Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae

Boris A. Efimov; G. I. Chertanov

О подпространствах Σ-приизведения отрезков

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, Vol. 19 (1978), No. 3, 569--593

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/105876`

COMMENTATIONES MATHEMATICAE UNIVERSITATIS CAROLINAE

19,3(1978)

О ПОДПРОСТРАНСТВАХ Σ- ПРОИЗВЕДЕНИЯ ОТРЕЗКОВ

В.А. ЕФИМОВ, Москва - Г.И. ЧЕРТАНОВ, Саранск

Abstract: Subspaces of Σ-products of intervals of reals are characterized. As a consequence, one obtains e.g. that a linearly ordered compact space embeddable into a Σ-product of metric spaces is metrizable.

Key words: Σ-product, metrizable space, 0-dimensional subspaces, linearly ordered compact spaces.

AMS: 54B10

В первой части работы мы даем характеристику подпространств Σ-произведения отрезков вещественной прямой. При этом выделяется особо случай замкнутых и нульмерных подпространств. Возникающие при этой характеристике X системы множеств мы называем почти предбазами X. Основная теорема этой части состоит в полном описании почти предбаз дискретных пространств. Основной результат второй части состоит в том, что всякий линейно упорядоченный бикомпакт, лежащий в Σ-произведении метрических пространств, метризуем. Это является окончательным решением поставленной нами задачи о вложении континуума Суслина S в Σ [2]. (В работе [4] мы доказали, что S не лежит в Σ, но лежит в Σ неприводимый образ S.) Таким образом, класс линейно упорядоченных бикомпактов ведет себя по отношению к классу метрических пространств и операции Σ аналогично классу диадических бикомпактов [1]. Основные результаты работы были заявлены на УП-ой топологической конференции в Минске в июне 1977 г. [3]:

§ 1

1.1. Пусть $X = \Pi\{X_\alpha : \alpha \in A\}$ - произведение топологических пространств и $p = (p_\alpha) \in X$. Через

$$\Sigma_p\{X_\alpha : \alpha \in A\} = \{x = (x_\alpha) \in X : |\{\alpha \in A : x_\alpha \neq p_\alpha\}| \leq \omega_0\}$$

обозначается Σ-произведение пространств X_α, $\alpha \in A$, с базисной точкой p. Если $X_\alpha = I_\alpha = [0,1]$ - отрезок вещественной прямой для всех $\alpha \in A$ и $p = (0_\alpha)$, то $\Sigma_p\{I_\alpha : : \alpha \in A\}$ обозначается просто через Σ. Пусть $\{f_\alpha : X \longrightarrow X_\alpha\}$, $\alpha \in A$ система отображений. Отображение $f = \Delta\{f_\alpha : \alpha \in A\}$, которое отображает X в $\Pi\{X_\alpha : \alpha \in A\}$ по правилу: $f(x) = \{f_\alpha(x) : \alpha \in A\}$ называется диагональным отображением. Уплотнением топологического пространства X в топологическое пространство Y называется непрерывное взаимно однозначное отображение. Пусть γ - система подмножеств X. Говорят, что γ разделяет точки X, если для любой пары точек $x, y \in X$ и $x \neq y$ существует $A \in \gamma$, которое содержит только одну из точек x, y.

1.2. Лемма. Уплотнение $f : X \longrightarrow Y$ топологического пространства X на топологическое пространство Y является гомеоморфизмом тогда и только тогда, когда существует предбаза $\mathcal{P}$ топологии X такая, что для любого открытого множества $\mathcal{U} \in \mathcal{P}$ имеем $f(\mathcal{U})$ открыто в Y.

1.3. <u>Лемма</u>. Пусть Y - пространство Фреше-Урысона и $f: X \to Y$ уплотнение X на Y. Это уплотнение является гомеоморфизмом тогда и только тогда, когда для любого замкнутого подмножества $N \subset X$, гомеоморфного натуральному ряду, имеем $f|N$ -гомеоморфизм.

<u>Доказательство</u>. Необходимость очевидна, ибо ограничение гомеоморфизма на любое подпространство есть гомеоморфизм. Для доказательства достаточности покажем, что отображение f -замкнуто. Пусть F -замкнуто в X и пусть y - предельная точка для $f(F)$. Так как Y является пространством Фреше-Урысона, то существует последовательность $\{y_n : n < \omega_0\}$, лежащая в F и сходящаяся к y. Пусть $x_n \in X$ таковы, что $f(x_n) = y_n$ и $x \in X$ такая, что $f(x) = y$. Так как отображение взаимно-однозначно, то $x_n \in F$. Заметим, что последовательность $\{x_n : n < \omega_0\}$ сходится к точке x, так как в противном случае множество $N = \{x\} \cup \{x_n : n < \omega_0\}$ дискретно в себе и, следовательно, множество $f(N) = \{y\} \cup \{y_n : n < \omega_0\}$ дискретно, что противоречит выбору последовательности $\{y_n\}$. Так как отображение f непрерывно и F -замкнуто в Y, то $f^{-1}(F) = F$ замкнуто в X. Так как последовательность $\{x_n\} \to x$, то $x \in F$. Отсюда $f(x) = y \in F$, что и требовалось.

1.4. <u>Лемма</u>. Пусть $f: X \to \Sigma$ совершенное отображение вполне регулярного пространства X в Σ, а $g: X \to \Sigma$ уплотнение X в Σ. Тогда диагональное произведение отображений $f \Delta g: X \to \Sigma \times \Sigma = \Sigma$ является гомеоморфизмом.

1.5. Предложение. Топологическое пространство X тогда и только тогда гомеоморфно подпространству Σ, когда существуют две системы $\gamma = \{\mathcal{U}_\alpha : \alpha \in A\}$ и $\mathcal{F} = \{f_\alpha : \alpha \in A\}$ такие, что выполняются следующие условия:

1) Система γ состоит из непустых открытых подмножеств и разделяет точки X, т.е. для любых точек $x, y \in X$ существует $\mathcal{U} \in \gamma$ такое, что $x \in \mathcal{U}$ и $y \notin \mathcal{U}$ или $x \notin \mathcal{U}$ и $y \in \mathcal{U}$.

2) Система γ точечно-счетная.

3) Система $\mathcal{F}$ состоит из непрерывных вещественных функций $f_\alpha : X \longrightarrow [0,1]$ и при этом системы $\mathcal{F}$ и γ согласованы следующим образом:

4) для каждого $\alpha \in A$ имеем $\mathcal{U}_\alpha = X \setminus f_\alpha^{-1}(0)$.

5) Система $\gamma \cup \delta$ является предбазой топологии на X, где $\delta = \bigcup\{\delta_\alpha : \alpha \in A\}$ и

$$\delta_\alpha = \{V_\alpha^n : V_\alpha^n = f_\alpha^{-1}([0, \tfrac{1}{2^n})) = X \setminus f_\alpha^{-1}((\tfrac{1}{2^n}, 1]), n \in N\}$$

Доказательство. Пусть $X \subset \Sigma$ и $f_\alpha = pr_\alpha | X$ - ограничение проекции $pr_\alpha : \Sigma \longrightarrow I_\alpha$ на подпространство X. Положим

$$\mathcal{U}_\alpha = X \setminus f_\alpha^{-1}(0), \quad \gamma = \{\mathcal{U}_\alpha : \alpha \in A\},$$

$$\delta_\alpha = \{V_\alpha^n : V_\alpha^n = X \cap pr_\alpha^{-1}([0, \tfrac{1}{2^n}), n \in \omega_0\}.$$

Пусть

$$\delta = \bigcup\{\delta_\alpha : \alpha \in A\} \text{ и } \mathcal{F} = \{f_\alpha : \alpha \in A\}.$$

Нетрудно проверить, что условия 1) - 5) выполнены, что доказывает необходимость этих условий. Для доказательства достаточности рассмотрим $f = \Delta\{f_\alpha : \alpha \in A\}$ - диагональное произведение отображений f_α. Так как система γ разделяет точки, то отображение f взаимнооднозначно. Так как система γ точечно-счетная, то образ $f(X)$ лежит в Σ. Так как система $\gamma \cup \delta$ является предбазой топологии на X, то по лемме 1.2 отображение f является гомеоморфизмом, ибо для любого $\alpha \in A$ и $m \in N$ множества $f(\mathcal{U}_\alpha)$ и $f(V_\alpha^m)$ открыты, что и требовалось доказать.

Заметим, что, если условие 5) из предложения 1.4 заменить на следующее условие

5') Семейства γ и $\mathcal{F}$ таковы, что для любого замкнутого подпространства $N \subset X$, гомеоморфного натуральному ряду, имеем $f|N$ гомеоморфизм, если $f = \Delta\{f_\alpha : \alpha \in A\}$ - диагональное произведение отображений семейства $\mathcal{F}$, то пространство X вкладывается в Σ. Для доказательства достаточности в этом случае используется лемма 1.3. Если X - дискретное пространство, то это условие является необходимым.

1.6. Предложение. Счетно-компактное пространство X гомеоморфно подпространству Σ, тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:

1') X - нормальное пространство

2') существует система γ, удовлетворяющая условиям 1) и 2) предложения 1.5, а также условию:

3') каждое $\mathcal{U}_\alpha \in \gamma$ имеет тип F_σ.

Доказательство. Необходимость проверяется так же, как при доказательстве предложения 1.5. При этом, так как X - счетно-компактно, то X гомеоморфно замкнутому подпространству Σ . Отсюда получается, что X нормальное пространство, так как по теореме Корсона [5] Σ - произведение отрезков нормально. Для доказательства достаточности используем лемму Н.В. Веденисова [6] о том, что в нормальном пространстве любое открытое множество типа F_σ является конулевым. Это значит, что для каждого множества $\mathcal{U}_\alpha \in \gamma$ существует такая непрерывная функция $f_\alpha : X \longrightarrow [0,1]$, что $\mathcal{U}_\alpha = X \setminus f_\alpha(0)$. Далее применяем предложение 1.5 для семейств $\mathcal{F} = \{f_\alpha : \alpha \in A\}$ с учетом сделанного замечания. В этом случае диагональное отображение f будет замкнутым, так как X счетно-компактно.

1.7. <u>Предложение</u>. Нормальное пространство X гомеоморфно подпространству Σ - тогда и только тогда, когда существует система γ , удовлетворяющая условиям 1) и 2) предложения 1.4, а также следующим условиям:

3") Каждое $\mathcal{U}_\alpha \in \gamma$ является F_σ -множеством, т.е. $\mathcal{U}_\alpha = \cup\{F_\alpha^n : n \in N^+\}$.

4") Каждое F_α^n является G_δ-множеством.

5") Система $\delta \cup \gamma$ является предбазой топологии X , если $\delta = \cup\{\delta_\alpha : \alpha \in A\}$, где $\delta_\alpha = \{V_\alpha^n : V_\alpha^n = X \setminus F_\alpha^n : n \in N^+\}$.

<u>Доказательство</u>. Необходимость проверяется также как при доказательстве предложения 1.4. Для доказательства достаточности воспользуемся леммой Н.В. Веденисова и для каждого F_α^n построим непрерывную функцию $f_\alpha^n : X \longrightarrow [0,1]$ такую, что $F_\alpha^n = f^{-1}(1)$ и $f_\alpha^n(X \setminus \mathcal{U}_\alpha) = 0$. Пусть

$f_\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} f_\alpha^n$. Тогда $f_\alpha : X \to [0,1]$ непрерывная функция и при этом

$$V_\alpha^n = X \setminus F_\alpha^n = f_\alpha^{-1}([0, \frac{1}{2^n})) .$$

Положим $\mathcal{U}_\alpha = X \setminus f_\alpha^{-1}(0)$ и $\mathcal{F} = \{ f_\alpha : \alpha \in A \}$. Тогда семейства $\gamma = \{ \mathcal{U}_\alpha : \alpha \in A \}$ и $\mathcal{F}$ удовлетворяют всем условиям предложения 1.4 и, следовательно, X вкладывается в Σ . Предложение доказано.

1.8. Предложение. Всякое вполне регулярное пространство, имеющее точечно-счетную базу (или, эквивалентно, точечно-счетную предбазу) гомеоморфно некоторому подпространству Σ .

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что точечно-счетная база $\gamma = \{ \mathcal{U}_\alpha : \alpha \in A \}$ состоит из конулевых множеств, так как конулевые множества образуют базу во вполне регулярном пространстве. Пусть $f_\alpha : X \to [0,1]$ непрерывная функция такая, что $X \setminus f_\alpha^{-1}(0) = \mathcal{U}_\alpha$. Тогда системы γ и $\mathcal{F} = \{ f_\alpha : \alpha \in A \}$ удовлетворяют всем условиям предложения 1.4 (в этом случае $\delta = \emptyset$), что и требовалось.

1.9. Следствие. Всякое метрическое пространство веса τ вкладывается в Σ-произведение отрезков в числе τ .

Непосредственно следует из предложения 1.8, так как всякое метрическое пространство веса τ имеет σ-локально-конечную и, следовательно, точечно-счетную базу мощности τ .

1.10. Лемма. Пусть T - дискретное пространство и пусть γ - точечно-счетное семейство подмножеств T , разделящее точки T и такое, что $\gamma \cup \gamma'$ предбаза дискретной топологии на T, где $\gamma' = \{T \setminus A : A \in \gamma\}$. Пусть $f_A : T \longrightarrow \{0, 1\} = \mathcal{D}_A$ такое отображение T в дискретное двоеточие $\mathcal{D}_A$, что $A = f_A^{-1}(\{1\})$ для всех $A \in \gamma$. Тогда диагональное произведение отображений $f = \Delta\{f_A : A \in \gamma\}$ является гомеоморфизмом T в $\Sigma^o = \Sigma\{\mathcal{D}_A : A \in \gamma\}$ – Σ – произведение изолированных двоеточий.

<u>Доказательство</u>. Так как каждое отображение непрерывно, а система γ разделяет точки, то отображение $f : T \longrightarrow \Sigma^o$ является уплотнением. Для того, чтобы f было гомеоморфизмом достаточно проверить, что $f(T)$ дискретное подпространство Σ^o. Для этого для каждой точки $x \in T$ построим в Σ^o базисную окрестность $\mathcal{U}$ такую, что $\mathcal{U} \cap f(T) = \{f(x)\}$. Так как $\gamma \cup \gamma'$ предбаза дискретной топологии на T, то для каждой точки $x \in T$ найдутся два конечных подсемейства $\gamma_0 \subset \gamma$ и $\gamma_1 \subset \gamma$ такие, что $\{x\} = \bigcap\{A_i : A_i \in \gamma_1\} \cap \bigcap\{T \setminus A_i : A_i \in \gamma_0\}$. Пусть $\mathcal{U}^1_{A_i} = pr^{-1}_{A_i}(\{1\})$ и $\mathcal{U}^0_{A_i} = pr^{-1}_{A_i}(\{0\})$ – одноиндексные базисные множества Σ^o и

$$\mathcal{U} = \bigcap\{\mathcal{U}^1_{A_i} : A_i \in \gamma_1\} \cap \bigcap\{\mathcal{U}^0_{A_i} : A_i \in \gamma_0\}.$$

Проверим, что $\mathcal{U} \cap f(T) = \{f(x)\}$. Так как $x \in A_i$ при $A_i \in \gamma_1$ и $x \notin A_i$ при $A_i \in \gamma_0$, то $f(x) \in \mathcal{U}$. Пусть $f(y) \in \mathcal{U} \cap f(T)$. Тогда $pr_{A_i}(fy) = f_{A_i}(y) = 1$ при $A_i \in \gamma$, следовательно, $y \in A_i$. Аналогично $y \notin A_i$, если $A_i \in \gamma_0$. Отсюда следует, что $y \in \bigcap\{A_i : A_i \in \gamma_1\} \cap \bigcap\{T \setminus A_i : A_i \in \gamma_0\}$, то есть $y = x$, что и требовалось. Итак, $f(T)$ дискретно, следовательно, f –гомеоморфизм. Лемма доказана.

1.11. Теорема. Для того, чтобы вполне регулярное пространство X было гомеоморфно подпространству Σ^0 необходимо и достаточно, чтобы X имело точечно-счетную систему γ, состоящую из открыто-замкнутых подмножеств, разделяющую точки X и такую, что $\gamma \cup \gamma'$ - предбаза топологии на X.

Доказательство. Заметим, что Σ^0 обладает требуемой системой (см. [4]). Обозначим ее через γ. Пусть $\gamma(X) = \{\mathcal{U} \cap X : \mathcal{U} \in \gamma\}$ для любого $X \subset \Sigma^0$. Нетрудно показать, что система $\gamma(X)$ точечно-счетная, разделяет точки X, состоит из открыто-замкнутых подмножеств, причем $\gamma(X) \cup \gamma'(X)$ есть предбаза топологии на X, где $\gamma'(X) = \{W : W = X \setminus V : V \in \gamma(X)\}$. Докажем достаточность. Пусть X - вполне регулярно, и пусть γ - заданное семейство. Для каждого $\mathcal{U} \in \gamma$ построим функцию $f_{\mathcal{U}} : X \longrightarrow \mathcal{D}_A$ такую, что $\mathcal{U} = f_{\mathcal{U}}^{-1}(\{1\})$. Ввиду открыто-замкнутости множества $\mathcal{U}$ функция $f_{\mathcal{U}}$ непрерывная. Пусть $f = \Delta\{f_{\mathcal{U}} : \mathcal{U} \in \gamma\}$ - диагональное произведение отображений $f_{\mathcal{U}}$. Так как система γ является точечно-счетной полубазой, то отображение f является уплотнением в Σ^0. Так как Σ^0 является пространством Фреше-Урысона, то по лемме 1.3 отображение f является гомеоморфизмом, если для любого замкнутого подмножества $N \subset X$ гомеоморфного натуральному ряду, имеем $f \mid N$ - гомеоморфизм. Пусть $N \subset X$. Так как $\gamma \cup \gamma'$ предбаза топологии на X, то $(\gamma \cup \gamma')(N) = \{\mathcal{U} \cap N : \mathcal{U} \in \gamma \cup \gamma'\}$ есть предбаза дискретной топологии на N, которая разделяет точки N. По лемме 1.10 отображение $f \mid N$ является гомеоморфизмом. Теорема доказана.

1.12. <u>Предложение</u>. Если в паракомпактном p-пространстве X существует точечно-счетная система γ, состоящая из конулевых множеств и разделяющая точки X, то X гомеоморфно подпространству Σ.

<u>Доказательство</u>. Так как X паракомпактное p-пространство, то существует совершенное отображение $f : X \xrightarrow{на} M$ на метрическое пространство M. Согласно следствию 1.9 метрическое пространство $M \in \Sigma$. Поэтому можно считать, что $f : X \xrightarrow{b} \Sigma$. По системе γ строим диагональное отображение $g : X \longrightarrow \Sigma$, которое является уплотнением. Пусть $\psi = f \Delta g$ - диагональное произведение совершенного отображения f на уплотнение g пространства X в $\Sigma \times \Sigma = \Sigma$. По лемме 1.4 отображение ψ является гомеоморфизмом, что и требовалось доказать.

1.13. Пусть X - вполне регулярное пространство и γ - семейство, состоящее из конулевых множеств X. Через $\mathcal{F}(\gamma)$ будем обозначать семейство функций $f_A : X \longrightarrow I$ таких, что $A = X \setminus f_A^{-1}(\{0\})$, если $A \in \gamma$. Отображение f_γ назовем γ <u>- отображением</u>, если $f_\gamma = \Delta\{f_A : A \in \gamma\}$. Семейство γ будем называть <u>почти предбазой</u> пространства X, если для любого семейства $\mathcal{F}(\gamma)$ γ-отображение f_γ является гомеоморфизмом X в Σ.

Заметим, что из леммы 1.10 следует, что для дискретного пространства T всякая точечно-счетная предбаза T является почти предбазой. Следующая теорема дает полное описание почти предбаз дискретных пространств.

1.14. <u>Теорема</u>. Для того, чтобы семейство γ было почти предбазой дискретного пространства T необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия: а) γ - разделяет точки, б) γ - точечно-счетное семейство, в) γ - является покрытием T, г) для каждой точки $x \in T$, существует конечное подсемейство $\gamma'_x \subset \gamma_x \subset \gamma$ такое, что пересечение $\bigcap\{A : A \in \gamma'_x\}$ имеет конечную мощность, если $\gamma_x = \{A \in \gamma : x \in A\}$.

<u>Доказательство</u>. Покажем необходимость всех четырех условий. Пусть γ не разделяет некоторые две точки $x, y \in T$. Это означает, что для каждого $A \in \gamma$ либо $x, y \in A$, либо $x, y \notin A$ одновременно. Пусть $\mathcal{F}(\gamma) = \{\chi_A : A \in \gamma\}$, где $\chi_A(x) = 0$, если $x \in A$, или $\chi_A(x) = 1$, если $x \in A$. По условию γ - отображение f_γ является взаимно однозначным отображением. С другой стороны, для двух различных точек $x \neq y$ имеем $f_\gamma(x) = f_\gamma(y)$, что доказывает необходимость условия а). Пусть γ не является точечно-счетным семейством множеств. Это означает, что существует точка $t \in T$ такая, что мощность множества $\{A \in \gamma : x \in A\}$ несчетна. Пусть $\mathcal{F}(\gamma) = \{\chi_A : A \in \gamma\}$. По условию γ - отображение f_γ является отображением в Σ-произведение. С другой стороны точка $f_\gamma(t) = \{\chi_A(t) : A \in \gamma\}$ имеет несчетное множество координат отличных от нуля, т.е. $f_\gamma(t) \notin \Sigma$, что доказывает необходимость условия б). Пусть γ не является покрытием. Поскольку необходимость условия а) уже доказана, то из него следует, что γ может не покрывать только одну точку $x \in T$, так как в противном случае γ не могло бы разделять две непокрытые точки. Пусть $T \setminus \{x\} = \bigcup_{i=1}^{\infty} T_i$ - объединение непустых дизъюнктных множеств, т.е. $T_i \cap T_j = \emptyset$, если $i \neq j$. Положим $f_A(x) = 0$, если $x \notin A$, или $\frac{1}{i}$,

если $x \in A \cap T_i$. Так как $x \notin A$ для всех $A \in \gamma$, то $f_A(x) = 0$ при всех $A \in \gamma$. Отсюда $f_\gamma(x) = \{0\}$. Покажем, что точка $\{0\} \in B = [\{f_\gamma(t) : t \in T\}]$. Пусть $\mathcal{U} = \mathcal{U}_\varepsilon^{A_1} \times \mathcal{U}_\varepsilon^{A_2} \times \ldots \times \mathcal{U}_\varepsilon^{A_n} \times \Pi\{\mathcal{I}_A : A \neq A_i\}$ – произвольная базисная окрестность точки $\{0\}$, где $\mathcal{U}_\varepsilon^{A_i} = [0, \varepsilon) \subset I_{A_i}$. Выберем i такое, что $\frac{1}{i} < \varepsilon$. Тогда любая точка $t \in T_i$ обладает тем свойством, что ее образ $f_\gamma(t)$ принадлежит B. Следовательно, $f(T)$ не дискретно и, значит, f_γ не является гомеоморфизмом, что доказывает необходимость условия в). Предположим, что не выполнено условие г), т.е. для некоторой точки x пересечение любого конечного подсемейства γ_x бесконечно. Выберем в каждом таком пересечении счетное подмножество и возьмем объединение всех выбранных подмножеств, которое обозначим через S. Ясно, что $|S| = \omega_0$, так как γ точечно-счетное семейство. Построим систему функций $\mathcal{F}(\gamma)$ следующим образом. Пусть $S = \{x_n : n \in N\}$, причем $x = x_0$. Для каждого $A \in \gamma$ положим $f_A(x_0) = 1$, если $x_0 \in A$, $f_A(x_0) = 0$, если $x_0 \notin A$; $f_A(x_n) = 1 - \frac{1}{n+1}$, если $n \neq 0$ и $x_0 \in A \ni x_n$; $f_A(x_n) = 0$, если $x_0 \notin A$, но $x_n \in A$; $f_A(x_n) = \frac{1}{n+1}$, если $x_0 \in A$, но $x_n \notin A$; $f_A(x_n) = 0$, если $x_n \notin A$, $x_0 \notin A$. Для остальных точек $x \in T$ функции f_A определяются произвольным допустимым образом. Согласно условию теоремы диагональное произведение f_γ всех заданных функций является гомеоморфизмом. Следовательно, у точки $y = f_\gamma(x)$ должна существовать окрестность в Σ, не содержащая точек из $f_\gamma(T \setminus \{x\})$. Заметим, что $y = f_\gamma(x_0) = \{\chi_A(x_0) : A \in \gamma\}$ и

$f_\gamma(x_m)=\{(1-\frac{1}{m+1})\chi_A(x_m)$, если $x_0\in A$; $\frac{1}{n}\chi_A(x_m)$, если $x_0\notin A\}$. Рассмотрим произвольную базисную окрестность y в Σ. Пусть это

$$\mathcal{U}=\mathcal{U}_\varepsilon^{i_1}(1)\times\mathcal{U}_\varepsilon^{i_2}(1)\times\ldots\times\mathcal{U}_\varepsilon^{i_p}(1)\times\mathcal{U}_\varepsilon^{j_1}(0)\times\ldots\times\mathcal{U}_\varepsilon^{j_2}(0)\times\prod_A\{\mathcal{I}_A\},$$

где $\mathcal{U}_\varepsilon^{j_k}(0)=[0,\varepsilon)\subset I_{i_k}$ и $\mathcal{U}_\varepsilon^{i_k}(1)=(1-\varepsilon,1]\subset I_{i_k}$, при этом предполагается, что $0\in A_{i_k}$, $k=1,2,\ldots,p$ и $0\notin A_{j_\ell}$, $\ell=1,\ldots,n$. По предположению $|\bigcap_{k=1}^{p}A_{i_k}|=\omega_0$. Следовательно, в этом пересечении найдется бесконечное множество чисел n_k таких, что $\frac{1}{n_k+1}<\varepsilon$ и $n_1<n_2<\ldots$. Покажем, что $f_\gamma(x_{n_k})\in\mathcal{U}$ для всех k. В самом деле, поскольку $x_{n_k}\in\bigcap_{k=1}^{p}A_{i_k}$ и $x_0\in A_{i_k}$, то $f_{A_{i_k}}(x_{n_k})=1-\frac{1}{n_k+1}>1-\varepsilon$. Значит, $f_{A_{i_k}}(x_{n_k})\in\mathcal{U}_\varepsilon^{i_k}(1)$. Даже, поскольку $0\notin A_{i_\ell}$, то $f(x_{n_k})\leq\frac{1}{n_k+1}<\varepsilon$, т.е. $f_{A_{j_\ell}}(x_{n_k})\in\mathcal{U}_\varepsilon^{j_\ell}(0)$. Если $x_{n_k}\in A_{j_\ell}$, то $f_{A_{j_\ell}}(x_{n_k})=0$ и, значит, требуемое включение выполнено. Следовательно, $f_\gamma(x_{n_k})\in\mathcal{U}$ для всех n, т.е. $f_\gamma(0)$ – предельная точка для последовательности $\{f_\gamma(x_{n_k})\}$, $k=1,2,\ldots$, что противоречит вышесказанному. Докажем достаточность теоремы. Пусть выполнены все условия а) –г) теоремы. Покажем, что в этом случае отображение f_γ есть гомеоморфизм для любого семейства $\mathcal{F}(\gamma)$. В силу условий а) и б) и дискретности пространства T отображение f_γ является взаимно-однозначным непрерывным отображением T в Σ. Так как Σ – является пространством Фреше-Урысона, то для доказательства теоремы достаточно проверить, что для каждого счетного подмножества $N\subset T$ отображение $f_\gamma|N$ является гомеоморфизмом, т.е. $f_\gamma(N)$ дискретное подпространство Σ. Это означает, что для каждой точки $x \in f_\gamma(N)$ существует базисная окрестность $\mathcal{U} \subset \Sigma$ такая, что $|\mathcal{U} \cap f_\gamma(N)| < \omega_0$. По условию г) для каждой точки $x \in N$ существует конечное подсемейство $\gamma_x \subset \gamma$ такое, что $|\bigcap\{A \in \gamma_x : x \in A\}| < \omega_0$. Положим $\mathcal{U} = \bigcap_{i=1}^{n} pr_{A_i}^{-1}(0,1]_{A_i}$, если $\gamma_x = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$. Так как $f_\gamma(x) \in \mathcal{U}$ тогда и только тогда, когда $x \in \bigcap_{i=1}^{n} A_i$ и последнее пересечение конечно, то $|\mathcal{U} \cap f_\gamma(N)| < \omega_0$. Теорема доказана.

§ 2

2.1. Лемма. Пусть X - замкнутое подпространство Σ - произведения отрезков. Тогда

а) для любого подмножества $M \subset X$ и $|M| \leq \omega_0$ замыкание $[M]$ является метрическим компактом (т.е. X является ω_0-монолитным),

б) X - пространство Фреше-Урысона,

в) X имеет точечно-счетную систему γ, состоящую из конулевых множеств, которая разделяет точки X.

Эта лемма общеизвестна. Доказательство можно найти: пунктов а) и б) в [6], а пункта в) в [4].

2.2. Лемма. Для линейно упорядоченного пространства X следующие два свойства эквивалентны:

а) X является пространством Фреше-Урысона,

б) X удовлетворяет первой аксиоме счетности.

Доказательство см. Р. Энгелькинг [6].

2.3. Лемма. Пусть X - линейно упорядоченное пространство и $\mathcal{U}$ открыто в X. Тогда $\mathcal{U} = \bigcup \{ I_\alpha : \alpha \in A \}$, где I_α -октрытые интервалы при всех $\alpha \in A$, причем $I_\alpha \cap I_\beta = \emptyset$, если $\alpha \neq \beta$ и для каждого открытого в X интервала V такого, что $V \supset I_\alpha$ выполнено $V \cap (X \setminus \mathcal{U}) \neq \emptyset$.

Доказательство этой леммы следует из леммы Цорна и хорошо известно.

2.4. Если F - замкнутое подмножество линейно упорядоченного пространства X и $\mathcal{U} = X \setminus F$, то интервалы I_α, на которые распадается $\mathcal{U}$ и описанные в лемме 2.3 называются смежными к F интервалами.

2.5. Лемма. Пусть X - линейно упорядоченное пространство, удовлетворяющее 1-й аксиоме счетности. Тогда всякий непустой интервал $I \subset X$ является конулевым множеством.

Доказательство. Заметим, что для нормальных пространств свойства: а) "быть конулевым открытым множеством" и б) "быть открытым множеством типа F_σ" совпадают. Всякое линейно упорядоченное пространство нормально. Пусть $I = (a, b)$. Предположим без ограничения общности, что точки a и b предельны для интервала I. Тогда существуют последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{\omega} \subset I$ и $\{b_n\}_{n=1}^{\omega} \subset I$, сходящиеся, соответственно, к a и b. Можно считать, что $a < b$ и $a_{n+1} < a_n$, $b_n < b_{n+1}$. Тогда $I = (a, b) = \bigcup_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$, причем $[a_n, b_n]$ - замкнуты в X, т.е. I - открытое множество типа F_σ, значит и конулевое.

2.6. Лемма. Всякий линейно упорядоченный бикомпакт

X лежит в Σ - произведении отрезков тогда и только тогда, когда X является ω_0 -монолитным, удовлетворяет 1-й аксиоме счетности и имеет точечно-счетную систему интервалов, которая разделяет точки

<u>Доказательство</u>. Во-первых, заметим, что Σ - произведение отрезков вполне регулярно, а X бикомпакт. Значит, X - замкнуто в Σ -произведении отрезков и по лемме 2.1 получаем, что X - пространство Фреше-Урысона, является ω_0 -монолитным и имеет точечно-счетную систему γ , состоящую из конулевых открытых множеств и разделяющую точки X . Из леммы 2.2 следует, что X удовлетворяет 1-й аксиоме счетности. Далее, пусть $\mathcal{U} \in \gamma$. По лемме 2.3 каждое открытое $\mathcal{U} \in \gamma$ представим в виде $\mathcal{U} = \cup\{I_\alpha : \alpha \in A_U\}$. Ясно, что система всех интервалов $\{I_\alpha : \alpha \in A\}, A = \bigcup_{U \in \gamma} A_U$ является точечно-счетной и разделяет точки. Обратно, согласно предложению 1.7 бикомпакт X лежит в Σ - произведении отрезков, так как по лемме 2.5 каждый интервал заданной системы является конулевым множеством. Лемма доказана.

2.7. <u>Лемма</u>. Пусть X - линейно упорядоченный бикомпакт, удовлетворяющий 1-й аксиоме счетности. Тогда каждый сепарабельный интервал X содержится в максимальном сепарабельном интервале.

<u>Доказательство</u>. Предположим противное. Пусть существует сепарабельный $\mathcal{J} = \mathcal{J}_0 \subset X$, который обладает тем свойством, что для любого сепарабельного интервала $\mathcal{J}' \supsetneqq \mathcal{J}$ найдется также сепарабельный интервал $\mathcal{J}''$ такой, что $\mathcal{J}'' \supsetneqq \mathcal{J}'$. Это свойство дает нам возможность построить по трансфинитной индукции вполне упорядоченное по включению

семейство интервалов $\mathcal{S} = \{ \mathcal{I}_\alpha : \alpha < \omega_1 \}$ такое, что (а) $\mathcal{I}_0 = \mathcal{I}$; (б) если $\alpha < \beta$, то $\mathcal{I}_\alpha \supsetneqq \mathcal{I}_\beta$, (в) $s\mathcal{I}_\alpha \leq \omega_0$. Пусть $\mathcal{I}_\alpha = (a_\alpha, b_\alpha)$. Тогда множество правых концов $B = \{ b_\alpha : \alpha < \omega_1 \}$ вполне упорядочено, а множество $A = \{ a_\alpha : \alpha < \omega_1 \}$ левых концов семейства $\mathcal{S}$ становится вполне упорядоченным при замене порядка в X на дуальный. Легко видеть, что по крайней мере одно из множеств (A или B) содержит ω_1 различных элементов. Пусть B. Так как X - линейной упорядоченный бикомпакт и $B \subset X$ вполне упорядочено в индуцированном порядке, то замыкание $[B]$ является вполне упорядоченным бикомпактом мощности $\geq \omega_1$ и, следовательно, содержит подпространство, гомеоморфное порядковым числам $\leq \omega_1$, что противоречит 1-й аксиоме счетности. Лемма доказана.

2.8. <u>Лемма</u>. Пусть X -неметризуемый, ω_0 -монолитный, линейно упорядоченный бикомпакт, удовлетворяющий 1-й аксиоме счетности. Тогда X содержит замкнутое подпространство Y такое, что для любого открытого в Y множества $\mathcal{U}$ выполняется $s\mathcal{U} > \omega_0$.

<u>Доказательство</u>. Если X не содержит сепарабельных интервалов, то $Y = X$ и лемма доказана. Пусть таковые имеются. Тогда, применяя лемму 2.7, заключим каждый сепарабельный интервал X в максимальный сепарабельный интервал и пусть $\mathcal{S} = \{ \mathcal{I}_\alpha : \alpha \in A \}$ семейство всех таких интервалов. Ясно, что при $\alpha \neq \beta \in A$ имеем $\mathcal{I}_\alpha \cap \mathcal{I}_\beta = \emptyset$ и, более того, интервалы из семейства $\mathcal{S}$ не имеют общих концов. Пусть $\tilde{\mathcal{S}} = \cup \{ \mathcal{I}_\alpha : \alpha \in A \}$ и $Y = X \setminus \tilde{\mathcal{S}}$. Докажем, что Y искомое подмножество X. Предположим противное. Пусть

$p, q \in Y$ и интервал $(p,q) \cap Y$ не пуст и сепарабелен в Y. Поскольку X является ω_0-монолитным бикомпактом и Y замкнутое подпространство X, то Y ω_0-монолитно. Значит $[p,q]_Y$ - метрический компакт. По теореме Трейбига [7] линейно упорядоченный бикомпакт Z метризуем тогда и только тогда, когда $sZ \leq \omega_0$ и число скачков (т.е. таких интервалов $[a,b]$, что $(a,b) = \emptyset$) не более чем счетно. Таким образом, $Z = [p,q]_Y$ может иметь не более чем счетное число скачков (заметим, что некоторые из них были скачками и в X, другие же получились при выбрасывании некоторого интервала $J_\alpha \in \delta$). Пусть δ' совокупность всех интервалов $J_\alpha \in \delta$, определяющих скачки Z. Согласно вышесказанному $|\delta'| \leq \omega_0$. Тогда

$$[p,q]_X = [p,q] \cap X = Z \cup \{ J_\alpha : J_\alpha \in \delta' \} .$$

Так как каждый интервал $J_\alpha \in \delta'$ - сепарабелен, $[p,q]_Y$ - сепарабелен и $|\delta| \leq \omega_0$, то $s(p,q) \leq \omega_0$. Следовательно, существует максимальный сепарабельный интервал $J_\alpha \in \delta$ такой, что $(p,q) \subset J_\alpha$. Отсюда $(p,q) \cap Y = \emptyset$. Это противоречит исходному предположению, что $s[p,q]_Y \leq \omega_0$ и $(p,q)_Y \neq \emptyset$. Это доказывает лемму 2.8.

2.9. <u>Теорема</u>. Линейно упорядоченный бикомпакт X метризуем тогда и только тогда, когда X гомеоморфен подпространству Σ.

<u>Доказательство</u>. Необходимость этой теоремы ясна, ибо всякий метрический компакт вкладывается в гильбертов куб, который лежит в Σ. Пусть $X \subset \Sigma$. По лемме 2.6, если линейно упорядоченный бикомпакт X лежит в Σ, то X ω_0-монолитен, удовлетворяет 1-й аксиоме счетности и имеет то-

чечно-счетную систему интервалов, разделяющую точки X. Допустим, что X не метризуем. Тогда по лемме 2.8 он содержит замкнутое подпространство Y, не имеющее сепарабельных открытых подмножеств. Согласно теореме Трейбига [7] бикомпактное подпространство линейно упорядоченного пространства является линейно упорядоченным бикомпактом. Следовательно, Y также ω_0-монолитен, удовлетворяет 1-й аксиоме счетности и имеет точечно-счетную систему интервалов γ, разделяющую точки Y. Построим по индукции системы множеств $\{C^0_n : n < \omega_0\}, \{C^1_n : n < \omega_0\}, \{\gamma_n : n < \omega_0\}, \{M_n : n < \omega_0\}, \{S_n : n < \omega_0\}$, занумерованные натуральными числами и обладающие следующими свойствами:

(а) C^0_n и C^1_n – замкнутые сепарабельные подмножества Y. Так как Y ω_0-монолитно и не имеет сепарабельных интервалов, то C^0_n и C^1_n нигде не плотные в Y метрические упорядоченные компакты, имеющие не более чем счетное число скачков.

(б) $\gamma_n \subset \gamma$, $|\gamma_n| \leq \omega_0$ и γ_n состоит из всех интервалов $J \in \gamma$, которые содержат концы скачков множества C^1_n.

(в) $|M_n| \leq \omega_0$ и M_n состоит из всех концов интервалов системы γ_n,

(г) $C^0_{n+1} = [C^1_n \cup M_n]_Y$,

(д) $C^0_0 = \{0, 1\}$ – концы упорядоченного бикомпакта Y,

(е) $|S_n| \leq \omega_0$ и $S_n = \cup\{S_{I_n} : I_n$ – смежный интервал Y в множестве $Y \setminus C^0_n\}$, при этом $S_{I_n} = S^0_{I_n} \cup S^1_{I_n}$, где $S^0_{I_n} \cap S^1_{I_n} = \emptyset$ и $S^0_{I_n}$, $S^1_{I_n}$ – это последовательности (вместе с предельными точками), сходящиеся, соответственно, к $\inf I_n$ и $\sup I_n$.

Так как Y не имеет сепарабельных интервалов и удовлетворяет 1-й аксиоме счетности, то для любого непустого интервала $I \subset Y$ всегда можно построить множества S_I^0 и S_I^1, обладающие указанными выше свойствами.

(ж) $C_n^1 = C_n^0 \cup S_n$.

Предположим, что указанные выше системы уже построены для всех $k < n$. Построим n-ые системы.

Положим $C_n^0 = [C_{n-1}^1 \cup M_{n-1}]_Y$. По предположению множество C_{n-1}^0 сепарабельно и M_{n-1} счетно. Значит C_n^0 - сепарабельное замкнутое подмножество Y. Пусть S_n такое, как в (е). Докажем, что $|S_n| \leq \omega_0$. В самом деле, C_n^0 имеет не более чем счетное число скачков, значит множество смежных интервалов множества $Y \setminus C_n^0$ не более чем счетно. Пусть это семейство смежных интервалов к C_n^0 будет $\delta_n = \{I_n^m : m < \omega_0\}$. Оно не пусто, так как Y не локально сепарабельно. Строим в каждом из них счетные множества $S^0_{I_n^m}$ и $S^1_{I_n^m}$, как это описано в пункте (е). Множество S_n определим так же как в пункте (е). Ясно, что $|S_n| \leq \omega_0$.

Положим $C_n^1 = C_n^0 \cup S_n$. Легко видеть, что все предельные точки множества C_n^1 лежат в C_n^0. Значит C_n^1 замкнуто в Y и сепарабельно, ибо по доказанному таково C_n^0.

Семейства γ_n и M_n определены так же как в пунктах (б) и (в). Проверим, что $|\gamma_n| \leq \omega_0$ и $|M_n| \leq \omega_0$. В самом деле, C_n^1 - метрический компакт, значит, имеет не более чем счетное множество скачков. Поскольку γ точечно-счетная система, то для каждого конца x скачка C_n^1 имеем $|\gamma(x)| \leq \omega_0$. Значит, $|\gamma_n| \leq \omega_0$. Отсюда следует, что и $|M_n| \leq \omega_0$, ибо каждый интервал $\mathcal{J} \in \gamma_n$ имеет не более двух концов, а число интервалов счетно.

Тем самым индуктивный шаг оправдан, а поскольку C_0^0 сепарабельно, то сепарабельны и C_n^0, C_n^1.
Пусть $C = [\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n^0]_Y = [\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n^1]_Y$. Ясно, что C - сепарабельное замкнутое подмножество Y. Проверим, что C не имеет изолированных точек. Пусть $x \in C$. Если $x \in C \setminus \bigcup \{C_n^0 : n < \omega_0\}$, то x -предельная и, следовательно, не изолированная, если же $x \in \bigcup_n C_n^0$, то пусть k - наименьший номер такой, что $x \in C_k^0$ (такой существует). Если x не изолирована в Y, то опять все очевидно. Допустим, что x изолирована в C_k^0. Так как x изолирована в C_k^0 и не изолирована в Y, то найдутся две точки a и b из C_k^0 такие, что $(a,b) \cap C_k^0 = \{x\}$, причем хотя бы для одного из интервалов (a,x) и (x,b) точка x является предельной, но тогда либо x войдет в $S^0_{(a,x)}$, либо в $S^1_{(x,b)}$, значит x войдет и в C в качестве неизолированной точки.

Пусть $S = \bigcup\{S_n : n \in \omega_0\}$. Проверим, что S плотно в C. Пусть $\mathcal{U}$ - открытый интервал Y такой, что $\mathcal{U} \cap C \neq \emptyset$. Так как $\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n^1$ плотно в C, то найдется точка $x \in (\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n^1) \cap \mathcal{U}$. Пусть m - наименьший из номеров таких, что $x \in C_m^1 \cap \mathcal{U}$. Возможны два случая: (1) $x \in C_m^0 \subset C_m^1$; (2) $x \in C_m^1 \setminus C_m^0$. Поскольку Y не имеет сепарабельных интервалов, то C_m^1 нигде не плотно в Y, причем $C_m^1 \subset C_{m+1}^0$. Так что достаточно рассмотреть первый случай. Это означает, что внутри интервала $\mathcal{U}$ найдется некоторый интервал I_m^k смежный в Y к C_m^0. Следовательно, и $S_{I_m^k} \subset \mathcal{U}$, может быть, без двух крайних точек. Поскольку $S_{I_m^k} \subset S_m \subset S$, то $S \cap \mathcal{U} \neq \emptyset$.

Пусть (а,в) - непустой интервал в Y, смежный к C. Так как мы предполагаем, что γ разделяет точки Y, то найдется интервал $(p,q) \in \gamma$ такой, что, например, $a \in (p,q)$, но в $b \notin (p,q)$. Это означает, что $p < a < q \leq b$. По доказанному, C не имеет изолированных точек, значит $(p,a) \cap C \neq \emptyset$ и открыто в C. Поскольку S плотно в C, то найдется точка $x \in S \cap (p,q)$. Пусть m - наименьший номер такой, что $x \in S_m$. Так как $S_m = \cup \{S_{I_m} : I_m$ смежны к C^0_m в $X\}$, и в S_m плотны изолированные точки, то можно считать, что x - изолированная точка S_m. Поэтому x принадлежит множеству концов всех скачков C^1_m. Далее $x \in (p,q) \in \gamma$, следовательно, $(p,q) \in \gamma(x)$, где $\gamma(x)$ есть совокупность всех $\mathcal{J} \in \gamma$ таких, что $x \in \mathcal{J}$. Отсюда $(p,q) \in \gamma_x \subset \gamma_m$. Следовательно, $q \in M_m \subset C$. Так как (а,в) - интервал, смежный к C, то (а,в) не содержит точек из C значит, невозможно, чтобы $q < b$, отсюда $q = b$. Теперь рассмотрим $C^0_{m+1} = [C^1_m \cup M_m]_Y$. В силу определения C^0_{m+1} и свойств m, точка $b \in C^0_{m+1}$ и в интервале (а,в) не может быть точек из C^0_{m+1}. Значит, точка b может быть концом некоторого смежного в Y к множеству C^0_{m+1} интервала (t,b), при этом $t \leq a$. По построению множества $S^1_{(t,b)}$ получаем, что $S^1_{(t,b)} \setminus \{b\} \subset (t,b)$. Таким образом, $(a,b) \cap S^1_{(t,b)} \neq \emptyset$. Так как $S^1_{(t,b)} \subset S_{m+1} \subset C$, то $(a,b) \cap C \neq \emptyset$, что противоречит выбору интервала (а,в). Полученное противоречие показывает, что бикомпакт X метризуем. Теорема доказана.

2.10. <u>Следствие</u>. Линейной упорядоченный бикомпакт X метризуем тогда и только тогда, когда X вкладывается в

Σ -произведение метрических пространств.

Пусть $X \subset \Sigma\{Y_\alpha : \alpha \in A\}$, причем Y_α - метрическое пространство для каждого $\alpha \in A$. Заметим, что $pr_\alpha X = X_\alpha$ являются метрическими компактами и, следовательно, $X_\alpha \subset Z_\alpha$, если $Z_\alpha = I^\omega$ гильбертов куб для всех $\alpha \in A$. Далее,

$$X \subset \Sigma\{X_\alpha : \alpha \in A\} \subset \Sigma\{Z_\alpha : \alpha \in A\} = \Sigma .$$

Следовательно, по теореме 2.9 X метризуем.

2.11. Следствие. Линейно упорядоченный бикомпакт Эберлейна (или функционально совершенный бикомпакт) метризуем.

В самом деле, по теореме Амира и Линденштрауса [8] всякий бикомпакт Эберлейна лежит в Σ. Отсюда, если он линейно упорядочен, то по теореме 2.9 следует его метризуемость.

2.12. Замечание. Примеры бикомпактов, лежащих в Σ, показывают, что каждый из них имеет всюду плотное метрическое подпространство. Согласно теореме Розентала [9], всякий бикомпакт Эберлейна содержит всюду плотное метрическое подпространство. Естественно возникает вопрос:

I. Всякий ли бикомпакт, лежащий в Σ, содержит всюду плотное метрическое подпростанство?

Как показано в работе [4], если существует континуум Суслина (связный, линейно упорядоченный, несепарабельный бикомпакт S, удовлетворяющий условию Суслина), то существует бикомпакт $X \subset \Sigma$, в котором всякое метрическое подпространство нигде не плотно. (Несмотря на то, что сам S в Σ не содержится.) Таким образом возникает альтернатива: или существует "наивный" пример такого бикомпакта X, или существует модель теории множеств, в которой на вопрос I можно получить положительный ответ. Заметим, что каждое $X \subset \Sigma$ является пространством Фреше-Урысона, отсюда возникает вопрос:

. Существует ли "наивный" пример бикомпакта Фреше-Урысона, в котором всякое метрическое подпространство нигде не плотно?

Аналогичный вопрос можно поставить и для бикомпактов, удовлетворяющих первой аксиоме счетности. Однако, уже для совершенно нормальных бикомпактов это не так. А именно, как доказал И. Юхас [10], при условии $\neg(CH) + (MA)$ всякий совершенно нормальный бикомпакт содержит всюду плотное счетное метрическое подпространство.

Литература

[1] В.А. ЕФИМОВ, Г.И. ЧЕРТАНОВ: О классах пространств, не содержащих диадических бикомпактов большого веса, Матем. Заметки, т. 16,3(1974), 423-430.

[2] В.А. ЕФИМОВ, Г.И. ЧЕРТАНОВ: О некоторых операциях над классами топологических пространств, ДАН СССР, т. 216,1(1974), 25-27.

[3] В.А. ЕФИМОВ, Г.И. ЧЕРТАНОВ: О подпространствах Σ-произведений метрических пространств, Тезисы УП Всесоюзной топологической конференции, Минск, 1977, стр. 72.

[4] В.А. ЕФИМОВ, Г.И. ЧЕРТАНОВ: О двух свойствах континуума Суслина, Matem. Balcanica (печатается).

[5] H.H. CORSON: Normality in subsets of product spaces, Amer. J. Math. 81(1959), 785-796.

[6] R. ENGELKING: General Topology, Warszawa, 1977.

[7] L.B. TREYBIG: Concerning continuous images of compact ordered spaces, Proc. Amer. Math. Soc. 15 (1964), 866-871.

[8] D. AMIR, J. LINDENSTRAUSS: The structure of weakly compact sets in Banach spaces, Ann. Math. Ser. 2, 88:1(1968), 35-46.

[9] H. ROSENTHAL: The heredity problem for weakly compactly generated Banach spaces, Compositio Math. 28(1974)

[10] I. JUHÁSZ: Martin's axiom solves Ponomarev's problem, Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Math. 18(1970), 71-74.

Мех.- мат. факультет
М Г У
Москва В-234
СССР

Саранск
ул. Б. Хмельницкого 31
СССР

(Oblatum 2.6. 1978)