Isaak V. Šragin

Варианты теоремы Радона-Никодима

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, Vol. 11 (1970), No. 4, 657--665

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/105306

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae
11,4 (1970)

ВАРИАНТЫ ТЕОРЕМЫ РАДОНА-НИКОДИМА

И.В. ШРАГИН, Тамбов

Настоящая статья является развитием недавно опубликованной работы Г.П. Толстова [1]. Леммы 1 и 2 и теоремы 1 и 2 о которых будет идти речь без ссылок, - это предложения из [1] (теоремы настоящей статьи будем обозначать греческими буквами).

Мы будем пользоваться терминологией теории меры, употребляемой в [2]. В то же время мы сохраняем основные обозначения из [1].

Условимся в одном обозначении. Пусть S - класс множеств, а E - множество. Тогда символ S_E обозначает класс множеств из S, содержащихся в E, т.е. $S_E = \{\mathcal{X} \in S : \mathcal{X} \subset E\}$.

Как это часто принято, будем предполагать (в отличие от [2]), что счетно-аддитивная функция множества является по определению и конечно-аддитивной.

§ 1

Одна из важнейших теорем теории меры и интеграла, теорема Радона-Никодима, формулируется следующим образом [2].

Пусть $(\mathcal{X}_0, K, \mu)$ - пространство с вполне σ-конечной мерой. Если σ-конечная обобщенная мера $\mathcal{F}$, заданная на K, абсолютно непрерывна относительно μ, то на $\mathcal{X}_0$ существует такая конечная измеримая функция f, что

(1) $$\mathcal{F}(\mathcal{X}) = \int_{\mathcal{X}} f d\mu$$

для любого измеримого множества $\mathcal{X}$. Такая функция единственная в том смысле, что если

$$\mathcal{F}(\mathcal{X}) = \int_{\mathcal{X}} g d\mu$$

для всякого измеримого $\mathcal{X}$, то $f = g\,[\mu]$.

Г.П. Толстов показал (теорема 1), что если обобщенная мера $\mathcal{F}$, заданная на K, конечна, то в теореме Радона-Никодима можно не требовать, чтобы $\mathcal{X}_0 \in K$, а достаточно предполагать, что $(\mathcal{X}_0, K, \mu)$ - пространство с σ-конечной мерой. Дело в том (лемма 2), что конечная обобщенная мера сосредоточена на некотором измеримом множестве A (т.е. если $\mathcal{X} \subset \mathcal{X}_0 \setminus A$ и $\mathcal{X} \in K$, то $\mathcal{F}(\mathcal{X}) = 0$). Это позволяет применить теорему Радона-Никодима к пространству с мерой (A, K_A, μ) а затем полученную функцию f доопределить нулем на $\mathcal{X}_0 \setminus A$.

Можно пойти несколько дальше и предположить σ-конечность меры не у каждого измеримого множества, а лишь у того, на котором сосредоточена $\mathcal{F}$. Это условие, как показывает следующая теорема α, является в определенном смысле и необходимым для выполнения (1).

Теорема α. Пусть $(\mathcal{X}_0, K, \mu)$ - пространство с мерой, а $\mathcal{F}$ - конечная вещественная функция, определенная на K. Для того, чтобы при любом $\mathcal{X} \in K$ выполнялось (1), где f - конечная функция на $\mathcal{X}_0$, необходимо и достаточно, чтобы $\mathcal{F}$ была счетно-аддитивной, абсолютно непрерывной относительно μ и сосредоточенной на некотором измеримом множестве A σ-конечной меры.

Доказательство. Пусть при любом $\mathcal{X} \in K$ выполняется (1). Тогда ясно, что $\mathcal{F}$ счетно-аддитивна и абсолютно непрерывна. Согласно лемме 2 $\mathcal{F}$ сосредоточена на некотором множестве $B \in K$. Пусть $A = \{x \in B : f(x) \neq 0\}$. Очевидно, $\mathcal{F}$ сосредоточена и на A. Так как f интегрируема и, следовательно, измерима на B, то $A \in K$. Далее, $A = \bigcup A_n$, где $A_n = \{x \in A : |f(x)| \geq n^{-1}\} \in K$, $n = 1, 2, \ldots$. При этом

$$\mu A_n \leq n \int_{A_n} |f| d\mu < \infty .$$

Следовательно, A -множество σ-конечной меры.

Доказательство достаточности не приводим, так как оно по сути совпадает с доказательством теоремы 1. Кроме того, как мы увидим (§ 4), "достаточная" часть теоремы α является частным случаем теоремы δ, которая не зависит от теоремы α.

Замечание 1. Функция f, получаемая в "достаточной" части теоремы α, измерима на $\mathcal{X}_0$. В то же время, функция f, данная в "необходимой" части, будучи интегрируемой на каждом $\mathcal{X} \in K$, может быть неизмеримой на $\mathcal{X}_0$ (например, такова функция, тождественно равная единице на $\mathcal{X}_0$, где $(\mathcal{X}_0, K, \mu)$ - пространство с мерой из упражнения 3, § 17[2]). Заметим, однако, что если $\mathcal{X} \in K$ и $\mathcal{X} \subset \mathcal{X}_0 \setminus A$, где A - измеримое множество, на котором сосредоточена $\mathcal{F}$ то, как следует из (1), $f(x) = 0$ почти всюду на $\mathcal{X}$.

§ 2

В статье [1] Г.П. Толстов поставил задачу об интегральном представлении функции множества, заданной не на всем σ-кольце K измеримых множеств, а на каком-либо более узком классе. Эта задача решается в теореме 2, в которой равенство (1) устанавливается для конечной функции $\mathcal{F}$, определенной на правильном кольце $\mathcal{L}$ (кольцо $\mathcal{L} \subset K$ называется правильным [1], если из условий $\mathcal{X}' \subset \mathcal{X} \in \mathcal{L}$, $\mathcal{X}' \in K$, следует, что $\mathcal{X}' \in \mathcal{L}$). При этом предполагается, что мера μ σ-конечна на K, а функция $\mathcal{F}$ счетно-аддитивна (это требование пропущено в формулировке теоремы 2), абсолютно непрерывна (т.е. если $\mathcal{X} \in \mathcal{L}$ и $\mu\mathcal{X} = 0$, то $\mathcal{F}(\mathcal{X}) = 0$) и сосредоточена на некотором множестве $\mathcal{A} \in \sigma(\mathcal{L})$, где $\sigma(\mathcal{L})$ - σ-кольцо, состоящее из всевозможных счетных объединений множеств из $\mathcal{L}$ (ясно, что $\sigma(\mathcal{L}) \subset K$). Заметим, что построенная при доказательстве теоремы 2 функция f измерима на $\mathcal{X}_0$.

Покажем, что условия теоремы 2 являются в определенном смысле необходимыми. Действительно, пусть $(\mathcal{X}_0, K, \mu)$ - пространство с мерой, $\mathcal{L}$ - правильное кольцо, f - конечная функция, измеримая на $\mathcal{X}_0$ и интегрируемая на каждом $\mathcal{X} \in \mathcal{L}$. Очевидно, функция $\mathcal{F}$, определяемая на $\mathcal{L}$ равенством (1), конечна, счетно-аддитивна, абсолютно непрерывна и сосредоточена на измеримом множестве $\mathcal{A} = \{x : f(x) \neq 0\}$. Далее, легко проверить, что если множество $\mathcal{X}$ из K имеет σ-конечную меру, то $\mathcal{X} \in \sigma(\mathcal{L})$; а если $\mathcal{X} \subset \mathcal{A}$ и $\mathcal{X} \in \sigma(\mathcal{L})$, то $\mathcal{X}$ имеет σ-конечную меру. Следовательно, $\mathcal{A} \in \sigma(\mathcal{L})$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{A}$ имеет σ-конечную меру.

Объединяя эти соображения с теоремой 2, мы получаем следующее предложение.

<u>Теорема</u> β . Пусть $(\mathcal{X}_0, K, \mu)$ - пространство с σ-конечной мерой, $\mathcal{F}$ - конечная функция, определенная на

правильном кольце $\mathcal{L}$. Для того, чтобы при любом $\mathcal{X} \in \mathcal{L}$ выполнялось (1), где f – конечная функция, измеримая на $\mathcal{X}_0$, необходимо и достаточно, чтобы функция $\mathcal{F}$ была счетно-аддитивной, абсолютно непрерывной и сосредоточенной на некотором множестве $\mathcal{A} \in \sigma(\mathcal{L})$.

В § 4 будет показано, что вместо $\sigma(\mathcal{L})$ здесь можно писать K (для "необходимой" части это и так ясно). Однако, по существу это не будет обобщением, так как из сосредоточенности $\mathcal{F}$ на $\mathcal{A} \in K$ и остальных условий "достаточной" части теоремы β следует сосредоточенность $\mathcal{F}$ на некотором $\mathcal{C} \in \sigma(\mathcal{L})$ (см. ниже замечание 3).

§ 3

Здесь мы усилим теорему 2 в направлении освобождения от σ-конечности меры. С этой целью мы используем условия типа условий Окстоби [2], § 31, упр. 10.

Следующая теорема является основным результатом статьи.

<u>Теорема</u> γ. Пусть $(\mathcal{X}_0, K, \mu)$ – пространство с мерой, $\mathcal{L}$ – правильное кольцо, $\mathcal{D}$ – подкласс σ-кольца K, состоящий из попарно непересекающихся множеств конечной меры, причем каждое $\mathcal{X}$ из $\mathcal{L}$ покрыто конечным или счетным числом множеств из $\mathcal{D}$. Пусть на $\mathcal{L}$ определена конечная, счетно-аддитивная и абсолютно непрерывная функция $\mathcal{F}$. Тогда на $\mathcal{X}_0$ существует такая конечная функция f, измеримая на каждом $Y \in \mathcal{D}$, что для любого $\mathcal{X} \in \mathcal{L}$ имеет место (1).

<u>Доказательство</u>. Возьмем произвольное $Y \in \mathcal{D}$ и рассмотрим σ-кольцо $\sigma(\mathcal{L})_Y$. Так как мера μ конечна на $\sigma(\mathcal{L})_Y$, то она сосредоточена на некотором $Z \in \sigma(\mathcal{L})_Y$ (лемма 1). Тогда и $\mathcal{F}$, будучи абсолютно непре-

рывной, также сосредоточена (в пределах Y) на Z. Следовательно, согласно теореме 2, на Y существует такая конечная измеримая функция f, что для любого $\mathcal{X} \in \mathcal{L}_Y$ имеет место (1.

Проведя это построение для каждого $Y \in \mathcal{D}$ и доопределив f на $\mathcal{X}_0 \setminus \cup \mathcal{D}$ нулем, мы получим конечную функцию f, определенную на всем $\mathcal{X}_0$ и измеримую на каждом $Y \in \mathcal{D}$. Если $\mathcal{X} \in \mathcal{L}$, то существуют множества $Y_n \in \mathcal{D}$ в конечном или счетном числе, которые покрывают $\mathcal{X}$. Тогда

$$\mathcal{F}(\mathcal{X}) = \sum_n \mathcal{F}(\mathcal{X} \cap Y_n) = \sum_n \int_{\mathcal{X} \cap Y_n} f\,d\mu = \int_{\mathcal{X}} f\,d\mu .$$

Приведем еще одно доказательство теоремы γ, не использующее теорему 2 и основанное на одном из вариантов разложения Жордана (кстати, по этой схеме можно доказать и теорему 2).

По-прежнему зафиксируем $Y \in \mathcal{D}$ и рассмотрим функцию $\mathcal{F}$ на правильном кольце $\mathcal{L}_Y$. Тогда $\mathcal{F}(\mathcal{X}) = \mathcal{F}^+(\mathcal{X}) - \mathcal{F}^-(\mathcal{X})$ для любого $\mathcal{X} \in \mathcal{L}_Y$, где $\mathcal{F}^+$ - положительное, а $\mathcal{F}^-$ - отрицательное изменение функции $\mathcal{F}$ [3], стр.159-161.

Распространим $\mathcal{F}^+$ и $\mathcal{F}^-$ по аддитивности на $\sigma(\mathcal{L})_Y$. А именно, если $\mathcal{X} \in \sigma(\mathcal{L})_Y$, то $\mathcal{X} = \cup \mathcal{X}_n$, где множества $\mathcal{X}_n \in \mathcal{L}_Y$, $n = 1, 2, \dots$, и попарно не пересекаются. Полагаем $\mathcal{F}^{\pm}(\mathcal{X}) = \sum \mathcal{F}^{\pm}(\mathcal{X}_n)$. Нетрудно убедиться в корректности этого распространения, а также в том, что рассматриваемые на $\sigma(\mathcal{L})_Y$ функции $\mathcal{F}^+$ и $\mathcal{F}^-$ являются σ-конечными мерами, абсолютно непрерывными относительно μ и сосредоточенными на указанном выше множестве Z.

На основании теоремы Радона-Никодима существуют такие измеримые на Z конечные функции f^+ и f^-, что для любого

$\mathcal{X} \in \mathcal{L}_Z$

$$\mathcal{F}^+(\mathcal{X}) = \int_{\mathcal{X}} f^+ d\mu , \quad \mathcal{F}^-(\mathcal{X}) = \int_{\mathcal{X}} f^- d\mu \ .$$

Положив $f = f^+ - f^-$ и доопределив f на $Y \setminus Z$ нулем, мы получим измеримую на Y конечную функцию, для которой выполняется (1) при любом $\mathcal{X} \in \mathcal{L}_Y$. Доказательство завершается тем же рассуждением, что и при первом способе.

<u>Замечание 2</u>. Можно несколько ослабить условия теоремы γ, заменив условие о покрытии $\mathcal{X} \in \mathcal{L}$ требованием, чтобы для любого $\mathcal{X} \in \mathcal{L}$ существовали такие $Y_n \in \mathcal{D}$ в конечном или счетном числе, что $\mu(\mathcal{X} \setminus \cup Y_n) = 0$. В этом случае, так как мера μ , вообще говоря, не является полной, то функция f может оказаться неизмеримой на каком-либо $\mathcal{X} \in \mathcal{L}$. Однако, утверждение теоремы γ сохраняется, если интеграл в (1) понимать как интеграл от измеримой на $\mathcal{X}$ функции $f_{\mathcal{X}}$, совпадающей с f на $\mathcal{X} \cap \cup Y_n$ и равной нулю на $\mathcal{X} \setminus \cup Y_n$ (см. [4], стр. 129).

§ 4

Здесь мы выведем из теоремы γ ряд следствий.

<u>Теорема</u> δ. Пусть $(\mathcal{X}_0 , K, \mu)$ - пространство с мерой, а $\mathcal{F}$ - конечная, счетно-аддитивная и абсолютно непрерывная функция, определенная на правильном кольце $\mathcal{L} \subset K$ и сосредоточенная на некоторм измеримом множестве A σ - конечной меры. Тогда существует такая конечная функция f , измеримая на $\mathcal{X}_0$, что для любого $\mathcal{X} \in \mathcal{L}$ имеет место (1).

<u>Доказательство</u>. Пусть $\mathcal{A} = \bigcup Y_m$, где множества Y_m, $m = 1, 2, \ldots$, попарно не пересекаются и имеют конечные меры. Тогда для пространства с мерой $(\mathcal{A}, K_{\mathcal{A}}, \mu)$ и функции $\mathcal{F}$, рассматриваемой на $\mathcal{L}_{\mathcal{A}}$, выполнены все условия теоремы γ.
Поэтому на $\mathcal{A}$ существует такая конечная функция f, измеримая на каждом Y_m и, следовательно, измеримая на $\mathcal{A}$, что (1) имеет место для любого $\mathcal{X} \in \mathcal{L}_{\mathcal{A}}$. Доопределив f на $\mathcal{X}_0 \setminus \mathcal{A}$ нулем, мы получим функцию, измеримую на $\mathcal{X}_0$, для которой (1) имеет место для любого $\mathcal{X} \in \mathcal{L}$.

<u>Замечание 3</u>. В условиях теоремы δ функция $\mathcal{F}$ сосредоточена на некотором множестве $C \in \sigma(\mathcal{L})$, которое является также множеством σ-конечной меры. Действительно, как видно из доказательства теоремы γ, в пределах каждого Y_m функция $\mathcal{F}$ сосредоточена на некотором $Z_m \in \sigma(\mathcal{L})_{Y_m}$. Положив $C = \bigcup Z_m$, мы видим, что C имеет σ-конечную меру, $C \in \sigma(\mathcal{L})$ и $\mathcal{F}$ сосредоточена на C.

Рассмотрим некоторые частные случаи теоремы δ.

1) Если μ σ-конечна на K, то, естественно, можно опустить требование, чтобы $\mathcal{A}$ имело σ-конечную меру (сохранив только измеримость $\mathcal{A}$). Фактически, несмотря на кажущуюся большую общность, этот случай совпадает с теоремой 2, как это следует из замечания 3.

2) Если μ конечна или вполне σ-конечна на K, то можно вообще опустить требование о сосредоточенности $\mathcal{F}$. Действительно, если μ конечна, то согласно лемме 1, она сосредоточена на некотором $\mathcal{A} \in K$. В силу абсолютной непрерывности, и $\mathcal{F}$ сосредоточена на $\mathcal{A}$. Таким образом условия теоремы δ выполнены. Если μ вполне σ-конечна,

то роль $\mathcal{A}$ играет само $\mathcal{X}_0$.

3) Если кольцо $\mathcal{L}$ совпадает с K, то теорема δ превращается в "достаточную" часть теоремы α.

§ 5

В заключение рассмотрим один пример, иллюстрирующий теорему γ. Возьмем пространство с мерой, рассмотренное в [2], § 31, упр.8. А именно, $\mathcal{X}_0$ - несчетное множество; K - класс тех его подмножеств, которые либо сами конечны или счетны, либо имеют конечные или счетные дополнения; $\mu\mathcal{X} = n$, если $\mathcal{X}$ состоит из n точек, и $\mu\mathcal{X} = \infty$ для бесконечного $\mathcal{X} \in K$. Пусть $\mathcal{L}$ состоит из всех конечных подмножеств, а $\mathcal{D}$ - из всех одноточечных подмножеств пространства $\mathcal{X}_0$. Для $\mathcal{X} \in \mathcal{L}$ положим $\mathcal{F}(\mathcal{X}) = \mu\mathcal{X}$. Очевидно, все условия теоремы γ выполнены (заметим, что мера здесь не σ-конечна). В то же время теорема δ здесь неприменима, поскольку $\mathcal{F}$ не сосредоточена ни на каком множестве σ-конечной меры.

Литература:

[1] Г.П. ТОЛСТОВ: К теореме Радона-Никодима, Матем.сб.,80 (122)(1969),334-338.

[2] П. ХАЛМОШ: Теория меры, Москва,ИЛ,1953.

[3] Г.Е. ШИЛОВ, В.Л. ГУРЕВИЧ: Интеграл, мера и производная, Москва, "Наука",1967.

[4] М. ЛОЭВ: Теория вероятностей, Москва,ИЛ,1962.

Тамбов-2,ул.А.Бебеля д.28,кв.3

СССР

(Oblatum 30.4.1970)