Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae

Osvald Demuth

О псевдодифференцируемости равномерно непрерывных конструктивных функций на конструктивных действительных числах

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, Vol. 19 (1978), No. 2, 319--333

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/105856

COMMENTATIONES MATHEMATICAE UNIVERSITATIS CAROLINAE

19,2 (1978)

О ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТИ РАВНОМЕРНО НЕПРЕРЫВНЫХ КОНСТРУКТИВНЫХ ФУНКЦИЙ НА КОНСТРУКТИВНЫХ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЛАХ

О. ДЕМУТ (O. DEMUTH), Прага

Содержание: Доказано, что для любой равномерно непрерывной на $0 \Delta 1$ конструктивной функции $\mathcal{F}$ выполнено: для С-почти всех конструктивных действительных чисел x из $0 \Delta 1$ не может не быть или нижнее производное число функции $\mathcal{F}$ в точке x равно $-\infty$ и верхнее производное число $\mathcal{F}$ в x равно $+\infty$ или $\mathcal{F}$ конечно псевдодифференцируема в точке x.

Ключевые слова: Конструктивное действительное число, конструктивная функция, псевдодифференцируемость.

AMS: Primary 02E99
Secondary 26A24

В следующем $k, l, m, n, p, q, s, t, \varkappa$ и σ - переменные для натуральных чисел (НЧ), i и j - переменные для целых чисел (ЦЧ), a, b, c и d - переменнне для РЧ, v, w, x, y и z - переменные для КДЧ и ξ и η - переменные для ОЗС (см. [7]). Π обозначает множество всех псевдочисел (ПЧ). Понятия функции и покрытия введены в [5].

Для любых РЧ a и b, функции $\mathcal{F}$, сегмента $v \Delta w$ и КДЧ z мы обозначим $[a, b] \rightleftharpoons \min(a, b) \Delta \max(a, b)$, $\Delta(\mathcal{F}, v \Delta w) \rightleftharpoons (\mathcal{F}(w) - \mathcal{F}(v))$, а посредством h_z функцию такую, что $\forall x (h_z(x) \simeq z \cdot \max(\min(x, 1), 0))$.

В дальнейшем мы пользуемся следующими обозначениями из [7] - [9].

1) $\mathcal{L}$ арифметически полный алгорифм, перечисляющий без повторений все невырожденные рациональные сегменты;

2) обозначения $\{C^{(\ell)}\}_\ell$, $\mathcal{K}(C)$ и $[\mathcal{F}, C]$, где C рекурсивно перечислимое (р.п.) множество НЧ и $\mathcal{F}$ функция, введены в [7], стр. 317, и [8], стр. 574-585.

В [2] построена возрастающая на $0 \Delta 1$ функция, удовлетворяющая условию Липшица, которая не является дифференцируемой (в конструктивном, т.е. эффективном, смысле) ни в одном КДЧ из $0 \Delta 1$. В [7] - [9] были определены понятия и обозначения, связанные с псевдодифференцируемостью, т.е. дифференцируемостью в классическом (и, таким образом, не обязательно эффективном) смысле. Мы напомним, что для всяких функции $\mathcal{F}$, КДЧ x и ПЧ η $D_{кл}(\eta, \mathcal{F}, x)$ (соотв. $D_{кл}(+\infty, \mathcal{F}, x)$, соотв. $D_{кл}(-\infty, \mathcal{F}, x)$) обозначает: η (соотв. $+\infty$, соотв. $-\infty$) является значением псевдопроизводной функции $\mathcal{F}$ в точке x, $D_{кл}(\mathcal{F}, x)$ обозначает: $\mathcal{F}$ конечно псевдодифференцируема в точке x, $\underline{D}_{кл}(-\infty, \mathcal{F}, x)$ (соотв. $\overline{D}_{кл}(+\infty, \mathcal{F}, x)$) обозначает: $-\infty$ (соотв. $+\infty$) является нижним (соотв. верхним) производным числом функции $\mathcal{F}$ в точке x.

Согласно лемме 2 из [8] верно

$$(1) \qquad D_{кл}(\mathcal{F}, x) \equiv \exists \xi (\xi \in \Pi \,\&\, D_{кл}(\xi, \mathcal{F}, x)).$$

В [4] введены понятия "почти всюду" для КДЧ и измеримости по Лебегу для множеств КДЧ, которые оказались полезными в многих областях конструктивного анализа. Следующая лемма и построенный на ее основе пример показывают, что в определенных обстоятельствах эти понятия могут "не сработать". В настоящей заметке вводится понятие " С-почти всюду" для КДЧ, которое является, как мы увидим, полезным в связи с изучением псевдодифференцируемости функций на КДЧ.

<u>Замечание 1</u>. Пусть $\{\mathfrak{M}_n\}_n \in \mathbf{M}$ (см. [4]). Тогда мы для любого сегмента $v \Delta w$, $v \Delta w \subseteq 0 \Delta 1$, определим $\mu(\{\mathfrak{M}_n\}_n \cap v \Delta w) \rightleftharpoons \int_v^w \chi[\{\mathfrak{M}_n\}_n]$.

Мы заметим, что существует $\{\mathfrak{N}_n\}_n \in \mathbf{M}$ такое, что $\forall x (x \in \{\mathfrak{N}_n\}_n \equiv (x \in v \Delta w \,\&\, x \in \{\mathfrak{M}_n\}_n))$.

На основании [3], [4] и следствия теоремы 2 из [6] можно доказать следующее утверждение.

<u>Лемма 1</u>. Пусть Φ покрытие и $\{\mathfrak{M}_n\}_n \in \mathbf{M}$ такие, что $\forall k (\sum_{i=1}^{k} |\Phi_i| < 1 - \mu(\{\mathfrak{M}_n\}_n))$. Тогда
$\forall k \exists l (k < l \,\&\, \mu(\{\mathfrak{M}_n\}_n \cap \Phi_l) < 2^{-k} \cdot |\Phi_l|)$.

Ввиду этой леммы легко построить неубывающую функцию $\mathcal{F}$ такую, что для любого $\{\mathfrak{M}_n\}_n \in \mathbf{M}$, $\mu(\{\mathfrak{M}_n\}_n) < 1$, существует КДЧ x, для которого верно
$0 < x < 1 \,\&\, \neg (x \in \{\mathfrak{M}_n\}_n) \,\&\, \mathrm{D}(+\infty, \mathcal{F}, x)$.

Определения. 1) Пусть $\mathcal{F}$ функция, а x КДЧ. Тогда мы посредством $\underline{\mathrm{D}}[\mathcal{F}](x) < 1$ обозначим:

$$\neg\neg \exists m \forall n \exists a b (a < x < b \,\&\, b - a < 2^{-n} \,\&\, \&\, \Delta(\mathcal{F}, a \Delta b) < (1 - 2^{-m}) \cdot |a \Delta b|),$$

т.е. нижнее производное число функции $\mathcal{F}$ в точке x меньше чем 1.

2) Пусть $\mathcal{S}$ свойство КДЧ. Мы скажем, что $\mathcal{S}(x)$ выполнено для С-почти всех КДЧ x из $0 \Delta 1$, если для всякого НЧ m существует неубывающая функция $\mathcal{G}$ такая, что
$\Delta(\mathcal{G}, 0 \Delta 1) < 2^{-m} \,\&\, \forall x (x \in 0 \triangledown 1 \,\&\, \underline{\mathrm{D}}[\mathcal{G}](x) < 1 \supset \mathcal{S}(x))$.

Замечание 2. 1) Если $\mathcal{F}$ функция и $a \Delta b$ сегмент такие, что $\Delta(\mathcal{F}, a \Delta b) < |a \Delta b|$, то легко построить КДЧ x, для которого выполнено $x \in a \nabla b \ \& \ \underline{D}[\mathcal{F}](x) < 1$.

2) Пусть $\{\mathcal{S}_n\}_n$ последовательность свойств КДЧ такая, что для всякого НЧ n для С-почти всех КДЧ x из $0 \Delta 1$ выполнено $\mathcal{S}_n(x)$. Тогда для С-почти всех КДЧ x из $0 \Delta 1$ верно $\forall n\, \mathcal{S}_n(x)$.

3) Пусть $\mathcal{Y}$ S_σ-множество (см. [4]) меры меньшей чем z, где $z \leq 1$. Тогда существует неубывающая функция $\mathcal{F}$ такая, что $\mathcal{F}(0) = 0 \ \& \ \mathcal{F}(1) < z \ \& \ \forall x\, (x \in 0 \nabla 1 \ \& \ x \in \mathcal{Y} \supset D_{кл}(1, \mathcal{F}, x))$.

4) Пусть $\mathcal{S}$ свойство КДЧ. Тогда

а) если $\mathcal{S}(x)$ выполнено для почти всех КДЧ x из $0 \Delta 1$ (см. [4], стр. 464), то $\mathcal{S}(x)$ выполнено для С-почти всех КДЧ x из $0 \Delta 1$.

б) если существует неубывающая функция $\mathcal{G}$ такая, что
$$\forall x\, (x \in 0 \nabla 1 \ \& \ \neg D_{кл}(+\infty, \mathcal{G}, x) \supset \mathcal{S}(x)),$$
то $\mathcal{S}(x)$ выполнено для С-почти всех КДЧ x из $0 \Delta 1$;

в) если $\mathcal{S}(x)$ выполнено для С-почти всех КДЧ x из $0 \Delta 1$, то существует неубывающая функция $\mathcal{G}$ такая, что
$$\forall x\, (x \in 0 \nabla 1 \ \& \ \neg D_{кл}(+\infty, \mathcal{G}, x) \supset \neg\neg \mathcal{S}(x)).$$

Лемма 2. Пусть $\mathcal{G}$ неубывающая функция и $\{\mathfrak{M}_n\}_n \in M$ такие, что для С-почти всех КДЧ x из $0 \Delta 1$ верно $(\underline{D}[\mathcal{G}](x) < 1 \supset \neg(x \in \{\mathfrak{M}_n\}_n))$. Тогда
$$\forall y z\, (0 \leq y < z \leq 1 \supset \mu(\{\mathfrak{M}_n\}_n \cap y \Delta z) \leq \Delta(\mathcal{G}, y \Delta z)).$$

Следствие. Пусть $\mathcal{S}$ свойство КДЧ и $\{\mathfrak{M}_n\}_n \in M$ такие, что для С-почти всех КДЧ x из $0 \Delta 1$ выполнено $\mathcal{S}(x)$ &

$(x \in \{\mathfrak{M}_n\}_n \supset \neg \mathcal{S}(x))$. Тогда $\mu(\{\mathfrak{M}_n\}_n) = 0$.

Индукцией по τ легко доказать следующее утверждение.

<u>Лемма 3</u>. Пусть δ положительное РЧ, τ ЦЧ, $0 \le \tau$, и $\{\{a_{i,j}\}_{j=0}^{2}\}_{i=1}^{\tau}$ система систем РЧ, содержащихся в $0 \Delta 1$, такая, что $\forall i (1 \le i \le \tau \supset (a_{i,0} \le a_{i,1} < a_{i,2} \vee a_{i,2} < a_{i,1} \le a_{i,0}) \& |a_{i,0} - a_{i,1}| \le \delta \cdot |a_{i,1} - a_{i,2}|)$. Тогда существуют система ЦЧ $\{v_i\}_{i=1}^{\tau}$, НЧ σ, системы РЧ $\{c_j\}_{j=0}^{\sigma}$ и $\{d_j\}_{j=0}^{\sigma}$ и полигональная функция $\mathcal{F}$ такие, что $\forall i (1 \le i \le \tau \supset 0 \le v_i \le 1 \&$
$(v_i = 0 \equiv [a_{i,0}, a_{i,2}] \subseteq \bigcup_{j=1}^{\tau} [a_{j,1}, a_{j,2}])) \& 0 = c_0 < c_1 < \ldots < c_\sigma = 1 \&$
$\forall b (0 < b < 1 \supset (\exists j (1 \le j < \sigma \& b = c_j) \equiv \exists i j (1 \le i \le \tau \& 0 \le j \le 2 \&$
$b = a_{i,j}))) \& d_0 = d_\sigma = 0 \& \forall j (1 \le j \le \sigma \supset (c_{j-1} \nabla c_j \subseteq (0 \Delta 1 \setminus \bigcup_{\substack{1 \le i \le \tau \\ v_i = 1}} [a_{i,0},$
$a_{i,2}]) \supset d_{j-1} = d_j = 0) \& (c_{j-1} \nabla c_j \subseteq (\bigcup_{i=1}^{\tau} [a_{i,0}, a_{i,1}] \setminus \bigcup_{l=1}^{\tau} [a_{l,1}, a_{l,2}]) \supset$
$\supset \frac{d_j - d_{j-1}}{c_j - c_{j-1}} = 1) \& (c_{j-1} \nabla c_j \subseteq \bigcup_{\substack{1 \le i \le \tau \\ v_i = 1}} [a_{i,1}, a_{i,2}] \supset -2 \cdot \delta \le \frac{d_j - d_{j-1}}{c_j - c_{j-1}} \le 0) \&$

$(c_{j-1} \nabla c_j \subseteq (\bigcup_{\substack{1 \le i \le \tau \\ v_i = 0}} [a_{i,1}, a_{i,2}] \setminus \bigcup_{\substack{1 \le l \le \tau \\ v_l = 1}} [a_{l,1}, a_{l,2}]) \supset d_{j-1} = d_j) \&$

$|d_j| \le 2\delta \cdot \max_{\substack{1 \le i \le \tau \\ v_i = 1}} |[a_{i,1}, a_{i,2}]|)$

и

$$\forall x (\mathcal{F}(x) = \sum_{j=1}^{\sigma} \frac{d_j - d_{j-1}}{c_j - c_{j-1}} \cdot (\max(\min(x, c_j), c_{j-1}) - c_{j-1})).$$

На основании леммы 3 можно доказать следующее утверждение.

<u>Лемма 4</u>. Пусть C р.п. множество НЧ, $\mathcal{K}(C)$, а p НЧ. Тогда для C-почти всех КДЧ x из $0 \Delta 1$ верно

$$\neg \forall k \neg \neg \exists l (k < l \& l \in C \& \text{Э}_n(b_{\llcorner} l_{\lrcorner}) - p \cdot |b_{\llcorner} l_{\lrcorner}| \le x \le$$
$$\le \text{Э}_n(b_{\llcorner} l_{\lrcorner}) + p \cdot |b_{\llcorner} l_{\lrcorner}|).$$

Следствие. Пусть $\mathcal{V}$ свойство рациональных сегментов и C р.п. множество НЧ такие, что $\mathcal{H}(C) \& \forall a b (0 < a < b < 1 \& \mathcal{V}(a \Delta b) \supset \exists \ell (\ell \in C \& \frac{1}{2} \cdot |a \Delta b| \le |b_{\llcorner} \ell_{\lrcorner}| \& \neg (a \Delta b \cap b_{\llcorner} \ell_{\lrcorner} = \emptyset)))$.

Тогда для C-почти всех КДЧ x из $0 \Delta 1$ верно

$\forall m \neg\neg \exists a b (a < x < b \& b - a < 2^{-m} \& \mathcal{V}(a \Delta b)) \supset \exists \ell (\ell \in C \& x \in (b_{\llcorner} \ell_{\lrcorner})^{0})$.

Замечание 3. На основании этого следствия и теоремы 7 из [7] мы получаем конструктивный аналог теоремы Д. Витали для КДЧ.

Теорема 1. Пусть $\mathcal{F}$ функция. Тогда для C-почти всех КДЧ x из $0 \Delta 1$ верно $\neg (D_{кл}(+\infty, \mathcal{F}, x) \vee D_{кл}(-\infty, \mathcal{F}, x))$.

Доказательство. а) Пусть $\mathcal{G}$ функция. Согласно лемме 4 из [8] существуют убывающая последовательность КДЧ $\{w_k\}_k$ и последовательность р.п. множеств НЧ $\{C_k\}_k$ такие, что для всякого НЧ k выполнено $w_k < -2^k \& \mathcal{H}(C_k) \& \forall \ell (\ell \in C_k \supset \exists m (1 \le m \le 2^k \& b_{\llcorner} \ell_{\lrcorner} \subseteq \frac{m-1}{2^k} \Delta \frac{m}{2^k}) \& \Delta(\mathcal{G}, b_{\llcorner} \ell_{\lrcorner}) < w_k \cdot |b_{\llcorner} \ell_{\lrcorner}|)$

и функция $([\mathcal{G}, C_k] - h_{(w_k - 1)})$ возрастает на $0 \Delta 1$. Тогда согласно замечанию 2 для C-почти всех КДЧ x из $0 \Delta 1$ верно

$$(2) \qquad \forall k \neg D_{кл}(+\infty, [\mathcal{G}, C_k], x).$$

Для любого КДЧ x из (2) следует $\neg D_{кл}(+\infty, \mathcal{G}, x)$.

б) Применив рассуждения из а) к $\mathcal{F}$ и $-\mathcal{F}$, мы на основании замечания 2 получаем требуемое.

Теорема 2. Пусть $\mathcal{F}$ неубывающая функция. Тогда для C-почти всех КДЧ x из $0 \Delta 1$ верно $\exists \xi (\xi \in \Pi \& D_{кл}(\xi, \mathcal{F}, x))$.

Доказательство. Ввиду леммы 3 из [8] и того, что любая неубывающая функция является равномерно непрерывной, существуют последовательность КДЧ $\{x_k\}_k$ и КДЧ x такие, что $\mathcal{Z}^D(\mathcal{F}, \{x_k\}_k) \& 0 < x \& \neg \exists k (x = x_k)$.

Для любых КДЧ x, РЧ δ и ЦЧ i, $0 < \delta \& 0 \le i \le 1$, мы определим $\mathcal{Q}_{\delta, i}(x) \rightleftharpoons \forall m \exists a b (a < x < b \& b - a < 2^{-m} \& \Delta(\mathcal{F}, a \Delta b) \cdot (-1)^i < \delta \cdot x \cdot (-1)^i)$.

1) Пусть c и d РЧ, $0 < c < d$. Мы используем лемму 3 из [8], теорему 7 из [7], следствие леммы 4 и замечание 2 и построим последовательности р.п. множеств НЧ $\{C_{0,k}\}_k$ и $\{C_{1,k}\}_k$ такие, что $\forall k (\mathcal{K}(C_{0,k}) \& \mathcal{K}(C_{1,k}) \& \forall \ell ((\ell \in C_{0,k} \supset \Delta(\mathcal{F}, \mathcal{L}_\llcorner \ell_\lrcorner) < c \cdot x \cdot |\mathcal{L}_\llcorner \ell_\lrcorner|) \& (\ell \in C_{1,k} \supset d \cdot x \cdot |\mathcal{L}_\llcorner \ell_\lrcorner| < \Delta(\mathcal{F}, \mathcal{L}_\llcorner \ell_\lrcorner)) \& (\ell \in C_{1,k} \supset \exists m (m \in C_{0,k} \& \mathcal{L}_\llcorner \ell_\lrcorner \subseteq \mathcal{L}_\llcorner m_\lrcorner)) \& (\ell \in C_{0,k+1} \supset \exists m (m \in C_{1,k} \& \mathcal{L}_\llcorner \ell_\lrcorner \subseteq \mathcal{L}_\llcorner m_\lrcorner))))$
и для С-почти всех КДЧ x из $0 \Delta 1$ выполнено

$$\mathcal{Q}_{c,0}(x) \& \mathcal{Q}_{d,1}(x) \supset \forall i k (0 \le i \le 1 \supset \exists \ell (\ell \in C_{i,k} \& x \in (\mathcal{L}_\llcorner \ell_\lrcorner)^0)). \tag{3}$$

Мы определим $\mathcal{F}_0 \rightleftharpoons \mathcal{F}$ и построим последовательности функций $\{\mathcal{F}_k\}_k$ и $\{\mathcal{G}_k\}_k$ такие, что для всякого НЧ k

$$\forall x (\mathcal{F}_k(x) = \frac{c}{d} \cdot [\mathcal{F}_{k-1}, C_{1,k}](x) + \sum_{\ell \in C_{0,k+1}} (\mathcal{F}(max(min(x, \Im_m(\mathcal{L}_\llcorner \ell_\lrcorner)), \Im_\lambda(\mathcal{L}_\llcorner \ell_\lrcorner))) - \mathcal{F}(\Im_\lambda(\mathcal{L}_\llcorner \ell_\lrcorner)) -$$
$$- \frac{\Delta(\mathcal{F}, \mathcal{L}_\llcorner \ell_\lrcorner)}{|\mathcal{L}_\llcorner \ell_\lrcorner|} \cdot (max(min(x, \Im_m(\mathcal{L}_\llcorner \ell_\lrcorner)), \Im_\lambda(\mathcal{L}_\llcorner \ell_\lrcorner)) - \Im_\lambda(\mathcal{L}_\llcorner \ell_\lrcorner)))),$$

$$\mathcal{G}_k = \frac{1}{d \cdot x} \cdot ([\mathcal{F}_k, C_{1,k+1}] - \mathcal{F}_k(0)).$$

Пользуясь индукцией, мы можем доказать, что для всякого НЧ k функции $\mathcal{F}_k$ и $\mathcal{G}_k$ являются неубывающими и верно

$$\forall \ell (\ell \in C_{1,k+1} \supset d \cdot x \cdot |\mathcal{L}_\llcorner \ell_\lrcorner| < \Delta(\mathcal{F}_k, \mathcal{L}_\llcorner \ell_\lrcorner) \& |\mathcal{L}_\llcorner \ell_\lrcorner| < \Delta(\mathcal{G}_k, \mathcal{L}_\llcorner \ell_\lrcorner)) \&$$
$$\mathcal{G}_k(0) = 0 \& \mathcal{G}_k(1) = \left(\frac{c}{d}\right)^k \cdot \frac{1}{d \cdot x} \cdot \Delta(\mathcal{F}, 0 \Delta 1).$$

Итак, существует неубывающая функция $\mathcal{G}$, для которой верно $\mathcal{G} = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathcal{G}_k$ и $\forall x (\forall k \exists l (l \in C_{1,k} \& x \in (\mathcal{L}_{\llcorner} l_{\lrcorner})^0) \supset D_{кл}(+\infty, \mathcal{G}, x))$.

Однако, как мы знаем, для С-почти всех КДЧ x из $0 \vartriangle 1$ верно $\neg D_{кл}(+\infty, \mathcal{G}, x)$ (теорема 1) и (3).

Таким образом, для С-почти всех КДЧ x из $0 \vartriangle 1$ выполнено $\neg (Q_{c,0}(x) \& Q_{d,1}(x))$.

2) Согласно 1) г замечанию 2 для С-почти всех КДЧ x из $0 \vartriangle 1$ верно $\neg D_{кл}(+\infty, \mathcal{F}, x) \& \forall c d (0 < c < d \supset \neg (Q_{c,0}(x) \& \& Q_{d,1}(x)))$ и, следовательно, $D_{кл}(\mathcal{F}, x)$ (см. [8], стр. 583) и ввиду (1) и $\exists \xi (\xi \in \Pi \& D_{кл}(\xi, \mathcal{F}, x))$.

Замечание 4. 1) Согласно теореме 2 всякая функция, представимая в виде разности неубывающих функций, - в частности, всякая функция ограниченной вариации на $0 \vartriangle 1$ - для С-почти всех КДЧ x из $0 \vartriangle 1$ конечно псевдодифференцируема в точке x. С другой стороны, существует равномерно непрерывная функция слабо ограниченной вариации, даже обладающая свойством $\mathcal{A}$ (см. [5], стр. 707), которая не является конечно псевдодифференцируемой ни в одном КДЧ из $0 \vartriangle 1$ (см. пример 3 из [9]).

2) Пусть Φ покрытие, $\forall k (\sum_{i=1}^{k} |\Phi_i| < \frac{1}{4})$, а $\mathcal{F}$ неубывающая функция, для которой выполнено $\forall k x (x \in \Phi_k \supset \mathcal{F}(x) = -\frac{1}{2} \cdot Э_л(\Phi_k) + max(min(x, \frac{1}{2} \cdot (Э_л(\Phi_k) + Э_п(\Phi_k))), Э_л(\Phi_k)))$.

Тогда для любых неубывающей функции $\mathcal{G}$, $\Delta(\mathcal{G}, 0 \vartriangle 1) < \frac{1}{4}$, и НЧ m существуют НЧ k и КДЧ x_1 и x_2 такие, что $m < k \& \Delta(\mathcal{G}, \Phi_k) < \frac{1}{2} \cdot |\Phi_k| \& x_1 \in \Phi_k \& x_2 \in \Phi_k \& \underline{D}[\mathcal{G}](x_1) < 1 \& \underline{D}[\mathcal{G}](x_2) < 1 \& D_{кл}(1, \mathcal{F}, x_1) \& D_{кл}(0, \mathcal{F}, x_2)$.

Таким образом, псевдодифференцируемость, утверждаемая теоремой 2, может не быть "С-почти псевдоравномерной".

Следующая теорема является конструктивным аналогом теоремы Данжуа-Янга ([1], стр. 271) для производных чисел на КДЧ.

<u>Теорема 3</u>. Пусть $\mathcal{F}$ равномерно непрерывная функция. Тогда для С-почти всех КДЧ x из $0 \vartriangle 1$ выполнено

$$\neg\neg(\underline{D}_{\kappa\lambda}(-\infty,\mathcal{F},x) \& \overline{D}_{\kappa\lambda}(+\infty,\mathcal{F},x) \vee \exists\xi(\xi \in \Pi \,\&\, D_{\kappa\lambda}(\xi,\mathcal{F},x))) .$$

Доказательство. Следующее доказательство является модификацией доказательства теоремы 1 из [9].

Пусть $\{x_k\}_k$ последовательность КДЧ и v КДЧ такие, что $\mathcal{X}_1^D(\mathcal{F},\{x_k\}_k) \& |\Delta(\mathcal{F}, 0 \vartriangle 1)| < v \,\&\, \neg\exists k\,(v = x_k)$ (см. лемму 1 из [9]). Мы используем лемму 2 из [9] и следствие леммы 4 и построим для всяких НЧ t и ЦЧ i , $0 \le i \le 1$, р.п. множество НЧ $C_{i,t}$ такое, что $\mathcal{H}(C_{i,t}) \& \forall l(l \in C_{i,t} \supset t \cdot v \cdot |\mathcal{B}_\llcorner l_\lrcorner| <$
$< \Delta(\mathcal{F}, \mathcal{B}_\llcorner l_\lrcorner) \cdot (-1)^i) \& \forall a b(0 < a < b < 1 \,\&\, t \cdot v \cdot |a \vartriangle b| < \Delta(\mathcal{F}, a \vartriangle b) \cdot$
$\cdot (-1)^i \supset \exists l(l \in C_{i,t} \,\&\, \frac{1}{2} \cdot |a \vartriangle b| \le$
$\le |\mathcal{B}_\llcorner l_\lrcorner| \,\&\, \neg(a \vartriangle b \cap \mathcal{B}_\llcorner l_\lrcorner = \emptyset)))$,
для С-почти всех КДЧ x из $0 \vartriangle 1$ верно $\forall m \exists a b(a < x < b \,\&\, b -$
$- a < 2^{-m} \,\&\, t \cdot v \cdot |a \vartriangle b| < \Delta(\mathcal{F}, a \vartriangle b) \cdot (-1)^i) \supset$
$\supset \exists l(l \in C_{i,t} \,\&\, x \in (\mathcal{B}_\llcorner l_\lrcorner)^0)$,
$([\mathcal{F}, C_{i,t}] - h_{(-1)^i \cdot t \cdot v \cdot \frac{3}{2}})$ монотонная функция и, следовательно, согласно теореме 2 для С-почти всех КДЧ x из $0 \vartriangle 1$ верно $\exists\eta(\eta \in \Pi \,\&\, D_{\kappa\lambda}(\eta, [\mathcal{F}, C_{i,t}], x))$.

Мы обозначим $\mathcal{F}_{i,t} \rightleftharpoons (\mathcal{F} - [\mathcal{F}, C_{i,t}])$.

Ввиду сказанного и замечания 2 ясно, что для С-почти всех КДЧ x из $0 \vartriangle 1$ выполнено

$$\forall i(0 \le i \le 1 \supset (\overline{D}_{\kappa\lambda}(+\infty, (-1)^i \cdot \mathcal{F}, x) \equiv \forall t \exists l(l \in C_{i,t} \,\&\, x \in (\mathcal{B}_\llcorner l_\lrcorner)^0))) .$$

Для завершения доказательства достаточно показать, что для всяких НЧ t и ЦЧ i, $0 \le i \le 1$, для С-почти всех КДЧ x из $0 \Delta 1$ выполнено $(\neg \exists \ell (\ell \in C_{i,t} \& x \in \mathcal{L}\llcorner \ell \lrcorner) \supset \mathrm{D}_{\kappa\pi}(0, \mathcal{F}_{i,t}, x))$.

Пусть t НЧ. Не теряя общности, мы можем ограничиться исследованием функции $\mathcal{F}_{0,t}$.

I) Согласно леммам 1 и 2 из [9] мы построим последовательность КДЧ $\{x_k^t\}_k$, КДЧ w и последовательность р.п. множеств НЧ $\{\mathrm{D}_\sigma\}_\sigma$ такие, что для всякого НЧ σ верно

$$\begin{aligned}
&\mathcal{Z}_1^{\mathrm{D}}([\mathcal{F}, C_{0,t}], \{x_k^t\}_k) \& 4 \cdot v \cdot t < w \& \neg \exists k (w = x_k^t) \& \mathcal{H}(\mathrm{D}_\sigma) \& \\
(4)\quad &\forall \ell (\ell \in \mathrm{D}_\sigma \supset \Delta([\mathcal{F}, C_{0,t}], \mathcal{L}\llcorner \ell \lrcorner) < -2^\sigma \cdot w \cdot |\mathcal{L}\llcorner \ell \lrcorner|) \& \\
&\forall a b (0 < a < b < 1 \& \Delta([\mathcal{F}, C_{0,t}], a \Delta b) < -2^\sigma \cdot w \cdot |a \Delta b| \supset \\
&\exists \ell (\ell \in \mathrm{D}_\sigma \& \tfrac{1}{2} \cdot |a \Delta b| \le |\mathcal{L}\llcorner \ell \lrcorner| \& \neg (a \Delta b \cap \mathcal{L}\llcorner \ell \lrcorner = \emptyset))) .
\end{aligned}$$

Ввиду выше отмеченных свойств функции $[\mathcal{F}, C_{0,t}]$ и последовательности $\{\mathrm{D}_\sigma\}_\sigma$, леммы 4 и замечания 2 существует неубывающая функция $\bar{\mathcal{G}}$ такая, что для всякого КДЧ x,

$$(5)\qquad 0 < x < 1 \& \neg \mathrm{D}_{\kappa\pi}(+\infty, \bar{\mathcal{G}}, x),$$

а) не может не существовать НЧ σ такое, что

$$(6)\qquad \neg \exists \ell (\ell \in \mathrm{D}_\sigma \& x \in \mathcal{L}\llcorner \ell \lrcorner), \qquad \text{и}$$

б) для всяких НЧ σ и q не может не существовать НЧ p, для которого выполнено

$$\begin{aligned}
(7)\quad &\neg \exists \ell (p < \ell \& \ell \in (C_{0,t} \cup \mathrm{D}_\sigma) \& \ni_n(\mathcal{L}\llcorner \ell \lrcorner) - 2^{q+4} \cdot |\mathcal{L}\llcorner \ell \lrcorner| \le x \le \\
&\ni_n(\mathcal{L}\llcorner \ell \lrcorner) + 2^{q+4} \cdot |\mathcal{L}\llcorner \ell \lrcorner|) .
\end{aligned}$$

Пусть x КДЧ такое, что (5) и $\neg \exists \ell (\ell \in C_{0,t} \& x \in \mathcal{L}\llcorner \ell \lrcorner)$, а σ, q и p НЧ, для которых верно (6) и (7). Тогда существует НЧ m такое, что

$$2^{-m} < x < 1-2^{-m} \mathbin{\&} \forall l\,(l \le p \mathbin{\&} l \in (C_{0,t} \cup D_{\sigma}) \supset$$
(8)
$$2^{-m} < \min(|x - \vartheta_{\lambda}(\mathscr{L}_{\llcorner} l_{\lrcorner})|, |x - \vartheta_{n}(\mathscr{L}_{\llcorner} l_{\lrcorner})|))$$

и, следовательно, ввиду свойств множества $C_{0,t}$, (4) и рассуждений из [9], стр. 116, верно

$$\forall a b\,(a < x < b \mathbin{\&} b - a < 2^{-m} \supset$$
(9)
$$\supset \Delta(\mathscr{F}_{0,t}, a \vartriangle b) \le \frac{1}{2^{q}} \cdot (w \cdot 2^{\sigma} + v \cdot t) \cdot |a \vartriangle b|) .$$

II) Согласно лемме 1 из [9] мы для функции $\mathscr{F}_{0,t}$ построим последовательность КДЧ $\{x^{0}_{k}\}_{k}$, алгорифм $\mathscr{R}$ и КДЧ x такие, что $\mathfrak{Z}^{D}_{1}(\mathscr{F}_{0,t}, \{x^{0}_{k}\}_{k}) \mathbin{\&} w + v \cdot t < x \mathbin{\&} \neg \exists k\,(x = x^{0}_{k})$ и алгорифм $\mathscr{R}$ обладает свойствами, описанными в названной лемме.

Пусть σ, q, p и m НЧ.

Мы построим НЧ $\bar{l}$ такое, что

$$p < \bar{l} \mathbin{\&} \forall l\,(\bar{l} < l \mathbin{\&} l \in C_{0,t} \supset \frac{1}{x \cdot 2^{\sigma - q}} \cdot$$
(10)
$$\cdot \langle \omega, \mathscr{F}_{0,t} \rangle_{\llcorner} \mathscr{L}_{\llcorner} l_{\lrcorner\lrcorner} + 5 \cdot |\mathscr{L}_{\llcorner} l_{\lrcorner}| < 2^{-m-3}) ,$$

где $\langle \omega, \mathscr{F}_{0,t} \rangle_{\llcorner} Q_{\lrcorner}$ – колебание функции $\mathscr{F}_{0,t}$ на сегменте Q .

1) Пусть l НЧ, $\bar{l} < l \mathbin{\&} l \in C_{0,t}$. Мы определим для ЦЧ i и j, $0 \le i \le 1 \mathbin{\&} 0 \le j \le 1$, $a^{l}_{j} \rightleftharpoons \vartheta_{\lambda}(\mathscr{L}_{\llcorner} l_{\lrcorner}) - (2+j) \cdot (-1)^{j} \cdot |\mathscr{L}_{\llcorner} l_{\lrcorner}|$ и $P^{l}_{i,j} \rightleftharpoons \mathscr{R}_{\llcorner} i \,\square\, (-1)^{i} \cdot 2^{2i+\sigma-q} \cdot x \,\square\, a^{l}_{j} \,\square\, \mathscr{L}_{\llcorner} l_{\lrcorner\lrcorner}$.

Пусть j ЦЧ, $0 \le j \le 1$.

Если $P^{l}_{1,j} \doteq \Lambda$, то мы определим $c^{l}_{j} \rightleftharpoons a^{l}_{j}$ и $d^{l}_{1-j} \rightleftharpoons a^{l}_{1-j}$.

Пусть $\neg(P^{l}_{1,j} \doteq \Lambda)$. Тогда $\neg(P^{l}_{0,1-j} \doteq \Lambda)$ и $|P^{l}_{1,j} - a^{l}_{j}| < \frac{1}{4} \cdot |P^{l}_{0,1-j} - a^{l}_{1-j}|$. Мы построим РЧ c^{l}_{j} и d^{l}_{1-j}, для которых верно $0 < (c^{l}_{j} - P^{l}_{1,j}) \cdot (P^{l}_{1,j} - a^{l}_{j}) \mathbin{\&} 0 < (P^{l}_{0,1-j} - d^{l}_{1-j}) \cdot (d^{l}_{1-j} - a^{l}_{1-j}) \mathbin{\&}$ $|c^{l}_{j} - a^{l}_{j}| < \frac{1}{4} \cdot |d^{l}_{1-j} - a^{l}_{1-j}|$ и, следовательно, $|c^{l}_{j} - a^{l}_{j}| < \frac{1}{4} \cdot$ $\cdot |d^{l}_{1-j} - a^{l}_{j}|$.

Мы заметим, что $\neg(d_0^\ell \Delta d_1^\ell \subseteq c_0^\ell \nabla c_1^\ell)$.

2) Мы обозначим посредством E р.п. множество НЧ такое, что $\mathcal{H}(\mathrm{E}) \& \forall \ell(\ell \in \mathrm{E} \equiv (\bar{\ell} < \ell \& \ell \in C_{0,t} \& \mathcal{b}\llcorner \ell \lrcorner \subseteq$
$\subseteq 2^{-m-1} \Delta (1-2^{-m-1}) \& \neg(c_0^\ell \Delta c_1^\ell \subseteq d_0^\ell \Delta d_1^\ell)))$.

Для любых НЧ ℓ и $\varkappa$, $\ell \in \mathrm{E}$, пусть j_ℓ ЦЧ такое, что $0 \leq j_\ell \leq 1 \& \neg(c_{j_\ell}^\ell \in d_0^\ell \Delta d_1^\ell)$, $\bar{b}_{\varkappa,\ell,0} \rightleftharpoons d_0^\ell - 2^{-m-\varkappa-2} \cdot 2^{-\ell}$,
$\bar{b}_{\varkappa,\ell,1} \rightleftharpoons \bar{b}_{\varkappa,\ell,0}$, $\bar{b}_{\varkappa,\ell,2} \rightleftharpoons d_1^\ell + 2^{-m-\varkappa-2} \cdot 2^{-\ell}$, $\bar{\bar{b}}_{\ell,0} \rightleftharpoons c_{j_\ell}^\ell$,
$\bar{\bar{b}}_{\ell,1} \rightleftharpoons d_{j_\ell}^\ell$ и $\bar{\bar{b}}_{\ell,2} \rightleftharpoons d_{1-j_\ell}^\ell$.

Ввиду 1), (10), $\mathcal{H}(\mathrm{E})$ и замечания 2 выполнено
$\forall \varkappa \ell (\ell \in \mathrm{E} \supset |[\bar{\bar{b}}_{\ell,0}, \bar{\bar{b}}_{\ell,1}]| < \frac{1}{4} \cdot |[\bar{\bar{b}}_{\ell,1}, \bar{\bar{b}}_{\ell,2}]| \&$
$\& |[\bar{\bar{b}}_{\ell,0}, \bar{\bar{b}}_{\ell,2}]| < 2^{-m-1} \& 0 < \bar{b}_{\varkappa,\ell,0} < \bar{b}_{\varkappa,\ell,2} < 1)$
и существует неубывающая функция $\mathcal{G}^1$ такая, что $0 \leq \mathcal{G}^1 \leq 1$ и для всякого КДЧ x , для которого верно $x \in 0 \nabla 1 \&$
$\neg \mathrm{D}_{\text{КЛ}}(+\infty, \mathcal{G}^1, x)$, не может не существовать НЧ $\varkappa$ такое, что

$$\neg \exists \ell i (\ell \in \mathrm{E} \& 0 \leq i \leq 1 \& x \in [d_i^\ell, d_i^\ell - (-1)^i \cdot 2^{-m-\varkappa-2} \cdot 2^{-\ell}]) . \tag{11}$$

3) Согласно свойствам алгорифма $\mathcal{R}$ и замечанию 1 из [9] для любого КДЧ x , для которого верно

$$\neg \exists \ell (\ell \in C_{0,t} \& x \in \mathcal{b}\llcorner \ell \lrcorner) \tag{12}$$

и (7) - (9), выполнено $\neg \exists \ell (\ell \in \mathrm{E} \& x \in [\bar{\bar{b}}_{\ell,1}, \bar{\bar{b}}_{\ell,2}])$
и если имеет место

$$\forall k \exists a b (a < x < b \& b - a < 2^{-k} \& \Delta(\mathcal{F}_{0,t}, a \Delta b) < -2^{2+6-q} \cdot x \cdot |a \Delta b|) , \tag{13}$$

то верно $\forall k \exists \ell (k < \ell \& \ell \in \mathrm{E} \& x \in ([\bar{\bar{b}}_{\ell,0}, \bar{\bar{b}}_{\ell,1}])^0)$.

4) Мы определим $q_0 \rightleftharpoons 1$ и построим возрастающую последовательность НЧ $\{q_k\}_k$ такую, что

$$1 < q_1 \mathbin{\&} \forall k \ell (\ell \in (E \setminus E^{(q_k)}) \supset \forall s ((s \in E^{(q_{k-1})} \vee s = q_{k-1}) \supset \tag{14}$$
$$| [\![\bar{\bar{b}}_{\ell,0}, \bar{\bar{b}}_{\ell,2}]\!] | < 2^{-k-m-3} \cdot 2^{-s-1})) .$$

Для любых НЧ $\varkappa$ и n пусть $\{\{ b^{\varkappa,n}_{\ell,j} \}^2_{j=0} \}_{\ell \in E^{(q_{\varkappa+n})}}$ система систем РЧ такая, что $\forall \ell j (0 \le j \le 2 \mathbin{\&} (\ell \in E^{(q_{\varkappa+n-1})} \supset b^{\varkappa,n}_{\ell,j} \rightleftharpoons \bar{b}_{\varkappa,\ell,j}) \mathbin{\&} (\ell \in (E^{(q_{\varkappa+n})} \setminus E^{(q_{\varkappa+n-1})}) \supset b^{\varkappa,n}_{\ell,j} \rightleftharpoons \bar{\bar{b}}_{\ell,j}))$, а $f_{\varkappa,n}$ полигональная функция, построенная по этой системе согласно лемме 3.

Тогда для любых НЧ $\varkappa$ и n

а) $f_{\varkappa,n}(0) = f_{\varkappa,n}(1) = 0 \mathbin{\&} |f_{\varkappa,n}| < 2^{-\varkappa-n}$, $(h_{2^{-1}} + f_{\varkappa,n})$

неубывающая функция и если $f_{\varkappa,n}$ является убывающей на сегменте $a \Delta b$, то $a \Delta b \subseteq \bigcup_{\ell \in (E^{(q_{\varkappa+n})} \setminus E^{(q_{\varkappa+n-1})})} [\![\bar{\bar{b}}_{\ell,1}, \bar{\bar{b}}_{\ell,2}]\!]$;

б) для всякого КДЧ x такого, что (11) и $x \in 0 \triangledown 1 \mathbin{\&}$ $\mathbin{\&} \underline{D}[f_{\varkappa,n}](x) < 1$, верно
$\neg (x \in (\bigcup_{\ell \in (E^{(q_{\varkappa+n})} \setminus E^{(q_{\varkappa+n-1})})} ([\![\bar{\bar{b}}_{k,0}, \bar{\bar{b}}_{k,1}]\!])^0 \setminus \bigcup_{k \in E^{(q_{\varkappa+n})}} [\![\bar{\bar{b}}_{\ell,1}, \bar{\bar{b}}_{\ell,2}]\!]))$;

в) если s и ℓ НЧ, $n + 2 \le s \mathbin{\&} \ell \in (E^{(q_{\varkappa+n})} \setminus E^{(q_{\varkappa+n-1})})$, то ввиду (14) функция $f_{\varkappa,s}$ является постоянной на сегменте $[\![\bar{\bar{b}}_{\ell,1}, \bar{\bar{b}}_{\ell,2}]\!]$.

Итак, для всякого НЧ $\varkappa$ существует неубывающая функция $g^2_\varkappa$ такая, что $g^2_\varkappa \rightleftharpoons h_1 + \sum_{n=1}^{\infty} f_{\varkappa,n}$, $0 \le g^2_\varkappa \le 1$ и если x КДЧ такое, что (7) - (9) и (11) - (13), то $D_{КЛ}(+\infty, g^2_\varkappa, x)$.

Мы определим $g_{\sigma,q,p,m} \rightleftharpoons g^1 + \sum_{\varkappa=1}^{\infty} 2^{-\varkappa} \cdot g^2_\varkappa$. Ясно, что $g_{\sigma,q,p,m}$ неубывающая функция и $0 \le g_{\sigma,q,p,m} \le 2$.

III) Мы определим
$$g \rightleftharpoons (\bar{g} + \sum_{\sigma=1}^{\infty} (\sum_{q=1}^{\infty} (\sum_{p=1}^{\infty} (\sum_{m=1}^{\infty} 2^{-\sigma-q-p-m} \cdot g_{\sigma,q,p,m})))) .$$

Тогда $\mathcal{G}$ неубывающая функция и ввиду I и II верно $\forall x (x \in 0 \triangledown 1 \,\&\, \neg \exists \ell (\ell \in C_{0,t} \,\&\, x \in \mathcal{L}_{\llcorner}\ell_{\lrcorner}) \,\&\, \neg D_{\kappa\lambda}(+\infty, \mathcal{G}, x) \supset D_{\kappa\lambda}(0, \mathcal{F}_{0,t}, x))$.

Пример. Для любого НЧ s существует функция $\mathcal{F}$ такая, что

а) $\mathcal{F}$ псевдоравномерно непрерывная функция слабо ограниченной вариации и $\mathcal{A}_{\kappa\lambda}(\mathcal{F})$ (опр. см. в [10]);

б) $\forall x (\neg \underline{D}_{\kappa\lambda}(-\infty, \mathcal{F}, x) \,\&\, \neg \overline{D}_{\kappa\lambda}(+\infty, \mathcal{F}, x))$;

в) для всякой неубывающей функции $\mathcal{G}$, $\Delta(\mathcal{G}, 0 \vartriangle 1) < 1 - 2^{-s}$ не может не существовать КДЧ x такое, что $x \in 0 \triangledown 1 \,\&\, \underline{D}[\mathcal{G}](x) < 1 \,\&\, \neg D_{\kappa\lambda}(\mathcal{F}, x)$.

Итак, предположение равномерной непрерывности функции в теореме 3 является существенным.

Л и т е р а т у р а

[1] SAKS S.: Theory of the Integral, New York 1937.

[2] ДЕМУТ О.: О дифференцируемости конструктивных функций, Comment.Math.Univ. Carolinae 10(1969), 167-175.

[3] ДЕМУТ О.: Пространства L_{κ} и S в конструктивной математике, Comment.Math.Univ.Carolinae 10(1969), 261-284.

[4] ДЕМУТ О.: Об измеримости множеств по Лебегу в конструктивной математике, Comment.Math. Univ.Carolinae 10(1969), 463-492.

[5] ДЕМУТ О.: Необходимое и достаточное условие абсолютной непрерывности конструктивных функций, Comment. Math.Univ. Carolinae 11(1970), 705-726.

[6] ДЕМУТ О.: Об одном условии дифференцируемости конструктивных функций ограниченной вариации, Comment. Math. Univ. Carolinae 12(1971), 687-711.

[7] ДЕМУТ О.: О конструктивных псевдочислах, Comment.Math.

Univ. Carolinae 16(1975), 315-331.

[8] ДЕМУТ О.: О дифференцируемости конструктивных функций слабо ограниченной вариации на псевдочислах, Comment.Math.Univ.Carolinae 16(1975), 583-599.

[9] ДЕМУТ О.: О конструктивном аналоге теоремы Данжуа-Янга о производных числах, Comment. Math. Univ. Carolinae 17(1976), 111-126.

[10] ДЕМУТ О.: О суперпозициях абсолютно непрерывных конструктивных функций, Comment. Math. Univ. Carolinae 12(1971), 423-451.

Matematicko-fyzikální fakulta

Universita Karlova

Malostranské nám. 25, Praha 1

Československo

(Oblatum 6.3. 1978)