Ali Deaibes; Khalil Noureddine

Mesures cylindriques singulières sur un espace de Hilbert. Équivalence et orthogonalité

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, Vol. 24 (1983), No. 4, 581--595

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/106258`

COMMENTATIONES MATHEMATICAE UNIVERSITATIS CAROLINAE
24,4 (1983)

MESURES CYLINDRIQUES SINGULIÈRES SUR UN ESPACE DE HILBERT. ÉQUIVALENCE ET ORTHOGONALITÉ

Ali DEAIBES, Khalil NOUREDDINE

RESUME. Nous donnons dans ce travail différentes caractérisations des mesures cylindriques singulières sur un espace de Hilbert, et nous démontrons que la continuité absolue (resp. l'orthogonalité) de deux mesures cylindriques μ et ν sur H se ramène à la continuité absolue (resp. l'orthogonalité) de mesures de Radon sur $\mathbb{R}^{\infty}$, associées à μ et ν au moyen des bases hilbertiennes de H.

MOTS CLEFS. Mesures cylindriques, mesures cylindriques singulières, mesures gaussiennes, continuité absolue, équivalence, orthogonalité.

CLASSIFICATION : 28A15, 46G12

INTRODUCTION.

H désignant un espace de Hilbert réel séparable, il est bien connu que toute mesure cylindrique sur H se décompose, en tant que fonction additive d'ensembles, en une mesure complètement additive plus une mesure cylindrique purement additive. Utilisant la terminologie de [14] et la définition fonctionnelle d'une mesure cylindrique, nous appelons mesure cylindrique singulière toute mesure cylindrique sur H réduite à sa partie purement additive. Dans ce travail, nous donnons différentes caractérisations d'une telle mesure et nous démontrons que toute mesure cylindrique gaussienne sur H est ou bien singulière ou bien complètement additive.

A toute mesure cylindrique μ sur H et à toute base hilbertienne b de H, nous associons une mesure de Radon μ^b sur $\mathbb{R}^{\infty}$; et nous démontrons que μ est absolument continue par rapport à une autre mesure cylindrique ν si et seulement si μ^b est absolument continue par rapport à ν^b pour toute base hilbertienne b de H. μ est orthogonale à ν si et seulement si il existe une base b telle que μ^b soit orthogonale à ν^b. Ce qui permet de retrouver l'alternative de l'équivalence ou l'orthogonalité de deux mesures cylindriques gaussiennes sur H à partir du théorème de Feldman-Hajek.

NOTATIONS.

Dans ce qui suit H désigne un espace de Hilbert réel séparable et $\mathfrak{P}$ l'ensemble des projections orthogonales de rang fini de H, ordonné par la relation $P \leq Q$ si et seulement si $P(H) \subset Q(H)$. On note par $C_y^\infty(H)$ l'algèbre des fonctions réelles, cylindriques, bornées et continues sur H, et par $C^\infty(H_P)$ l'algèbre des fonctions réelles, continues et bornées sur $H_P = P(H)$, pour tout $P \in \mathfrak{P}$. L'algèbre $C_y^\infty(H)$ est la réunion des $(C^\infty(H_P)) \circ P$, $P \in \mathfrak{P}$; c'est un espace de Riesz pour son ordre usuel, et il est supposé normé par la norme de la convergence uniforme.

On appelle mesure cylindrique sur H toute forme linéaire sur $C_y^\infty(H)$, bornée sur la boule unité et vérifiant la condition suivante de régularité ([9], [10]) :

Pour tout $P \in \mathfrak{P}$ et toute suite $(f_n) \downarrow 0$ dans $C^\infty(H_P) \circ P$, $\mu(f_n) \longrightarrow 0$.

La notation $(f_n) \downarrow 0$ veut dire que la suite (f_n) décroit simplement vers 0.

L'espace de toutes les mesures cylindriques sur H est noté $M_y(H)$. Les éléments μ de $M_y(H)$ qui vérifient la condition de σ-régularité (i.e., $(f_n) \downarrow 0$ dans $C_y^\infty(H) \Longrightarrow \mu(f_n) \to 0$) sont exactement les mesures de Radon sur H ([9], [10]), on note par $M_\sigma(H)$ l'ensemble de ces éléments. Puisque toute fonction réelle continue sur H est évidemment limite simple d'une suite dans $C_y^\infty(H)$, alors toute mesure de Radon sur H est complètement déterminée par ses valeurs sur $C_y^\infty(H)$. Donc $M_\sigma(H)$ est bien un sous-espace vectoriel de $M_y(H)$.

On munit $M_y(H)$ de la relation d'ordre $\mu \leq \nu$ si $\mu(f) \leq \nu(f)$, pour toute fonction positive f de $C_y^\infty(H)$. $M_y(H)$ est alors engendré par son cône positif ([9], [10]).

On désigne, en outre, par $\mathbb{R}^\infty$ l'espace $\mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$, où $\mathbb{R}$ désigne le corps des nombres réels et $\mathbb{N}^*$ l'ensemble des entiers $n \geq 1$. $\mathbb{R}^\infty$ est supposé muni de sa topologie usuelle et de sa tribu de Borel. Pour tout entier $n \geq 1$, on identifie $\mathbb{R}^n$ à l'ensemble des suites (x_k) de $\mathbb{R}^\infty$ telles $x_k = 0$ pour $k > n$. La projection de $\mathbb{R}^\infty$ sur $\mathbb{R}^n$ est notée π_n.

Pour toute base hilbertienne $b = \{e_n, n \geq 1\}$ de H, l'application T^b qui, à tout x dans H, associe la suite $T^b(x) = (<x, e_n>)_{n\geq 1}$ de $\mathbb{R}^\infty$ est une isométrie linéaire de H sur le sous-espace ℓ^2 de $\mathbb{R}^\infty$, pour toute mesure cylindrique μ sur H, l'image $\mu^b = T^b(\mu)$ de μ par T^b est une mesure de Radon sur $\mathbb{R}^\infty$ ([4], [11]). Si pour tout $n \geq 1$, on identifie $\mathbb{R}^n$ et le sous-espace H_n engendré par $e_1, e_2, \ldots, e_n$, alors on a $\pi_n(\mu^b) = P_n(\mu) = \mu_n$, où P_n est la projection de H sur H_n.

1. MESURES CYLINDRIQUES SINGULIERES SUR H.

L'espace $M_y(H)$ étant ordonné par la relation " $\mu \leq \nu$ si et seulement si $\mu(f) \leq \nu(f)$, pour toute fonction positive $f \in C_y^\infty(H)$ ", il est facile de voir par des raisonnements classiques que $M_y(H)$ est un espace complètement réticulé (i.e., tout sous-ensemble non vide majoré (resp. minoré) admet une borne supérieure (resp. inférieure)) et que l'espace $M_\sigma(H)$ est une bande dans $M_y(H)$. On désigne par $M_\sigma^\perp(H)$ la bande orthogonale à $M_\sigma(H)$. Nous appelons mesure cylindrique singulière tout élément de $M_\sigma^\perp(H)$. En d'autres termes $\mu \in M_\sigma^\perp(H)$ si et seulement si les relations $\nu \in M_\sigma(H)$ et $|\nu| \leq |\mu|$ entraînent $\nu = 0$. D'après le théorème de décomposition de Riesz toute mesure cylindrique μ sur H s'écrit d'une façon unique sous la forme :

$$\mu = \mu_0 + \mu_1, \quad \text{où} \quad \mu_0 \in M_\sigma(H) \quad \text{et} \quad \mu_1 \in M_\sigma^\perp(H).$$

Pour une mesure cylindrique positive μ sur H, la composante μ_0 de μ dans $M_\sigma(H)$ est la borne supérieure de toutes les mesures de Radon positives majorées par μ. En fait, on peut donner une construction concrète de μ_0 selon le procédé suivant : pour tout réel $t > 0$ et toute fonction $f \in C_y^\infty(H)$, on pose :

$$\mu_t(f) = \lim_P \int e^{-t \frac{\|P(x)\|^2}{2}} f(x)\,d\mu(x).$$

On voit clairement que cette limite existe lorsque f est positive et, si f est quelconque on décompose f sous la forme : $f = f^+ - f^-$, où f^+ et f^- sont les parties positive et négative de f ; ce qui fait que $\mu_t(f) = \mu_t(f^+) - \mu_t(f^-)$.

<u>THEOREME 1.</u> <u>Avec les notations précédentes on a :</u>

1) <u>Pour tout réel</u> $t > 0$, <u>l'application</u> μ_t <u>qui, à toute fonction</u> $f \in C_y^\infty(H)$, <u>associe</u> $\mu_t(f)$ <u>est une mesure de Radon sur</u> H <u>plus petite</u> que μ.

2) <u>La composante</u> μ_0 <u>de</u> μ <u>dans</u> $M_\sigma(H)$ <u>est la borne supérieure des</u> μ_t, $t > 0$.

<u>PREUVE.</u> 1) Il est clair que μ_t est une forme linéaire sur $C_y^\infty(H)$, démontrons qu'elle est σ-régulière : soit, en effet, $(f_k)_{k\geq 0}$ une suite décroissante vers 0 dans $C_y^\infty(H)$. On peut évidemment supposer que, pour tout $k \geq 0$, on a $0 \leq f_k \leq 1$. Ces fonctions étant faiblement continues sur H, le théorème de Dini montre que la suite (f_k) décroit uniformément vers 0 sur chaque boule fermée

$$B_r = \{x \in H, \ \|x\| \leq r\}, \qquad r > 0.$$

ce qui fait que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier k_0 tel que $|f_k(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$, pour tout $x \in B_{r_0}$ et tout $k \geq k_0$ ($r_0 > 0$ étant fixé tel que $e^{-t\frac{r_0^2}{2}} < \frac{\varepsilon}{2}$). Pour tout $k \geq k_0$, on a donc:

$$\mu_t(f_k) = \lim_P \int e^{-t\frac{\|P(x)\|^2}{2}} f_k(x)d\mu(x)$$

$$\leq \int e^{-t\frac{\|Q(x)\|^2}{2}} f_k \circ Q(x)d\mu(x), \quad \text{où } Q \in \mathfrak{P} \text{ est telle que } f \circ Q = f$$

$$\leq \int_{H_Q} e^{-t\frac{\|Q(x)\|^2}{2}} f_k(x)d\mu_Q(x), \quad \text{où } \mu_Q = Q(\mu)$$

$$\leq \int_{Q(B_{r_0})} e^{-t\frac{\|Q(x)\|^2}{2}} f_k(x)d\mu_Q(x) + \int_{H_Q \setminus Q(B_{r_0})} e^{-t\frac{\|Q(x)\|^2}{2}} f_k(x)d\mu_Q(x)$$

$$\leq \left(\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}\right)\mu(1) = \varepsilon\mu(1).$$

ce qui montre que μ_t est une mesure de Radon sur H et comme l'inégalité $\mu_t \leq \mu$ est évidente, l'assertion 1 est démontrée.

2) D'abord $\sup_{t>0} \mu_t$ est bien une mesure de Radon sur H majorée par μ et, si ν est une autre mesure de Radon positive majorée par μ, on a $\nu \leq \sup_{t>0} \mu_t$: En effet, pour $f \in C_y^\infty(H)$, $f \geq 0$, on peut écrire

$$\nu(f) = \lim_{t\to 0} \int e^{-t\frac{\|x\|^2}{2}} f(x)d\nu(x) = \sup_{t>0} \int e^{-t\frac{\|x\|^2}{2}} f(x)d\nu(x)$$

$$= \sup_{t>0} \left\{\lim_P \int e^{-t\frac{\|P(x)\|^2}{2}} f(x)d\nu(x)\right\}$$

$$\leq \sup_{t>0} \left\{\lim_P \int e^{-t\frac{\|P(x)\|^2}{2}} f(x)d\mu(x)\right\} = \sup_{t>0} \mu_t(f)$$

ce qui montre que $\sup_{t>0} \mu_t$ est bien la composante μ_0 de μ dans $M_\sigma(H)$.

Dans [9] et [10] nous avons associé à toute mesure cylindrique positive μ sur H une fonction α_μ définie sur l'ensemble des réels positifs ou nuls et telle que $\alpha_\mu(0) = \mu(1)$ et $\alpha_\mu(t) = \mu_t(1)$, pour $t > 0$.

Comme conséquence immédiate du théorème précédent, on a :

COROLLAIRE. *Soit* μ *une mesure cylindrique positive sur* H

1) μ *est singulière si et seulement si* $\alpha_{\mu}(t) = 0$, *pour tout réel* $t > 0$.

2) μ *est une mesure de Radon sur* H *si et seulement si*

$$\mu_0(1) = \lim_{t \to 0} \mu_t(1) = \mu(1) \quad ([13]).$$

REMARQUE.

La mesure gaussienne canonique γ sur H est singulière car il est facile de voir que $\alpha_{\gamma}(t) = 0$, pour tout réel $t > 0$. Le théorème 4 de ce papier précise d'avantage ce fait.

Pour mieux voir les cas où μ est réduite à l'une de ses composantes μ_0 ou μ_1, nous avons besoin du théorème de Bochner qui affirme qu'il existe une bijection entre l'ensemble des mesures cylindriques positives sur H et l'ensemble des mesures positives bornées sur le dual algébrique de H muni de la tribu cylindrique. Sachant que le dual algébrique de H est le complété de H muni de la topologie faible $\sigma(H, H)$, désignons le par $\hat{H}_{\sigma}$. On sait, en outre, que $\hat{H}_{\sigma}$ est la limite projective des espaces $H_P = P(H)$, où $P \in \mathfrak{P}$. Notons par $\hat{P}$ l'application canonique de $\hat{H}_{\sigma}$ sur H_P, par $\mathfrak{C}$ la plus petite tribu sur $\hat{H}_{\sigma}$ rendant mesurables les applications $\hat{P}$, $P \in \mathfrak{P}$, et par $\hat{\mu}$ la mesure bornée sur $(\hat{H}_{\sigma}, \mathfrak{C})$ associée à $\mu \in M_{\gamma}(H)$, $\mu \geq 0$ au moyen du théorème de Bochner. Pour toute projection $P \in \mathfrak{P}$ on a $\hat{P}(\hat{\mu}) = P(\mu) = \mu_P$ et P est la restriction de $\hat{P}$ à H.

Moyennant les notations précédentes, on a :

THEOREME 2. *Pour une mesure cylindrique positive* μ *sur* H, *les conditions suivantes sont équivalentes.*

1) μ *est une mesure de Radon sur* H.

2) $(\hat{\mu})^*(H) = \mu(H)$ ([1]), *où* $(\hat{\mu})^*$ *est la mesure extérieure associée à* $\hat{\mu}$.

3) *Pour toute base hilbertienne* b *de* H, $\mu^b(H) = \mu(H)$.

PREUVE. L'équivalence entre les deux premières assertions est bien connue ([1]), démontrons celle de la première et la troisième :

(1) $\Longrightarrow$ (3) : Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une boule

$B_r = \{x \in H, \ \|x\| \leq r\}$ telle que

$\mu(B_r) > \mu(1) - \varepsilon$. Ce qui fait que

$\mu^b(\pi_n^{-1}(B_r \cap \mathbb{R}^n)) = \mu_n \ (B_r \cap \mathbb{R}^n) > \mu(1) - \varepsilon$ (voir notations). Mais la suite $\pi_n^{-1} \ (B_r \cap \mathbb{R}^n)$ décroit vers B_r, donc à la limite, on a $\mu^b(B_r) \geq \mu(1) - \varepsilon$. Ce qui fait que $\mu^b(H) \geq \mu(1) - \varepsilon$ et par suite l'égalité $\mu^b(H) = \mu^b(\mathbb{R}^\infty) = \mu(1) = \mu(H)$.

(3) $\Longrightarrow$ (1) : Il s'agit de montrer que si $(f_n)_{n\geq 1}$ est une suite décroissante vers 0 dans $C_y^\infty(H)$, alors $\mu(f_n)$ tend vers 0. En effet, pour tout $n \geq 1$, f_n est de la forme $f_n = f_n \circ Q_n$, où $Q_n \in \mathfrak{P}$. On peut évidemment supposer que la suite (Q_n) croit vers l'application identique 1_H de H.

Par suite, il existe une base hilbertienne $b = \{e_k, \ k \geq 1\}$ de H et une suite croissante d'entiers $(k_n) \uparrow \infty$, telles que pour tout $n \geq 1$, l'ensemble $\{e_1, e_2, \ldots, e_{k_n}\}$ soit une base orthonormée de $H_{Q_n} = Q_n(H)$.

Puisque $\mu^b(H) = \mu^b(\mathbb{R}^\infty) = \mu(H)$, la suite $g_n = f_n \circ \pi_{k_n}$, définie sur $\mathbb{R}^\infty$, décroit vers 0 μ^b-presque partout. Donc d'après le théorème de Beppo-Lévi, ou le théorème de Lebesgue, la suite $\mu^b(g_n) = \mu(f_n)$ converge vers 0. Ce qui achève la preuve du théorème.

REMARQUE. Il résulte du théorème précédent que, si μ est une mesure de Radon sur H, la restriction de μ^b à H est identique à μ. En d'autres termes, la mesure μ peut être identifiée à toutes ses images μ^b sur $\mathbb{R}^\infty$.

Lorsque la mesure cylindrique $\mu \geq 0$ est scalairement concentrée sur les boules de H (voir [11]) le théorème 2 peut être amélioré de la façon suivante :

THEOREME 2'. Pour qu'une mesure cylindrique positive μ, scalairement concentrée sur les boules de H, soit une mesure de Radon sur H il suffit qu'il existe une base hilbertienne b de H telle que $\mu^b(H) = \mu(H)$.

PREUVE. Par hypothèse, on a $\mu^b(\mathbb{R}^\infty \setminus H) = 0$, pour une base hilbertienne b de H. Alors la restriction de μ^b à H détermine une mesure de Radon ν sur H telle que pour tout $n \geq 1$, $P_n(\nu) = P_n(\mu) = \mu_n$. Pour démontrer que μ et ν soient identiques, il suffit de prouver que leurs transformées de Fourier F_μ et F_ν le sont. Ce qui se fait facilement comme dans ([5], page 122) en remarquant que le fait que μ est scalairement concentrée sur les boules de H entraîne la continuité de F_μ sur H ([11]).

THEOREME 3. Pour une mesure cylindrique positive μ sur H les trois conditions suivantes sont équivalentes :

1) μ est singulière.
2) $(\hat{\mu})^*(H) = 0$
3) Il existe une base hilbertienne b de H telle que $\mu^b(H) = 0$.

PREUVE.
(1) $\Longrightarrow$ (2) : μ étant singulière, on a $\alpha_\mu(1) = 0$. Il en résulte l'existence d'une suite $(P_n)_{n\geq 1}$ d'éléments de $\mathfrak{P}$ telle que $(P_n) \uparrow 1_H$ et telle que

$$\alpha_\mu(1) = \lim_n \int_H e^{-\frac{\|P_n(x)\|^2}{2}} d\mu(x) = \lim_n \int_{\hat{H}_\sigma} e^{-\frac{\|\hat{P}_n(x)\|^2}{2}} d\hat{\mu}(x) = 0.$$

Posons pour tout $n \geq 1$, $f_n(x) = e^{-\frac{\|\hat{P}_n(x)\|^2}{2}}$, pour tout $x \in \hat{H}_\sigma$

Puisque cette suite converge en moyenne vers 0, elle admet une sous-suite (f_{k_n}) qui converge vers 0 presque partout sur $\hat{H}_\sigma$. Or pour $x \in H$, la suite $(f_{k_n}(x))$ converge vers $e^{-\frac{\|x\|^2}{2}} > 0$. Donc H est $\hat{\mu}$-négligeable et l'implication est démontrée.

(3) $\Longrightarrow$ (1) : En effet, si ν est une mesure de Radon sur H telle que $\nu \leq \mu$, alors on a $\nu^b \leq \mu^b$. Par suite $\nu^b(H) \leq \mu^b(H) = 0$, et ν est identiquement nulle, c.q.f.d.

(1) $\Longrightarrow$ (3) : La démonstration est légèrement différente de celle de l'implication (1) $\Longrightarrow$ (2). En effet, on a

$$\alpha_\mu(1) = \lim_P \int e^{-\frac{\|P(x)\|^2}{2}} d\mu(x) = 0.$$

D'où l'existence d'une suite (Q_n) d'éléments de $\mathfrak{P}$ telle que $(Q_n) \uparrow 1_H$ et telle que $\lim_n \int e^{-\frac{\|Q_n(x)\|^2}{2}} d\mu(x) = 0$. Et comme dans la preuve de (1) $\Longrightarrow$ (2), on peut trouver une base hilbertienne $b = \{e_k, k \geq 1\}$ et une suite $(k_n) \uparrow \infty$ telles que, pour tout $n \geq 1$, l'ensemble $\{e_1, \ldots, e_{k_n}\}$ soit une base orthonormée de $H_{Q_n} = Q_n(H)$. En désignant par P_n la projection orthogonale de H sur le sous-espace H_n engendré par $e_1, e_2, \ldots, e_n$, on a aussi: $\lim \int e^{-\frac{\|P_n(x)\|^2}{2}} d\mu(x) = 0$

$$= \lim_n \int_{\mathbb{R}^\infty} e^{-\frac{\|\pi_n(x)\|^2}{2}} d\mu^b(x).$$

Or, la suite $\left(e^{-\frac{\|\pi_n(x)\|^2}{2}}\right)$ converge simplement sur $\mathbb{R}^\infty$ vers la fonction égale à $e^{-\frac{\|x\|^2}{2}}$ pour $x \in H \equiv \ell^2$, et égale à 0 pour $x \in \mathbb{R}^\infty \setminus \ell^2$. Donc d'après le théorème de Lebesgue, on a :
$\int_H e^{-\frac{\|x\|^2}{2}} d\mu^b(x) = 0$, ce qui fait que $\mu^b(H) = 0$; et le théorème est démontré.

REMARQUE. Avec la preuve du théorème 3, on voit que, pour qu'une mesure cylindrique positive μ soit singulière, il suffit qu'il existe un seul $t > 0$ tel que $\alpha_\mu(t) = 0$ (i.e., il suffit qu'il existe un seul $t > 0$ tel que $\mu_t = 0$).

Les deux théorèmes précédents permettent d'avoir l'alternative suivante :

<u>THEOREME 4.</u> <u>Soit</u> μ <u>une mesure cylindrique gaussienne sur</u> H. <u>Alors</u> μ <u>est ou bien singulière, ou bien de Radon</u> (<u>i</u>.<u>e</u>., μ <u>est ou bien purement additive, ou bien complètement additive</u>).

<u>PREUVE.</u> Soit $b = \{e_n, n \geq 1\}$ une base hilbertienne de H; La mesure μ^b, image de μ par l'application T^b est une mesure de Radon gaussienne sur $\mathbb{R}^\infty$.

Or $H \equiv \ell^2$ est un sous-espace vectoriel borélien de $\mathbb{R}^\infty$. Donc d'après la loi du 0 - 1 ([2], [6], [7]), on a $\mu^b(H) = 0$, ou $\mu^b(H) = 1$. Si $\mu^b(H) = 0$, le théorème 3 montre que μ est singulière. Et si $\mu^b(H) = 1$, le théorème 2' montre que μ est une mesure de Radon sur H. c.q.f.d.

2. EQUIVALENCE ET ORTHOGONALITE DE DEUX MESURES CYLINDRIQUES SUR H.

Suivant un travail de I. E. SEGAL ([12]) on peut définir la continuité absolue d'une mesure cylindrique positive ν par rapport à une autre μ en posant : $\nu \ll \mu$ si et seulement $\hat{\nu}$ est absolument continue par rapport à $\hat{\mu}$, où $\hat{\nu}$ (resp. $\hat{\mu}$) est la mesure associée à ν (resp. μ) sur $(\hat{H}_\sigma, \mathfrak{C})$. L'équivalent ensembliste de cette définition s'écrit comme suit : $\nu \ll \mu$ si et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que la relation $\mu(A) < \eta$ entraîne $\nu(A) \leq \varepsilon$, pour tout $A \in \mathfrak{a}$, où $\mathfrak{a}$ est l'algèbre des cylindres boréliens de H. La notion d'orthogonalité de μ et ν peut être également définie en écrivant: $\nu \perp \mu$ si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $A \in \mathfrak{a}$ tel que $\mu(A) + \nu(H \setminus A) < \varepsilon$

Avec la définition fonctionnelle des mesures cylindriques sur H, et la relation d'ordre définie sur $M_y(H)$ en tant que sous-espace vectoriel de l'espace des formes linéaires relativement bornées sur l'espace de Riesz $C_y^\infty(H)$, on peut définir les deux notions de continuité absolue et d'orthogonalité en posant :

1) $\nu \ll \mu$ si et seulement si $\nu \in B_\mu$, où B_μ est la bande engendrée par μ dans l'espace complètement réticulé $M_y(H)$.

2) $\nu \perp \mu$ si et seulement si $\nu \in B_\mu^\perp$, où $B_\mu^\perp$ est la bande orthogonale à B_μ dans $M_y(H)$.

Lorsqu'on a $\nu \ll \mu$ et $\mu \ll \nu$, μ et ν sont dites équivalentes: $(\mu \sim \nu)$.

Ces différentes définitions de la notion de continuité absolue (resp. d'orthogonalité) sont, d'après des raisonnements classiques, équivalentes. Ce qui est à noter dans cette question est que le raisonnement sur une mesure cylindrique μ sur H en tant que mesure complètement additive $\hat{\mu}$ sur $(\hat{H}_\sigma, \mathfrak{C})$, ne se fait pas sans difficultés, car d'une part H n'est pas un élément de la tribu $\mathfrak{C}$ de $\hat{H}_\sigma$ et d'autre part H est $\hat{\mu}$-négligeable lorsque μ est singulière (Théorème 3). Nous estimons qu'il est peut-être adéquat de raisonner plutôt en termes de mesures μ^b sur $\mathbb{R}^\infty$: En effet, $\mathbb{R}^\infty$ n'est pas un espace "trop grand", sa tribu cylindrique coïncide avec sa tribu de Borel et $H \equiv \ell^2$ est un borélien de $\mathbb{R}^\infty$. En plus, on a :

<u>THEOREME 5.</u> <u>Pour deux mesures cylindriques positives</u> μ <u>et</u> ν <u>sur</u> H, <u>on a</u> :

1) $\nu \ll \mu$ <u>si et seulement si</u> $\nu^b \ll \mu^b$, <u>pour toute base hilbertienne</u> b <u>de</u> H.

2) $\nu \perp \mu$ <u>si et seulement si il existe une base hilbertienne</u> b <u>de</u> H <u>telle que</u> $\nu^b \perp \mu^b$.

<u>PREUVE.</u> 1) En effet, on a d'abord ([3], chapitre II) :

$\nu \ll \mu$ si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que les relations $f \in C_y^\infty(H))$, $0 \leq f \leq 1$ et $\mu(f) < \eta$ entraînent $\nu(f) \leq \varepsilon$. Il en résulte que la condition est évidemment nécessaire. Réciproquement supposons que, pour toute base hilbertienne b de H on ait $\nu^b \ll \mu^b$ et que ν ne soit pas absolument continue par rapport à μ. Alors il existe un

réel $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $n \geq 1$, il existe une fonction $f_n \in C_y^\infty(H)$, $0 \leq f_n \leq 1$, telle que $\mu(f_n) < \frac{1}{n}$ et $\nu(f_n) > \varepsilon$. La fonction f_n est de la forme $f_n = f_n \circ Q_n$, $Q_n \in \mathfrak{P}$. On peut, comme dans les cas précédents, supposer que la suite (Q_n) croit vers 1_H, et alors on peut trouver une suite d'entiers $(k_n) \uparrow \infty$ et une base hilbertienne $b = \{e_n, n \geq 1\}$ telles que l'ensemble $\{e_1, \ldots, e_{k_n}\}$ soit une base orthonormée de H_{Q_n}. Si l'on pose $g_n = f_n \circ \pi_{k_n}$, on a $\mu^b(g_n) = \mu(f_n) < \frac{1}{n}$ et $\nu^b(g_n) = \nu(f_n) > \varepsilon$.
Ce qui fait que ν^b n'est pas absolument continue par rapport à μ^b, d'où la contradiction qui démontre l'assertion 1).

2) Tout comme dans la preuve de la première assertion, on remarque d'abord avec ([3], chapitre II) que ν est orthogonale à μ si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une fonction $f \in C_y^\infty(H)$, $0 \leq f \leq 1$, telle que $\mu(f) + \nu(1 - f) \leq \varepsilon$

Cette remarque montre que la condition de l'assertion est suffisante. Réciproquement, supposons que ν soit orthogonale à μ. Pour tout entier $n \geq 1$, il existe alors une fonction $f_n \in C_y^\infty(H)$, $0 \leq f_n \leq 1$ telle que $\mu(f_n) + \nu(1 - f_n) \leq \frac{1}{n}$. La fonction f_n est de la forme $f_n = f_n \circ Q_n$, $(Q_n) \uparrow 1_H$. Ce qui permet de construire comme plus haut, une base hilbertienne b de H et une suite $g_n = f_n \circ \pi_{k_n}$ telles que :
$\mu^b(g_n) + \nu^b(1 - g_n) = \mu(f_n) + \nu(1 - f_n)$. En d'autres termes ν^b est orthogonale à μ^b, et le théorème est complètement démontré.

Pour deux mesures cylindriques positives μ et ν sur H, le théorème de décomposition de Riesz permet d'écrire d'une façon unique $\nu = \nu_1 + \nu_2$, où $\nu_1 \ll \mu$ et $\nu_2 \perp \mu$. Il en résulte que, pour toute base hilbertienne b de H, on a :
$\nu^b = \nu_1^b + \nu_2^b$ et il existe une base b_0 telle que $\nu^{b_0} = \nu_1^{b_0} + \nu_2^{b_0}$ soit la décomposition de Lebesgue de ν^{b_0} par rapport à μ^{b_0}.

Signalons encore que, si ν est absolument continue par rapport à μ, on a $\nu_P = P(\nu) \ll P(\mu) = \mu_P$, pour toute projection

$P \in \mathfrak{P}$. Et si pour une projection $P \in \mathfrak{P}$, on a $\nu_P \perp \mu_P$, alors ν est orthogonale à μ.

La réciproque de chacune de ces affirmations n'est pas vraie, ce qui rend plus ou moins légitimes l'énoncé et la preuve du théorème 5.

REMARQUES. L'idée d'étudier les mesures cylindriques μ sur H par leurs images μ^b sur $\mathbb{R}^\infty$ peut avoir des applications de différentes sortes.
Signalons, à titre d'exemple, les remarques suivantes concernant le théorème 5 :

1) Fixons deux mesures cylindriques positives μ et ν sur H et une base hilbertienne $b = \{e_n, n \geq 1\}$. Posons $\mu_n = P_n(\mu)$, $\nu_n = P_n(\nu)$, où P_n est la projection :

$$x \longrightarrow P_n(x) = \sum_{k=1}^{n} < x, e_k > e_k .$$

Supposons que ν soit absolument continue par rapport à μ. Donc, pour tout $n \geq 1$, on a $\nu_n \ll \mu_n$.
Soit σ_n la densité de ν_n par rapport à μ_n et posons $\rho_n = \sigma_n \circ \pi_n$, où π_n est la projection de $\mathbb{R}^\infty$ sur $\mathbb{R}^n$. Alors la suite (ρ_n) est une martingale qui converge μ^b-presque partout vers une fonction $\rho_b \geq 0$ sur $\mathbb{R}^\infty$. Il est facile de voir comme dans [13] que :

1º $\nu^b \ll \mu^b$ si et seulement si $\int \rho_b d\mu^b = \nu^b(\mathbb{R}^\infty)$

2º $\nu^b \perp \mu^b$ si et seulement si $\rho_b = 0$ μ^b-presque partout.

2) Le théorème 5 ramène l'alternative de l'équivalence ou l'orthogonalité de deux mesures cylindriques gaussiennes sur H à celle de leurs images μ^b et ν^b sur $\mathbb{R}^\infty$. En effet, d'après le théorème de Feldman-Hajek on a l'alternative $\nu^b \sim \mu^b$ ou $\nu^b \perp \mu^b$. Si pour une base hilbertienne b, on a $\nu^b \perp \mu^b$, alors ν est orthogonale à μ et, si $\nu^b \sim \mu^b$ pour toute base hilbertienne b, on a $\nu \sim \mu$.

3) Prenons $\mu = \gamma$, la mesure cylindrique gaussienne canonique sur H, $\nu = \tau_a\gamma$ la translatée de γ par un élément a quelconque de H et fixons une base hilbertienne $b = \{e_n, n \geq 1\}$ de H. Pour tout $n \geq 1$, on a $P_n(\nu) = \nu_n \ll \mu_n = P_n(\gamma)$, et les applications σ_n de la remarque 1) sont définies par

$$\sigma_n(x) = e^{<x, P_n(a)>} \cdot e^{-\frac{\|P_n(a)\|^2}{2}}, \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}^n \equiv H_n.$$

Alors, la suite (ρ_n), où $\rho_n = \sigma_n \circ \pi_n$, converge γ^b-presque partout sur $\mathbb{R}^\infty$ vers une fonction ρ qui ne peut pas être nulle γ^b-presque partout. Ce qui prouve que ν^b n'est pas orthogonale à γ^b, donc elle lui est équivalente.
Comme cela est vraie pour toute base hilbertienne b de H, on voit que ν et γ sont équivalentes. On retrouve ainsi le résultat bien connu ([12]) de l'équivalence de γ avec toute ses translatées.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BADRIKIAN A. : Séminaire sur les fonctions aléatoires linéaires et les mesures cylindriques, Lecture Notes in Math. 139, Springer, 1970.

[2] BORELL C. : Gaussian Radon measures on locally convexe spaces, Math. Scand., 38, 1976, 265-284.

[3] BOURBAKI N. : Intégration, chapitre 1, 2, 3, 4, Hermann, Paris, 1965.

[4] BOURBAKI N. : Intégration, chapitre 9, Hermann, Paris, 1969.

[5] BUCHWALTER H. : Intégration sur un espace topologique et mesure de Wiener, Pub. Dép. Math. Lyon, 8, 1977.

[6] BUCHWALTER H. : Analyse fonctionnelle, Module 214, Pub. Dep. Math. Lyon, 1979.

[7] DUDLEY R.M., FELDMAN J., LE CAM L. : On semi-norms and probabilities, and abstract Wiener spaces, Ann. Of Math., 93, 1971. 390-408.

[8] FELDMAN J. : Equivalence and perpendicularity of Gaussian processes, Pacif. J. Math., 8, 1958, 690-708

[9] NOUREDDINE K., DEAIBES A. : Fonctions et mesures cylindriques sur un espace de Hilbert, Sém. Analyse fonct., Fac. Sc., U.L., Beyrouth, 1980.

[10] NOUREDDINE K., DEAIBES A. : Sur un théorème de P. Lévy, Bull. Soc. Roy. Sc. Liège, 50^{e} année, N^{o} 1-2, 1981, 115-123.

[11] SCHWARTZ L. : Radon measures, Oxford Uni. Press, London, 1973.

[12] SEGAL I.E. : Distributions in Hilbert spaces and Canonical systems of operators, Trans. Amer. Math. Soc. 88, 1958, 12-41.

[13] SKOROKHOD.A.V.: Integration in Hilbert spaces, Springer, 1974.

[14] ZANEN : Integration, North-Holland, 1967.

Faculté Des Sciences
UNIVERSITE LIBANAISE
Hadath - Beyrouth
LIBAN

(Oblatum 19.5. 1983)