Norbert M. Flaisher

Об одной нелинейной задаче для уравнения теплопроводности

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, Vol. 10 (1969), No. 3, 353--355

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/105239`

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae

10, 3 (1969)

ОБ ОДНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Н.М. ФЛАЙШЕР, Москва

Ниже рассмотрена задача с нелинейным начальным условием для уравнения $T[u] \equiv u_{xx} - u_t = 0$.

Вещественные функции f, g заданы на R^1, $\mathfrak{M}_g$ - множество всех точек непрерывности $g(x)$, $\mathcal{f} = a + bf$ ($a, b \in R^1$ - постоянные; $f \in C(R^1)$) - оператор суперпозиции [1] : $\mathcal{f}\varphi \equiv a\varphi + bf(\varphi)$ (φ измерима), $Y(t)$ - единичная функция, $X(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} Y(t) exp(-\frac{x^2}{4t})$,

$R'^2 = R^2 \setminus (0,0)$, $R^2_\varepsilon = \{(x,t) | t > \varepsilon\}$, $R^2_+ = R^2_0$, G_β - класс Жеврея [2], $\mathfrak{A}(R^2_+)$ - класс ограниченных при $t \to \infty$ и при $x \to \pm\infty$ функций $u(x,t)$ экспоненциального типа в R^2_+ [3], $\mathcal{L}(R^1)$ - класс локально-суммируемых функций, $*$ - свертка (по x) в R^1.

Задача (f, g). Найти функцию $(x,t) \in \mathfrak{A}(R^2_+) \cap \cap C^{2,1}_{x,t}(R^2_+) \cap C(R^2_+ \cup \mathfrak{M}_g)$, удовлетворяющую уравнению $T[u] = 0$ в R^2_+, а для всех $x \in \mathfrak{M}_g$ - начальному условию

(1) $$\mathcal{f}u|_{t=0} = g(x) .$$

<u>Теорема</u>. Если $f \in C^2(R^1)$, f' и f'' знакопостоянны в R^1, $sign\, f' = sign(a\, b)$, и $g \in \mathcal{L}(R^1)$, $g(\pm\infty) < \infty$, то задача (f, g) имеет единственное ре-

шение

$$(2) \qquad u(x,t) = I(x,t;f,g) = X(x,t) * \mathcal{G}(x;f,g)$$

где $\mathcal{G}(x;f,g) = \underset{\xi}{ext}\, \frac{b[\xi f'(\xi) - f(\xi)] + g(x)}{a + b f'(\xi)}$, $x \in \mathfrak{M}_g$, а ext означает $min\ (max)$ для $af'' > 0\ (< 0)$ (если $x_0 \bar{\in} \mathfrak{M}_g$, но $g(x_0 - 0)$ определено, то полагаем $\mathcal{G}(x_0 - 0; f, g) = \underset{\xi}{ext}\, \frac{b[\xi f'(\xi) - f(\xi)] + g(x_0 - 0)}{a + b f'(\xi)}$; смысл $\mathcal{G}(x_0 + 0; f, g)$ аналогичен.

<u>Доказательство</u>. Пусть $a > 0$, $f'' > 0$. При любом $\varepsilon > 0$ $I(x,t;f,g) \in G_1(\bar{R}^2_\varepsilon) \cap G_2(R'^2)$ (на всей оси $t = 0$ аналитичности нет) [2], а в R^2_+ $T[I(x,t;f,g)] = 0$. Равносильное условию (1) соотношение $au(x,0) + b \underset{\xi}{max}[f(\xi) + f'(\xi)(u(x,0) - \xi)] = g(x), x \in \mathfrak{M}_g$, выполнено при $u(x,0) = \mathcal{G}(x; f, g)$ [4], значит, $I(x, t; f, g)$ удовлетворяет условию (1).

Если $\mathfrak{M}_g = R^1$, а $u_1(x,t), u_2(x,t)$ удовлетворяют уравнению $T[u] = 0$ и условию (1), то, в силу $f' > 0, u_1(x,0) = u_2(x,0)$, значит $u_1 \equiv u_2$ всюду в R^2_+. Если же $\mathfrak{M}_g \subset R^1$, то вводим ограниченную при $x \longrightarrow \pm\infty$ функцию $g(x;t_0) = \mathcal{F} I(x,t_0;f,g(x)) \in C(R^1)$, $t_0 > 0$. Задача $T[u] = 0, (x,t) \in R^2_{t_0}$, $\mathcal{F} u|_{t=t_0} = g(x;t_0)$, $x \in R^1$, имеет в классе $\mathfrak{A}(R^2_{t_0}) \cap C^{2,1}_{x,t}(R^2_{t_0}) \cap C(\bar{R}^2_{t_0})$ единственное решение

(3) $$u(x,t;t_0) = I(x, t-t_0; f, g(x;t_0)) \quad .$$

Но почти всюду (для всех $x \in \mathfrak{M}_g$) $\lim\limits_{t_0 \to 0} g(x;t_0) = g(x) \in \mathcal{L}(R^1)$ [5], значит, в (3) возможен подынтегральный переход к пределу при $t_0 \longrightarrow 0$, следовательно, решение (2) единственно.

В остальных случаях доказательство аналогично.

Литература

[1] М.А. КРАСНОСЕЛЬСКИЙ, П.П. ЗАБРЕЙКО, Е.И. ПУСТЫЛЬНИК, П.Е. СОБОЛЕВСКИЙ: Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций, М.,"Наука", 1966.

[2] Г.Е. ШИЛОВ: Локальные свойства решений дифференциальных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами, Успехи Мат.Наук XIY, 5(89)(1959), 3-44.

[3] Е. ТИТЧМАРШ: Введение в теорию интегралов Фурье, М.- Л.,ГИТТЛ, 1948.

[4] Р. БЕЛЛМАН, Р. КАЛАБА: Квазилинеаризация и нелинейные краевые задачи, М.,"Мир",1968.

[5] С.Ф. ЛИДЯЕВ: О представимости решения уравнения теплопроводности в виде интеграла Пуассона, Изв.АН СССР,серия матем.,5(1941), 263-268.

(Oblatum April 21,1969)