n\}_n = \{F_n\}_n$.

<u>Доказательство</u>. Из $\{F_n\}_n \in S$ следует по части 4а) леммы 1 $\{F_n\}_n^+ \in S$, $\{F_n\}_n^- \in S$ и отсюда $|\{F_n\}_n^+|^p \in S \& |\{F_n\}_n^-|^p \in S$. Очевидно выполнено $0 \leq \{F_n\}_n^+ \leq \{|F_n|_0\}_n \& 0 \leq \{F_n\}_n^- \leq \{|F_n|_0\}_n$ и, следовательно, $0 \leq |\{F_n\}_n^+|^p \leq \{|F_n|_0^p\}_n \& 0 \leq |\{F_n\}_n^-|^p \leq \{|F_n|_0^p\}_n$. На основании леммы 3 знаем, что можно построить $\{^1H_n\}_n \in L_1$ и $\{^2H_n\}_n \in L_1$ так, что $\{^1H_n\}_n = |\{F_n\}_n^+|^p \& \{^2H_n\}_n = |\{F_n\}^-|^p$. Тогда имеем

$$\{^1H_n^+\}_n \in L_1 \& \{^2H_n^+\}_n \in L_1 \& \{^1H_n^+\}_n = \{^1H_n\}_n^+ = \{^1H_n\}_n =$$

$$= |\{F_n\}_n^+|^p = \{(F_n^+)_0^p\}_n \& \{^2H_n^+\}_n = \{^2H_n\}_n^+ = \{^2H_n\}_n =$$

$$= |\{F_n\}_n^-|^p = \{(F_n^-)_0^p\}_n .$$

Для всякого НЧ n определим $G_n \rightleftharpoons (^1H^+_{\tau(p)(n+2)})_0^{1/p} - (^2H^+_{\tau(p)(n+2)})_0^{1/p}$. Ввиду того, что $\forall x y (0 \leq x \& 0 \leq y \supset |x-y|^p \leq |x^p - y^p|)$ для любого НЧ n имеем

$$\left(\int_0^1 |G_n \mathbin{\dot-} G_{n+1}|^p\right)_0^{1/p} \leq \left(\int_0^1 |(^1H^+_{\tau(p)(n+2)})_0^{1/p} \mathbin{\dot-}\right.$$

$$\left.\mathbin{\dot-} (^1H^+_{\tau(p)(n+3)})_0^{1/p}|_0^p\right)^{1/p} + \left(\int_0^1 |(^2H^+_{\tau(p)(n+2)})_0^{1/p} \mathbin{\dot-}\right.$$

$$\underset{\circ}{-}\ ({}^2H^+_{\tau(p)(n+3)}\,)_0^{1/p}|^p)^{1/p} \le (\overset{\circ}{\int_0^1} |{}^1H^+_{\tau(p)(n+2)} -$$

$$- {}^1H^+_{\tau(p)(n+3)}\,|_0)^{1/p} + (\overset{\circ}{\int_0^1} |{}^2H^+_{\tau(p)(n+2)}\ \underset{\circ}{-}$$

$$\underset{\circ}{-}\ {}^2H^+_{\tau(p)(n+3)}|_0)^{1/p} < \frac{2}{2^{\tau(p)(n+1)\cdot\frac{1}{p}}} \le \frac{1}{2^n} \ .$$

Очевидно выполнено $\{G_n\}_n = \{F_n\}_n$.

В конструктивной математике неверны теорема Лебега и лемма Фату (см.[4]).

<u>Пример 1</u>. Можно построить последовательности ступенчатых остовов $\{F_n\}_n$, $\{G_n\}_n$ и $\{H_n\}_n$ такие, что

1) а) $\{F_n\}_n \in L_1 \,\&\, \int_0^1 \{F_n\}_n > \frac{7}{8}$,

б) $\forall m\,(0 \le G_m \le F_m \le 0 \gamma 1 \sigma 1 \,\&\, |\overset{\circ}{\int_0^1} G_m - \frac{1}{4}| < \frac{1}{2^m})$ и

в) для почти всех КДЧ x из $0 \Delta 1$ последовательность КДЧ $\{\vartheta(G_m x)\}_m$ сходится и выполнено $\{F_n\}_n = \{G_n\}_n$ и

2) а) $\forall m\,(0 \le H_m \le 0 \gamma 1 \sigma 1 \,\&\, |\overset{\circ}{\int_0^1} H_m - \frac{1}{4}| < \frac{1}{2^m})$,

б) для почти всех КДЧ x из $0 \Delta 1$ сходится последовательность КДЧ $\{\vartheta(H_m x)\}_m$ и

в) не существует $\{K_m\}_m \in L_1$ такое, что $\{H_n\}_n = \{K_n\}_n$.

Пусть Φ точное дизъюнктное сегментное покрытие сегмента $0 \Delta 1$ такое, что $\forall m \left(\sum_{i=1}^{m} |\Phi_i| < \frac{1}{4}\right)$. Тогда ряд $\sum_{k} |\Phi_k|$ не сходится и существует возрастающая последовательность НЧ $\{\lambda_n\}_n$ такая, что $\forall n i \left(0 \le i \le 2^{n+1} \supset \exists j \left(1 \le j \le \lambda_n \& \frac{i}{2^{n+1}} \in \Phi_j\right)\right)$ (см.[2], стр.461-73).

Для всякого НЧ n построим систему неперекрывающихся сегментов $\{b_{n,j} \Delta c_{n,j}\}_{j=1}^{\ell_n}$ так, что для всяких НЧ i и j, $1 \le i \le \lambda_n \& 1 \le j \le \ell_n$, сегменты Φ_i и $b_{n,j} \Delta c_{n,j}$ не перекрываются и что объединением всех $(\lambda_n + \ell_n)$ сегментов систем $\{\Phi_i\}_{i=1}^{\lambda_n}$ и $\{b_{n,j} \Delta c_{n,j}\}_{j=1}^{\ell_n}$ является сегмент $0 \Delta 1$. Имеем $\sum_{j=1}^{\ell_n} |b_{n,j} \Delta c_{n,j}| = 1 - \sum_{i=1}^{\lambda_n} |\Phi_i| > \frac{3}{4}$ & $\& \forall j \left(1 \le j \le \ell_n \supset |b_{n,j} \Delta c_{n,j}| < \frac{1}{2^n}\right) \& \forall m \left(\lambda_n < m \supset |\Phi_m| < \frac{1}{2^n}\right)$.

Далее найдем НЧ ${}^1\ell_n$ и ${}^2\ell_n$ так, что $1 \le {}^1\ell_n \le \ell_n$ & $\& 1 \le {}^2\ell_n \le \ell_n$, $\sum_{i=1}^{\lambda_n} \left(1 - \frac{1}{2^i}\right) |\Phi_i| + \sum_{j=1}^{{}^1\ell_n - 1} |b_{n,j} \Delta c_{n,j}| \le$

$\le \frac{1}{4} < \sum_{i=1}^{\lambda_n} \left(1 - \frac{1}{2^i}\right) |\Phi_i| + \sum_{j=1}^{{}^1\ell_n} |b_{n,j} \Delta c_{n,j}|$ и

$\sum_{i=1}^{\lambda_n} \frac{1}{2} \cdot |\Phi_i| + \sum_{j=1}^{{}^2\ell_n - 1} |b_{n,j} \Delta c_{n,j}| \le \frac{1}{4} < \sum_{i=1}^{\lambda_n} \frac{1}{2} \cdot |\Phi_i| + \sum_{j=1}^{{}^2\ell_n} |b_{n,j} \Delta c_{n,j}|$.

Построим последовательности ступенчатых остовов $\{F_n\}_n$, $\{G_n\}_n$ и $\{H_n\}_n$ так, что выполнено

$\forall n x \Big(x \in 0 \Delta 1 \supset \Big(\vartheta(F_n x) \simeq 1 \equiv \Big(\exists j \Big(1 \le j \le \lambda_n \& \partial_\lambda(\Phi_j) +$

$+ \frac{1}{2^{j+1}} |\Phi_j| < x < \partial_n(\Phi_j) - \frac{1}{2^{j+1}} \cdot |\Phi_j|\Big) \vee \exists i \big(1 \le i \le \ell_n \&$

$\& b_{n,i} < x < c_{n,i}\big)\Big)\Big) \& \Big(\vartheta(F_n x) \simeq 0 \equiv \exists j \big(1 \le j \le \lambda_n \&$

$\& (\partial_\lambda(\Phi_j) < x < \partial_\lambda(\Phi_j) + \frac{1}{2^{j+1}} \cdot |\Phi_j| \vee \partial_n(\Phi_j) - \frac{1}{2^{j+1}} \cdot$

$\cdot|\Phi_j| < x < \mathfrak{Э}_n(\Phi_j))))),\ \forall n x\,(x \in 0\Delta 1 \supset (\vartheta(G_n x) \simeq 1 \equiv$

$\equiv (\exists j\,(1 \le j \le \lambda_n \,\&\, \mathfrak{Э}_\lambda(\Phi_j) + \frac{1}{2^{j+1}}\cdot|\Phi_j| < x < \mathfrak{Э}_n(\Phi_j) -$

$- \frac{1}{2^{j+1}}\cdot|\Phi_j|) \vee \exists i\,(1 \le i \le {}^1\ell_n \,\&\, \ell r_{n,i} < x < c_{n,i}))) \,\&$

$\&\, (\vartheta(G_n x) \simeq 0 \equiv (\exists j\,(1 \le j \le \lambda_n \,\&\, (\mathfrak{Э}_\lambda(\Phi_j) < x <$

$< \mathfrak{Э}_\lambda(\Phi_j) + \frac{1}{2^{j+1}}\cdot|\Phi_j| \vee \mathfrak{Э}_n(\Phi_j) - \frac{1}{2^{j+1}}\cdot|\Phi_j| < x < \mathfrak{Э}_n(\Phi_j))) \vee$

$\vee \exists i\,({}^1\ell_n + 1 \le i \le \ell_n \,\&\, \ell r_{n,i} < x < c_{n,i}))))$ и

$\forall n x\,(x \in 0\Delta 1 \supset (\vartheta(H_n x) \simeq 1 \equiv (\exists j\,(1 \le j \le \lambda_n \,\&\, \mathfrak{Э}_\lambda(\Phi_j) +$

$+ \frac{1}{4}\cdot|\Phi_j| < x < \mathfrak{Э}_n(\Phi_j) - \frac{1}{4}\cdot|\Phi_j|) \vee \exists i\,(1 \le i \le {}^2\ell_n \,\&\, \ell r_{n,i} < x <$

$< c_{n,i}))) \,\&\, (\vartheta(H_n x) \simeq 0 \equiv (\exists j\,(1 \le j \le \lambda_n \,\&\, (\mathfrak{Э}_\lambda(\Phi_j) < x < \mathfrak{Э}_\lambda(\Phi_j) +$

$+ \frac{1}{4}\cdot|\Phi_j| \vee \mathfrak{Э}_n(\Phi_j) - \frac{1}{4}\cdot|\Phi_j| < x < \mathfrak{Э}_n(\Phi_j))) \vee \exists i\,({}^2\ell_n + 1 \le i \le \ell_n \,\&$

$\&\, \ell r_{n,i} < x < c_{n,i}))))$.

Тогда очевидно имеет место 1б) и 2а) и для всякого НЧ n выполнено $\int_0^1 F_n = 1 - \sum_{j=1}^{\lambda_n} \frac{1}{2^j}\cdot|\Phi_j| > \frac{7}{8} + \frac{1}{2^2}\cdot|\Phi_j| \,\&\, \int_0^1 |F_n \dot{-}$

$\dot{-} F_{n+1}|_0 = \sum_{j=\lambda_n+1}^{\lambda_{n+1}} \frac{1}{2^j}\cdot|\Phi_j| < \frac{1}{2^{\lambda_n}} \le \frac{1}{2^n} \,\&\, \forall j x\,(1 \le j \le \lambda_n \,\&$

$\&\, x \in \Phi_j \supset \vartheta(F_{n+1} x) \simeq \vartheta(F_n x) \simeq \vartheta(G_n x) \simeq$

$\simeq \vartheta(G_{n+1} x))$.

Следовательно, получаем 1а) и 1в).

Далее имеет место $\forall n j x\,(1 \le j \le \lambda_n \supset$

$\supset ((\mathfrak{Э}_\lambda(\Phi_j) < x < \mathfrak{Э}_\lambda(\Phi_j) + \frac{1}{4}\cdot|\Phi_j| \vee \mathfrak{Э}_n(\Phi_j) - \frac{1}{4}\cdot|\Phi_j| < x <$

$< \text{Э}_{п}(\Phi_j)) \supset \vartheta(H_{n+1}x) = \vartheta(H_n x) = 0)\,\&$

$\&(\text{Э}_{л}(\Phi_j) + \frac{1}{4}\cdot|\Phi_j| < x < \text{Э}_{п}(\Phi_j) - \frac{1}{4}\cdot|\Phi_j| \supset \vartheta(H_{n+1}x) =$

$= \vartheta(H_n x) = 1)))$

и, следовательно, имеет место 2б).

Предположим, что имеем $\{K_n\}_n \in L_1$ такое, что $\{K_n\}_n = \{H_n\}_n$. Тогда по теоремам 1 и 2 существует абсолютно непрерывная функция f, являющаяся неопределенным интегралом от $\{K_n\}_n$; для почти всех КДЧ x из $0\Delta 1$ последовательность КДЧ $\{\vartheta(K_n x)\}_n$ сходится и ее предел является значением производной от f в точке x.

Пусть m натуральное число. Для любого НЧ n построим ступенчатый остов ${}^1K_n$ такой, что $\forall x(x \in 0\Delta 1 \supset$
$\supset (x \in \Phi_m \supset \vartheta({}^1K_n x) \simeq \vartheta(H_m x))\,\&$

$\&((x < \text{Э}_{л}(\Phi_m) \vee \text{Э}_{п}(\Phi_m) < x) \supset \vartheta({}^1K_n x) \simeq \vartheta(K_n x)))$

и, следовательно, $\forall x(x \in \Phi_m \supset \mathcal{C}({}^1K_n x) - \mathcal{C}({}^1K_n\, \text{Э}_{л}(\Phi_m)) =$
$= \mathcal{C}(H_m x) - \mathcal{C}(H_m\, \text{Э}_{л}(\Phi_m)))$.

Тогда очевидно $\forall n(\int_0^{\circ 1}|{}^1K_n \dot{-} {}^1K_{n+1}|_0 \leq \int_0^{\circ 1}|K_n \dot{-} K_{n+1}|_0 < \frac{1}{2^n})$, т.е. $\{{}^1K_n\}_n \in L_1$, и выполнено $\{{}^1K_n\}_n = \{K_n\}_n = \{H_n\}_n$. На основании аддитивности интеграла и теорем 1 и 6 функция f является тоже неопределенным интегралом от $\{{}^1K_n\}_n$, т.е. на сегменте $0\Delta 1$ функция $f - f(0)$ является пределом последовательности функций $\{\tilde{\mathcal{C}}_{{}^1K_n}\}_n$. Но тогда
$\forall x(x \in \Phi_m \supset f(x) - f(\text{Э}_{л}(\Phi_m)) = \tilde{\mathcal{C}}_{H_m}(x) - \tilde{\mathcal{C}}_{H_m}(\text{Э}_{л}(\Phi_m)))$.

Таким образом имеем

$$\forall m x ((\mathfrak{Э}_\lambda(\Phi_m) < x < \mathfrak{Э}_\lambda(\Phi_m) + \frac{1}{4}\cdot|\Phi_m| \supset f(x) =$$
$$= f(\mathfrak{Э}_\lambda(\Phi_m))) \& (\mathfrak{Э}_\lambda(\Phi_m) + \frac{1}{4}\cdot|\Phi_m| < x < \mathfrak{Э}_n(\Phi_m) - \frac{1}{4}\cdot$$
(4) $$\cdot|\Phi_m| \supset f(x) = f(\mathfrak{Э}_\lambda(\Phi_m) + \frac{1}{4}\cdot|\Phi_m|) + (x - \mathfrak{Э}_\lambda(\Phi_m) - \frac{1}{4}\cdot$$
$$\cdot|\Phi_m|)) \& (\mathfrak{Э}_n(\Phi_m) - \frac{1}{4}\cdot|\Phi_m| < x < \mathfrak{Э}_n(\Phi_m) \supset$$
$$\supset f(x) = f(\mathfrak{Э}_n(\Phi_m)))) .$$

Пусть h. НЧ. Тогда функция $f - \tilde{\mathscr{E}}_{K_{h+3}}$ является неопределенным интегралом от $\{K_n\}_n - K_{h+3}$ и, следовательно, по теореме 1 вариацией функции $f - \tilde{\mathscr{E}}_{K_{h+3}}$ на $0 \vartriangle 1$ является $\int_0^1 |\{K_n\}_n - K_{h+3}| < \frac{1}{2^{h+2}}$. Существует НЧ m_h такое, что для любого НЧ m, $m_h \le m$, функция $\tilde{\mathscr{E}}_{K_{h+3}}$ линейна на сегменте Φ_m и, следовательно, ввиду (4) имеем

$$|(f(\mathfrak{Э}_\lambda(\Phi_m) + \frac{1}{4}\cdot|\Phi_m|) - \tilde{\mathscr{E}}_{K_{h+3}}(\mathfrak{Э}_\lambda(\Phi_m) + \frac{1}{4}\cdot|\Phi_m|)) -$$
$$-(f(\mathfrak{Э}_\lambda(\Phi_m)) - \tilde{\mathscr{E}}_{K_{h+3}}(\mathfrak{Э}_\lambda(\Phi_m)))| + |(f(\mathfrak{Э}_n(\Phi_m) - \frac{1}{4}\cdot|\Phi_m|) -$$
$$-\tilde{\mathscr{E}}_{K_{h+3}}(\mathfrak{Э}_n(\Phi_m) - \frac{1}{4}\cdot|\Phi_m|)) - (f(\mathfrak{Э}_\lambda(\Phi_m) + \frac{1}{4}\cdot|\Phi_m|) - \tilde{\mathscr{E}}_{K_{h+3}}(\mathfrak{Э}_\lambda(\Phi_m) +$$
$$+\frac{1}{4}\cdot|\Phi_m|))| + |(f(\mathfrak{Э}_n(\Phi_m)) - \tilde{\mathscr{E}}_{K_{h+3}}(\mathfrak{Э}_n(\Phi_m))) - (f(\mathfrak{Э}_n(\Phi_m) - \frac{1}{4}\cdot|\Phi_m|) -$$
$$-\tilde{\mathscr{E}}_{K_{h+3}}(\mathfrak{Э}_n(\Phi_m) - \frac{1}{4}\cdot|\Phi_m|))| = |y|\cdot\frac{1}{4}\cdot|\Phi_m| + |1-y|\cdot\frac{1}{2}|\Phi_m| +$$
$$+|y|\cdot\frac{1}{4}\cdot|\Phi_m| \ge \frac{1}{2}\cdot|\Phi_m| ,$$

где y КДЧ такое, что

$$\forall x (x \in \Phi_m \supset \tilde{\mathscr{E}}_{K_{h+3}}(x) = \tilde{\mathscr{E}}_{K_{h+3}}(\mathfrak{Э}_\lambda(\Phi_m)) + y\cdot(x - \mathfrak{Э}_\lambda(\Phi_m))) .$$

Таким образом $\forall \ell (\sum_{m=m_h}^{m_h+\ell} |\Phi_m| < \frac{1}{2^h})$.

Как видим, из предположения, что существует $\{K_m\}_m \in L_1$ так, что выполнено $\{K_m\}_m = \{H_m\}_m$, следует сходимость ряда $\sum_m |\phi_m|$. Этот ряд, как знаем, не сходится и, следовательно, 2в) доказано.

Литература

[1] А. МАРКОВ: Теория алгорифмов, Труды Мат.инст.им.В.А.Стеклова, том XLII (1954).

[2] - Проблемы конструктивного направления в математике, 2 (сборник работ), Труды Мат.инст.им.В.А.Стеклова, том LXVII (1962).

[3] - Труды Третьего всесоюзного съезда, том 1, Москва, 1956.

[4] Ф. РИСС, Б.С. НАДЬ: Лекции по функциональному анализу, Москва, 1954.

[5] О. ДЕМУТ: Интеграл Лебега в конструктивном анализе, Записки научных семинаров Ленинградского отд.Мат.инст.им.В.А.Стеклова, том 4(1967), стр.30-43.

[6] О. ДЕМУТ: Интеграл Лебега и понятие измеримости функций в конструктивном анализе, там же, том 8(1968), стр.21-8.

(Received April 15,1969)