Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae

Osvald Demuth

Об областях определения эффективных операторов над общерекурсинными функциями и конструктивных функций действительной переменной

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, Vol. 17 (1976), No. 4, 633--646

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/105724

COMMENTATIONES MATHEMATICAE UNIVERSITATIS CAROLINAE

17,4 (1976)

ОБ ОБЛАСТЯХ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЭФФЕКТИВНЫХ ОПЕРАТОРОВ НАД ОБЩЕРЕКУРСИВНЫМИ ФУНКЦИЯМИ И КОНСТРУКТИВНЫХ ФУНКЦИЙ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

О. ДЕМУТ (O. DEMUTH), Прага

Содержание: В настоящей заметке доказано, что области определения эффективных операторов над общерекурсивными функциями и конструктивных функций действительной переменной являются в эффективном смысле множествами типа G_σ в соответствующих топологических пространствах.

Ключевые слова: Общерекурсивная функция, эффективный оператор, конструктивная функция действительной переменной, область определения, множество типа G_σ, классически открытое множество.

AMS: Primary 02E99, 02F99 Ref. Ž.: 2.644.2
Secondary 02F35, 54C30

В следующем мы пользуемся определениями и обозначениями, введенными в [1],[2] и [3]. Мы перечислим важнейшие из них. Формулы мы понимаем в соответствии с правилами конструктивного понимания математических суждений [4].

Пусть Ц алфавит, $Ц \rightleftharpoons \{0, |, -, /, \Diamond, \triangle, \triangledown, \square\}$. Λ обозначает пустое слово, $\eqcirc$ - графическое равенство слов, для любых слов P и R и алфавита Б - PR соединение слов P и R, а $P \mho Б$ обозначает: P слово в алфавите Б ([1]). $\simeq$ знак условного равенства. Ставя такой знак между двумя выражениями, мы тем самым будем утверждать, что выражения эти означают одно и то же слово, коль скоро хотя бы одно из них имеет смысл ([1]). Мы пользуемся понятием нормального алгорифма над алфавитом Ц ([1]). Натуральными числами (НЧ) мы называем слова вида $0P$, где $P \mho \{1\}$. Рациональными числами (РЧ) и конструктивными действительными числами (дуплексами) - КДЧ - мы называем слова в алфавите Ц, определенные и исследованные в [2]. Для КДЧ мы посредством $=$ обозначаем равенство, а посредством $<$ отношение меньше, определенные в [2]. Мы напомним, что для любого КДЧ P - $\underline{P}$ нормальный алгорифм, являющийся последовательностью РЧ, т.е. $\underline{P}$ применим к всякому НЧ и выдает по нему РЧ, при этом последовательность $\underline{P}$ "сходится" к КДЧ P. Множество всех НЧ мы обозначим посредством N, множество всех РЧ - Q, а множество всех КДЧ - D. Буквы S и T служат переменными для слов в алфавите Ц, i, k, l, m, n, p, q и s - переменными для НЧ, a и b - переменными для РЧ, а x и y переменными для КДЧ.

Существуют нормальные алгорифмы $\textit{н}$ и c над алфавитом Ц, применимые к всякому слову в Ц, и такие, что
$\forall S m(\textit{н}(S) \in N \mathbin{\&} c(m) \mho \text{Ц} \mathbin{\&} c(\textit{н}(S)) \equiv S \mathbin{\&} \textit{н}(c(m)) = m)$.

Если $\mathcal{F}$ нормальный алгорифм, а P слово, то $!\mathcal{F}(P)$ обозначает: $\mathcal{F}$ применим к P.

Предикат B мы назовем числовым (соотв. словарным) предикатом, если его единственными свободными переменными являются переменные для НЧ (соотв. для слов). Если B числовой предикат с одной свободной переменной - m, то мы выражение $\{m \mid B(m)\}$ назовем числовым множеством и для всякого НЧ t обозначим $t \in \{m \mid B(m)\} \rightleftharpoons B(t)$. Числовое множество $\mathfrak{M}$ мы назовем нормальным, если выполнено $\forall n\,(n \in \mathfrak{M} \equiv \neg\neg\,(n \in \mathfrak{M}))$.

Если C словарный предикат с одной свободной переменной - S, то мы выражение $\wedge S(C(S))$ назовем словарным множеством и для всякого слова P обозначим

$P \in \wedge S(C(S)) \rightleftharpoons C(P)$.

Мы обозначим $\mathfrak{J} \rightleftharpoons \wedge S(\exists a b\,(S \eqsim a \triangledown b \;\&\; a < b))$ и для всяких РЧ a и b, $a < b$ и КДЧ x $x \in a \triangledown b \rightleftharpoons$ $\rightleftharpoons a < x < b$. Элементы словарного множества $\mathfrak{J}$ мы будем называть рациональными интервалами. $\mathfrak{J}$ определяет на множестве $\mathfrak{D}$ топологию.

Нормальный алгорифм $\mathcal{F}$ над Ц мы назовем конструктивной функцией действительной переменной (КФДП), если верно

$$\forall x y\,(x = y \supset (\,!\,\mathcal{F}(x) \equiv\, !\,\mathcal{F}(y)) \;\&\; (\,!\,\mathcal{F}(x) \supset \mathcal{F}(x) \in \mathfrak{D} \;\&$$
$$\& \;\mathcal{F}(x) = \mathcal{F}(y)))\,.$$

Если $\mathcal{F}$ КФДП, то мы ее $\mathfrak{D}$ -областью определения назовем словарное множество $\wedge S(S \in \mathfrak{D} \;\&\, !\,\mathcal{F}(S))$.

Мы пользуемся понятиями частичнорекурсивной и общерекурсивной функции (ЧРФ и ОРФ) и для любого нормального числового множества $\mathfrak{M}$ конструктивными переформулировками понятий $\mathfrak{M}$-частичнорекурсивной и $\mathfrak{M}$-общерекурсивной функции ($\mathfrak{M}$-ЧРФ и $\mathfrak{M}$-ОРФ), $\mathfrak{M}$-рекурсивного и $\mathfrak{M}$-рекурсивно перечислимого числового множества (соотв. предиката), введенных в [3]. При этом мы считаем, что аргументами и результатами функций названных типов являются элементы множества N.

$\varphi_n(m)$ (соотв. $\varphi_n^{\mathfrak{M}}(m)$) - универсальная функция для ЧРФ (соотв. $\mathfrak{M}$-ЧРФ) одной переменной, для НЧ k, $1 < k$,

$\varphi_m^{(k)\mathfrak{M}}(m_1, \ldots, m_k)$ универсальная функция для $\mathfrak{M}$-ЧРФ k переменных.

Для любых нормальных числовых множеств $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ и НЧ p и q $!\varphi_p(q)$ (соотв. $!\varphi_p^{\mathfrak{M}}(q)$) обозначает применимость функции φ_p (соотв. $\varphi_p^{\mathfrak{M}}$) к НЧ q,

$$\varphi_p^{\mathfrak{M}} \sim \varphi_q^{\mathfrak{N}} \rightleftharpoons \forall n (\varphi_p^{\mathfrak{M}}(n) \simeq \varphi_q^{\mathfrak{N}}(n)),$$

$$\mathcal{R}^{\mathfrak{M}} \rightleftharpoons \{m \mid \forall n (!\varphi_m^{\mathfrak{M}}(n))\}, \qquad T_1^{\mathfrak{M}}(k, m, n)$$

$\mathfrak{M}$-рекурсивный числовой предикат такой, что
$\forall k m (!\varphi_k^{\mathfrak{M}}(m) \equiv \neg\neg \exists n\ T_1^{\mathfrak{M}}(k, m, n))$,
а $\mathfrak{M}'$ скачек множества $\mathfrak{M}$, т.е. $\mathfrak{M}' \rightleftharpoons \{m \mid !\varphi_m^{\mathfrak{M}}(m)\}$.

Мы определим $\emptyset^{(0)} \rightleftharpoons \emptyset$ и для всякого НЧ k
$\emptyset^{(k+1)} \rightleftharpoons (\emptyset^{(k)})'$.

Понятие кортежа определяется следующими порождающими правилами: а) всякое НЧ является кортежом и б) если слово P кортеж, а t НЧ, то слово $P \square t$ кортеж. Словарное множество всех кортежей мы обозначим посредством $\mathcal{K}$. Тогда $\{n \mid c(n) \in \mathcal{K}\}$ $\emptyset$-рекурсивное множество и существуют $\emptyset$-общерекурсивные функции τ и σ такие, что для всяких НЧ k и кортежа P, $P \boldsymbol{\Xi}\ m_0 \square m_1 \ldots \square m_k$, верно

$$\tau(\varkappa(P)) = k \ \& \ \forall i\ (0 \leq i \leq k \supset \sigma(\varkappa(P), i) = m_i).$$

Для всяких нормального числового множества $\mathfrak{M}$, кортежа P и НЧ p мы обозначим

$$p \in \mathcal{O}^{\mathfrak{M}}[P] \rightleftharpoons (p \in \mathcal{R}^{\mathfrak{M}} \ \& \ \forall i\ (0 \leq i \leq \tau(\varkappa(P)) \supset$$

$$\supset \sigma(\varkappa(P), i) = \varphi_p^{\mathfrak{M}}(i))).$$

Таким образом, любому кортежу сопоставлеяется окрестность. Эти окрестности определяют на множестве $\mathcal{R}^{\mathfrak{M}}$ топологию.

Определения. Пусть $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ нормальные числовые множества, f $\mathfrak{M}$-ЧРФ, а $\mathcal{L}$ числовое множество, $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{R}^{\mathfrak{M}}$. Тогда

а) мы скажем, что f является $\mathfrak{M}$-оператором типа $(\mathcal{R}^{\mathfrak{N}} \xrightarrow{\cdot} \mathcal{R}^{\mathfrak{N}})$ если выполнено

$$\forall m\, n\, (m \in \mathcal{R}^{\mathfrak{N}} \,\&\, n \in \mathcal{R}^{\mathfrak{N}} \,\&\, \varphi_m^{\mathfrak{N}} \sim \varphi_n^{\mathfrak{N}} \supset (!f(m) \equiv\, !f(n)) \,\&$$
$$(!f(m) \supset f(m) \in \mathcal{R}^{\mathfrak{N}} \,\&\, \varphi_{f(m)}^{\mathfrak{N}} \sim \varphi_{f(n)}^{\mathfrak{N}}))\ ,$$

б) если f $\mathfrak{M}$-оператор типа $(\mathcal{R}^{\mathfrak{N}} \xrightarrow{\cdot} \mathcal{R}^{\mathfrak{N}})$, то его $\mathcal{R}^{\mathfrak{N}}$-областью определения мы назовем числовое множество $\{m \mid m \in \mathcal{R}^{\mathfrak{N}} \,\&\, !f(m)\}$,

в) $\mathcal{L}$ мы назовем множеством типа $G^{\mathfrak{N}}$, если существует $\mathfrak{N}$-рекурсивно перечислимый числовой предикат $A(m)$ такой, что

$$\forall m\, (A(m) \supset c(m) \in \mathcal{H})\ \&$$
$$\forall p\, (p \in \mathcal{L} \equiv \neg\neg \exists m\, (A(m) \,\&\, p \in \mathcal{O}^{\mathfrak{M}}[c(m)]))\ ,$$

г) $\mathcal{L}$ мы назовем множеством типа $G_{\delta}^{\mathfrak{N}}$, если существует $\mathfrak{N}$-рекурсивно перечислимый числовой предикат $B(n,m)$ такой, что

$$\forall n\, m\, (B(n,m) \supset c(m) \in \mathcal{H})\ \&$$
$$\forall p\, (p \in \mathcal{L} \equiv \forall n\, \neg\neg \exists m\, (B(n,m) \,\&\, p \in \mathcal{O}^{\mathfrak{M}}[c(m)]))\ ,$$

д) $\mathcal{L}$ мы назовем классически открытым множеством, если верно

$$\forall p\, (p \in \mathcal{L} \supset \neg\neg \exists m\, (c(m) \in \mathcal{H} \,\&\, p \in \mathcal{O}^{\mathfrak{M}}[c(m)]\ \&$$
$$\forall q\, (q \in \mathcal{O}^{\mathfrak{M}}[c(m)] \supset q \in \mathcal{L})))\ .$$

Замечание 1. Для любых нормального числового множества $\mathfrak{N}$ и словарного множества $\mathcal{L}$, $\mathcal{L} \subseteq \mathrm{D}$, понятия - быть множеством типа $G^{\mathcal{X}}$ (соотв. $G_{\sigma}^{\mathcal{X}}$), классически открытым множеством - определяются аналогично. (В определениях в), г) и д) достаточно всюду заменить переменные p и q соответственно на x и y , $\mathcal{X}$ на $\mathcal{I}$, а выражение $\sigma^{\mathfrak{M}}[c(m)]$ на $c(m)$.)

Мы заметим, что эффективные операторы над ОРФ являются $\emptyset$-операторами типа $(\mathcal{R}^{\emptyset} \rightarrow \mathcal{R}^{\emptyset})$. Что касается $\mathcal{R}^{\emptyset}$-областей определения - эффективные операции (функционалы) над ОРФ ([3], стр. 464), очевидно, не отличаются от эффективных операторов над ОРФ.

Фридбергом построен пример $\emptyset$-оператора типа $(\mathcal{R}^{\emptyset} \rightarrow \mathcal{R}^{\emptyset})$, $\mathcal{R}^{\emptyset}$-область определения которого не является классически открытым множеством ([3], стр. 464). Примеры КФДП, обладающих аналогичными свойствами, построены А.А. Мучником и Г.С. Цейтиным ([6]). Московакису ([5]) принадлежит результат, частным случаем которого является следующее утверждение: Существуют $\emptyset$-оператор f типа $(\mathcal{R}^{\emptyset} \rightarrow \mathcal{R}^{\emptyset})$ и КФДП $\mathcal{F}$ с непустыми соответственно $\mathcal{R}^{\emptyset}$- и D-областью определения, которые являются (в соответствующих топологических пространствах) замкнутыми нигде не плотными множествами. Ввиду сказанного и теоремы 1 из [5] ясно, что $\{p \mid p \in \mathcal{R}^{\emptyset} \,\&\, \neg\, !f(p)\}$ и $\wedge S(S \in \mathrm{D} \,\&\, \neg\, !\mathcal{F}(S))$ не могут быть множествами типа $G_{\sigma}^{\emptyset}$.

<u>Замечание 2</u>. Числовые предикаты $\neg(m \in \mathcal{R}^{\emptyset})$ и $\neg(c(m) \in \mathrm{D})$ являются $\emptyset'$-рекурсивно перечислимыми, а $!\varphi_m^{\emptyset}(m)$ и $!\mathcal{F}(c(m))$, где $\mathcal{F}$ нормальный алгорифм над Ц, $\emptyset$-рекурсивно перечислимыми и, следовательно, $\emptyset'$-рекурсивными предикатами.

Теорема 1. Пусть $\varphi_t^{\emptyset}$ $\emptyset$-оператор типа $(\mathcal{R}^{\emptyset} \to \mathcal{R}^{\emptyset})$. Тогда $\mathcal{R}^{\emptyset}$-область определения оператора $\varphi_t^{\emptyset}$, т.е. множество $\{p \mid p \in \mathcal{R}^{\emptyset} \& \, !\, \varphi_t^{\emptyset}(p)\}$, является множеством типа $G_{\delta}^{\emptyset}$.

Доказатеьство. Мы построим $\emptyset$-ОРФ g, областью значений которой является $\emptyset'$, т.е. $\{n \mid \, !\, \varphi_n^{\emptyset}(n)\}$, и для всяких НЧ m и n определим

$A(m,n) \rightleftharpoons \exists i \, (0 \le i \le n \,\&\, g(i) = m)$. Тогда A $\emptyset$-рекурсивный числовой предикат и, следовательно, существует НЧ $\varkappa$ такое, что для всяких НЧ k, ℓ, m и n верно

$$\varphi_{\varkappa}^{(4)\emptyset}(k,\ell,m,n) \simeq \begin{cases} \varphi_k^{\emptyset}(n), & \text{если } \neg A(m,n) \\ \varphi_{\ell}^{\emptyset}(n), & \text{если } A(m,n). \end{cases}$$

Согласно S-m-n-теореме ([3], стр. 177) существует ОРФ f с тремя переменными такая, что

$$\forall k \ell m n \, (\varphi_{\varkappa}^{(4)\emptyset}(k,\ell,m,n) \simeq \varphi_{f(k,\ell,m)}^{\emptyset}(n)).$$

а) Мы заметим, что для любых НЧ k, ℓ и m, $k \in \mathcal{R}^{\emptyset} \,\&\, \neg(m \in \emptyset')$, верно $f(k,\ell,m) \in \mathcal{R}^{\emptyset} \,\&\, \varphi_{f(k,\ell,m)}^{\emptyset} \sim \varphi_k^{\emptyset}$ и, следовательно, $!\,\varphi_t^{\emptyset}(f(k,\ell,m)) \equiv \, !\,\varphi_t^{\emptyset}(k)$.

Таким образом, если k и ℓ НЧ, $k \in \mathcal{R}^{\emptyset} \,\&\, !\,\varphi_t^{\emptyset}(k)$, то $\setminus \emptyset'$ (т.е. $\{n \mid \neg(n \in \emptyset')\}$) содержится в $\emptyset$-рекурсивно перечислимом числовом множестве $\{m \mid !\,\varphi_t^{\emptyset}(f(k,\ell,m))\}$ и, следовательно, ввиду свойств предиката A для всякого НЧ p можно построить НЧ m такое, что $m \in \emptyset' \,\&\, \neg A(m,p) \,\&$ $\&\, !\,\varphi_t^{\emptyset}(f(k,\ell,m))$.

б) Для всяких НЧ ℓ и s мы определим

$B(\ell,s) \rightleftharpoons \exists k m p \, (c(s) \in \mathcal{K} \,\&\, \tau(s) = p \,\&\, \ell \le p \,\&$

$\& m \in \emptyset' \& \neg A(m, p) \& A(m, p+1) \& ! \varphi_t^{\emptyset}(f(k, \ell, m)) \&$
$\forall i \, (0 \le i \le p \supset \varphi_k^{\emptyset}(i) \simeq \sigma(s, i)))$.

Тогда B является $\emptyset$-рекурсивно перечислимым числовым предикатом и ввиду а) для всякого НЧ q верно

$$(q \in \mathcal{R}^{\emptyset} \& ! \varphi_t^{\emptyset}(q) \supset \forall \ell \exists s \, (B(\ell, s) \& q \in \mathcal{O}^{\emptyset}[c(s)])) \&$$
$$(\neg\neg \exists s \, (B(q, s) \& q \in \mathcal{O}^{\emptyset}[c(s)]) \supset q \in \mathcal{R}^{\emptyset} \& ! \varphi_t^{\emptyset}(q)) .$$

Теорема 2. Пусть j и t НЧ, и $\varphi_t^{\emptyset^{(j)}}$ является $\emptyset^{(j)}$-оператором типа $(\mathcal{R}^{\emptyset} \to \mathcal{R}^{\emptyset})$. Тогда $\mathcal{R}^{\emptyset}$-область определения оператора $\varphi_t^{\emptyset^{(j)}}$ и ее дополнение до $\mathcal{R}^{\emptyset}$ являются множествами типа $G_{\delta}^{\emptyset^{(\max(1,j))}}$.

Доказательство. Для всяких НЧ ℓ и s мы определим

$$A(\ell, s) \rightleftharpoons (c(s) \in \mathcal{K} \& \ell \le \tau(s) \& \neg\neg(\neg(\ell \in \mathcal{R}^{\emptyset}) \vee \forall i \, (0 \le i \le$$
$$\le \tau(s) \supset ! \varphi_\ell^{\emptyset}(i)) \& \exists i \, (0 \le i \le \tau(s) \& \neg(\varphi_\ell^{\emptyset}(i) =$$
$$= \sigma(s, i))))) ,$$

$$B_1(\ell, s) \rightleftharpoons \neg\neg(A(\ell, s) \vee ! \varphi_t^{\emptyset^{(j)}}(\ell) \& c(s) \in \mathcal{K} \& \ell \le \tau(s)) \text{ и}$$
$$B_2(\ell, s) \rightleftharpoons \neg\neg(A(\ell, s) \vee c(s) \in \mathcal{K} \& \ell \le \tau(s) \& \neg\neg \exists m \, (m =$$
$$\mu p (\forall i \, (0 \le i \le \tau(s) \supset \varphi_\ell^{\emptyset}(i) \simeq \varphi_p^{\emptyset}(i))) \&$$
$$\neg \exists i \, (0 \le i \le \ell \& T_1^{\emptyset^{(j)}}(t, m, i)))) .$$

Тогда числовые предикаты B_1 и B_2 являются $\emptyset^{(\max(1,j))}$-рекурсивно перечислимыми и для всякого НЧ q из свойств $\varphi_t^{\emptyset^{(j)}}$ и того, что $\forall p \exists \ell \, (p < \ell \& \varphi_q^{\emptyset} \sim \varphi_\ell^{\emptyset})$, сразу следует

$$(q \in \mathcal{R}^{\emptyset} \& ! \varphi_t^{\emptyset^{(j)}}(q)) \equiv \forall \ell \neg\neg \exists s \, (B_1(\ell, s) \& q \in \mathcal{O}^{\emptyset}[c(s)])$$

и

$$(q \in \mathcal{R}^{\emptyset} \& \neg ! \varphi_t^{\emptyset^{(j)}}(q)) \equiv \forall \ell \neg\neg \exists s \, (B_2(\ell, s) \& q \in \mathcal{O}^{\emptyset}[c(s)]) .$$

Теорема 3. Пусть $\varphi_t^{\emptyset}$ $\emptyset$-оператор типа

$(\mathcal{R}^{\emptyset} \xrightarrow{\cdot} \mathcal{R}^{\emptyset})$. Тогда $\mathcal{R}^{\emptyset}$ -область определения оператора $\varphi_t^{\emptyset}$ является множеством типа $G^{\emptyset^{(2)}}$ тогда и только тогда, когда существует $\emptyset^{(2)}$-оператор $\varphi_s^{\emptyset^{(2)}}$ типа $(\mathcal{R}^{\emptyset^{(2)}} \xrightarrow{\cdot} \mathcal{R}^{\emptyset^{(2)}})$ такой, что

$$(1)\quad \forall p q (p \in \mathcal{R}^{\emptyset} \,\&\, q \in \mathcal{R}^{\emptyset^{(2)}} \,\&\, \varphi_p^{\emptyset} \sim \varphi_q^{\emptyset^{(2)}} \supset$$
$$\supset (!\,\varphi_t^{\emptyset}(p) \equiv !\,\varphi_s^{\emptyset^{(2)}}(q)))\ .$$

Доказательство. Достаточно ограничиться следующим. Пусть $\varphi_s^{\emptyset^{(2)}}$ $\emptyset^{(2)}$-оператор типа $(\mathcal{R}^{\emptyset^{(2)}} \xrightarrow{\cdot} \mathcal{R}^{\emptyset^{(2)}})$ такой, что (1). Существует ОРФ g ,для которой верно $\forall p (\varphi_p^{\emptyset} \sim \varphi_{g(p)}^{\emptyset^{(2)}})$. Множества $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M} \rightleftharpoons \{p \mid p \in \mathcal{R}^{\emptyset} \,\&\, !\,\varphi_t^{\emptyset}(p)\}$, и $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{N} \rightleftharpoons \{p \mid p \in \mathcal{R}^{\emptyset} \,\&\, \neg\, !\,\varphi_t^{\emptyset}(p)\}$, являются $\emptyset^{(2)}$-рекурсивными и, следовательно, согласно релятивизованной теореме 1 из [5] существует НЧ $\varkappa$ такое, что

$$\forall q k ((!\,\varphi_{\varkappa}^{\emptyset^{(2)}}(q) \equiv !\,\varphi_s^{\emptyset^{(2)}}(q)) \,\&\, (q \in \mathcal{R}^{\emptyset^{(2)}} \,\&\, !\,\varphi_s^{\emptyset^{(2)}}(q) \,\&$$
$$(2)\quad \&\, \varphi_{\varkappa}^{\emptyset^{(2)}}(q) = k \supset c(k) \in \mathcal{K} \,\&\, q \in \mathcal{O}^{\emptyset^{(2)}}[c(k)] \,\&$$
$$\&\, \neg \exists m (m \in \mathfrak{N} \,\&\, g(m) \in \mathcal{O}^{\emptyset^{(2)}}[c(k)]))).$$

Для всякоко НЧ n мы определим

$$A(n) \rightleftharpoons \neg\neg \exists p (p \in \mathfrak{M} \,\&\, \varphi_{\varkappa}^{\emptyset^{(2)}}(g(p)) \simeq n)\ .$$

Тогда A является $\emptyset^{(2)}$-рекурсивно перечислимым числовым предикатом и ввиду (1) и (2) выполнено

$$\forall q (q \in \mathfrak{M} \equiv \neg\neg \exists n (A(n) \,\&\, q \in \mathcal{O}^{\emptyset}[c(n)]))\ .$$

Легко доказать следующее утверждение.

<u>Теорема 4</u>. $\mathcal{R}^{\emptyset}$ -область определения $\emptyset$-оператора типа $(\mathcal{R}^{\emptyset} \xrightarrow{\cdot} \mathcal{R}^{\emptyset})$ является классически открытым множест-

вом тогда и только тогда, когда она является множеством типа $G^{\emptyset^{(3)}}$.

Пример 1. Существуют $\emptyset$-оператор $\varphi_t^{\emptyset}$ типа $(\mathcal{R}^{\emptyset} \to \mathcal{R}^{\emptyset})$ и $\emptyset'$-оператор $\varphi_s^{\emptyset'}$ типа $(\mathcal{R}^{\emptyset'} \to \mathcal{R}^{\emptyset'})$ такие, что

$$\forall p q (p \in \mathcal{R}^{\emptyset} \,\&\, q \in \mathcal{R}^{\emptyset'} \,\&\, \varphi_p^{\emptyset} \sim \varphi_q^{\emptyset'} \supset (!\, \varphi_t^{\emptyset}(p) \equiv \,!\, \varphi_s^{\emptyset'}(q)))$$

и вместе с тем $\mathcal{R}^{\emptyset}$ -область определения оператора $\varphi_t^{\emptyset}$ не является классически открытым множеством.

<u>Замечание 3</u>. I) Существуют $\emptyset$ -ОРФ f_1, f_2 и f такие, что для всякого НЧ p выполнено

$$c(f_1(p)) \in Q \,\&\, c(f_2(p)) \in Q \,\&\, (c(p) \in \mathcal{K} \supset \forall i\, (1 \leq i \leq 2 \supset$$

$$\supset c(f_i(p)) \mathrel{\underline{\underline{\times}}} (\sum_{\ell=0}^{\tau(p)} min(\sigma(p,\ell),1) . 2^{-\ell-1} + (i-1) . 2^{-\tau(p)-1}))) \,\&$$

$$\&\, (p \in \mathcal{R}^{\emptyset} \supset c(f(p)) \in D \,\&\, \forall m\, (\underbrace{c(f(p))}(m)$$

$$\mathrel{\underline{\underline{\times}}} \sum_{\ell=0}^{m} min(\varphi_p^{\emptyset}(\ell),1) . 2^{-\ell-1}))\ .$$

II) Пусть E словарный предикат, для которого выполнено

$$\text{(3)}\quad \forall S (E(S) \supset S \in D) \,\&\, \forall x y\, ((x = y \supset (E(x) \equiv E(y))) \,\&\, (E(x) \supset 0 < x < 1))\ ,$$

а j НЧ. Мы построим числовой предикат F такой, что $\forall p (F(p) \equiv (p \in \mathcal{R}^{\emptyset} \,\&\, E(c(f(p)))))$. Тогда ввиду (3) верно

$$\text{(4)}\quad \forall p q (p \in \mathcal{R}^{\emptyset} \,\&\, q \in \mathcal{R}^{\emptyset} \,\&\, c(f(p)) = c(f(q)) \supset \supset (F(p) \equiv F(q)))\ .$$

1) Пусть B $\emptyset^{(j)}$-рекурсивно перечислимый числовой предикат с двумя переменными такой, что

$\forall m n(B(m,n)\supset c(n)\in \mathcal{K})$ и

(5) $\forall p\,(F(p)\equiv \forall m \neg\neg \exists n\,(B(m,n)\ \&\ p\in \sigma^{\emptyset}[c(n)]))$.

Мы определим для всяких НЧ m и ℓ

$C(m,\ell)\rightleftharpoons \neg\neg\exists n\,(B(m,n)\ \&\ c(\ell)\in \mathcal{K}\ \&\ \tau(\ell)=\tau(n)\ \&$

$\&\ \forall i\,(0\le i\le \tau(n)\supset \sigma(n,i)=\min(\sigma(\ell,i),1)))$.

Тогда, очевидно, C $\emptyset^{(j)}$-рекурсивно перечислимый числовой предикат и ввиду (4) и (5) выполнено

(6) $\forall p\,(F(p)\equiv \forall m\neg\neg\exists \ell\,(C(m,\ell)\ \&\ p\in \sigma^{\emptyset}[c(\ell)]))$.

Мы построим $\emptyset^{(j)}$-рекурсивно перечислимый числовой предикат A такой, что для всяких НЧ m и n верно

$$A(m,n)\equiv \neg\neg\exists k\ell\,(C(m,k)\ \&\ C(m,\ell)\ \&\ c(n)\in \mathcal{J}\ \&$$
$$(c(n)\ \overline{\underline{\nabla}}\ c(f_1(k))\ \nabla\ c(f_2(\ell)))\ \&$$
$$\&\ (k=\ell \vee c(f_2(k))=c(f_1(\ell))))\ .$$

Тогда, очевидно, выполнено

$\forall m x\,(\neg\neg\exists n\,(A(m,n)\ \&\ x\in c(n))$

$\equiv (0<x<1\ \&\ \forall p\,(p\in \mathcal{R}^{\emptyset}\ \&\ c(f(p))=x\supset\neg\neg\exists\ell\,(C(m,\ell)\ \&$

$p\in\sigma^{\emptyset}[c(\ell)]))))$

и, следовательно, ввиду (3),(4) и (6) имеет место

(7) $\forall x\,(E(x)\equiv \forall m\neg\neg\exists n\,(A(m,n)\ \&\ x\in c(n)))$.

2) Пусть A $\emptyset^{(j)}$-рекурсивно перечислимый числовой предикат, для которого верно $\forall m n\,(A(m,n)\supset c(n)\in \mathcal{J})$ и (7).

Мы для всяких НЧ m и n определим

$$B(m,n)\rightleftharpoons (c(n)\in \mathcal{K}\ \&\ \neg\neg\exists\ell\,(A(m,\ell)\ \&\ c(f_1(n))\in c(\ell)\ \&$$
$$c(f_2(n))\in c(\ell)))\ .$$

Тогда B $\emptyset^{(j)}$-рекурсивно перечислимый числовой предикат и, очевидно, выполнено (5).

3) На основании 1) и 2) мы получаем: $\wedge S(E(S))$ является множеством типа $G_{\sigma}^{\emptyset(j)}$ (соотв. $G^{\emptyset(j)}$) тогда и только тогда, когда $\{p \mid F(p)\}$ является множеством того же типа. Ввиду использованных нами рассуждений видно, что $\wedge S(E(S))$ является классически открытым множеством в том и только том случае, если $\{p \mid F(p)\}$ является таким множеством.

К возрастающей всюду на $\mathcal{D}$ определенной КФДП $\frac{x}{1+2\cdot|x|}+\frac{1}{2}$, отображающей $\mathcal{D}$ на интервал $0 \triangledown 1$, существует определенная на $0 \triangledown 1$ обратная КФДП. Ввиду этого, исследуя $\mathcal{D}$-области определения КФДП и их дополнения до $\mathcal{D}$, мы можем ограничиться, не теряя общности, рассмотрением КФДП, $\mathcal{D}$-область определения которых содержится в $0 \triangledown 1$.

Замечание 4. Пусть $\mathcal{F}$ КФДП, $\forall x(!\mathcal{F}(x) \supset 0 < x < 1)$, а v_0 НЧ, $v_0 \in \mathcal{R}^{\emptyset}$. Тогда, как известно ([7],[3]), существуют НЧ $\varkappa_0$ и $\varkappa_1$ такие, что $\forall S(!\mathcal{F}(S) \equiv !\varphi_{\varkappa_0}^{\emptyset}(\kappa(S)))$ & $\forall n((!\varphi_{\varkappa_0}^{\emptyset}(n) \supset \varphi_{\varkappa_0}^{\emptyset}(n) = v_0)\ \&\ (\varphi_{\varkappa_1}^{\emptyset}(n) \simeq \varphi_{\varkappa_0}^{\emptyset}(f(n))))$,

где f $\emptyset$-ОРФ из замечания 3. Следовательно, $\forall p(p \in \mathcal{R}^{\emptyset} \supset (!\mathcal{F}(c(f(p))) \equiv !\varphi_{\varkappa_1}^{\emptyset}(p)))$ и $\varphi_{\varkappa_1}^{\emptyset}$ $\emptyset$-оператор типа $(\mathcal{R}^{\emptyset} \to \mathcal{R}^{\emptyset})$. Как показано в замечании 3, множества $\wedge S(S \in \mathcal{D}\ \&\ !\mathcal{F}(S))$ и $\{p \mid p \in \mathcal{R}^{\emptyset}\ \&\ !\varphi_{\varkappa_1}^{\emptyset}(p)\}$ (соотв. множества $\wedge S(S \in \mathcal{D}\ \&$ $\&\ 0 < S < 1\ \&\ \neg !\mathcal{F}(S))$ и $\{p \mid p \in \mathcal{R}^{\emptyset}\ \&\ 0 < c(f(p)) < 1\ \&\ \neg !\varphi_{\varkappa_1}^{\emptyset}(p)\}$ являются множествами одинакового типа.

Итак, ввиду теорем 1, 2 и 4 верны следующие утверждения.

<u>Теорема 5</u>. Пусть $\mathcal{F}$ КФДП. Тогда $\mathfrak{D}$ -область определения $\mathcal{F}$,т.е. $\wedge S(S\in\mathfrak{D}\,\&\,!\,\mathcal{F}(S))$, - множество типа $G_{\sigma}^{\emptyset}$, а ее дополнение до $\mathfrak{D}$, т.е. $\wedge S(S\in\mathfrak{D}\,\&\,\neg\,!\,\mathcal{F}(S))$ - множество типа $G_{\sigma}^{\emptyset'}$.

<u>Следствие</u>. Пусть $\{\mathcal{F}_n\}_n$ последовательность КФДП такая, что $\forall n a b\,(a<b\supset\neg\neg\exists x\,(a<x<b\,\&\,!\,\mathcal{F}_n\,(x)))$. Тогда $\forall a b\,(a<b\supset\exists x\,(a<x<b\,\&\,\forall n\,(\,!\,\mathcal{F}_n\,(x))))$.

<u>Теорема 6</u>. $\mathfrak{D}$ -область определения КФДП является классически открытым множеством тогда и только тогда, когда она множество типа $G^{\emptyset^{(3)}}$.

Используя метод Фридберга и свойства множества $\emptyset^{(3)}$, мы можем построить следующий пример.

Пример 2. Существует КФДП такая, что ее $\mathfrak{D}$ -область определения - классически открытое множество, содержится в $0\nabla 1$ и не является множеством типа $G^{\emptyset^{(2)}}$.

На основании этого примера и замечания 4 мы получаем следующее.

Пример 3. Существует $\emptyset$ -оператор типа $(\mathcal{R}^{\emptyset}\to\mathcal{R}^{\emptyset})$ такой, что его $\mathcal{R}^{\emptyset}$ -область определения классически открытое множество, которое не является множеством типа $G^{\emptyset^{(2)}}$.

Мы заметим, что релятивизуя понятия КДЧ и КФДП, мы можем на случай конструктивных функций перенести и теоремы 2 и 3 и пример 1.

Литература

[1] МАРКОВ А.А.: Теория алгорифмов, Труды Мат. инст. им.В.А. Стеклова XLII (1954).

[2] ШАНИН Н.А.: Конструктивные вещественные числа и конструктивные функциональные пространства, Труды Мат. инст. им. В.А. Стеклова LXVII (1962), 15-294.

[3] РОДЖЕРС Х.: Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость, Москва 1972.

[4] ШАНИН Н.А.: О конструктивном понимании математических суждений, Труды Мат. инст. им. В.А. Стеклова LII (1958), 226-311.

[5] MOSCHOVAKIS Y.N.: Recursive metric spaces, Fundamenta Math. LV(1964), 215-238.

[6] ЦЕЙТИН Г.С.: Три теоремы о конструктивных функциях, Труды Мат. инст. им. В.А. Стеклова LXXII (1964), 537-543.

[7] ДЕТЛОВС В.К.: Эквивалентность нормальных алгорифмов и рекурсивных функций, Труды Мат. инст. им. В.А. Стеклова LII (1958), 75-139.

Matematicko-fyzikální fakulta

Karlova universita

Malostranské nám. 25, Praha 1

Československo

(Oblatum 15.6.1976)