A. G. Nakonechnyj

Об оценке функционалов от решений дифференциальных уравнений

Archivum Mathematicum, Vol. 14 (1978), No. 3, 155--159

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/107002`

ARCH. MATH. 3, SCRIPTA FAC. SCI. NAT. UJEP BRUNENSIS
XIV: 155—160, 1978

ОБ ОЦЕНКЕ ФУНКЦИОНАЛОВ ОТ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

НАКОНЕЧНЫЙ А. Г.

(Поступило в редакцию 10-го января 1977 г.)

В статье рассматриваются задачи нахождения минимаксных оценок функционалов от решений линейных дифференциальных уравнений в гильбертовом пространстве. Общие факты из теории гильбертовых пространств с негативной нормой и дифференциальных уравнений в этих пространствах см. например в монографиях [1] и [2].

Пусть H_0 гильбертовое пространство, H_+ и H_- его оснащение. Нормы и скалярные произведения в этих пространствах будем обозначать соответствующими индексами. Через $L_2(H_+)$ обозначим пространство измеримых функций $x(t)$; $t \in [t_0, T]$ со значениями в H_+ и таких, что

$$\int_{t_0}^{T} \| x(t) \|_+^2 \, \mathrm{d}t < \infty.$$

Аналогично вводятся пространства $L_2(H_0)$ и $L_2(H_-)$. Для функций $x(.) \in$ $\in L_2(H_+)$ можно ввести обобщенную производную, подробнее см. [2].

Введем пространство $W[t_0, T]$

$$W[t_0, T] = \left\{ x(.) : x(.) \in L_2(H_+); \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \in L_2(H_-) \right\}.$$

Это пространство снабженное нормой

$$\| x \|_w = \left(\int_{t_0}^{T} \| x(t) \|_+^2 \, \mathrm{d}t + \int_{t_0}^{T} \left\| \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \right\|_-^2 \mathrm{d}t \right)^{\frac{1}{2}}$$

становится гильбертовым.

Рассмотрим далее непрерывный оператор при каждом $t \in [t_0, T]$ действующий из пространства H_+ в пространство H_- и такой что для $\forall \varphi, \psi \in H_+$ функция $(A(t)\,\varphi, \psi)_0$ измерима по t на отрезке $[t_0, T]$, причем существуют такие λ и $\alpha > 0$, что

$$(A(t)\,\varphi, \varphi)_0 + \lambda \| \varphi \|_0^2 \geq \alpha \| \varphi \|_+^2 .$$

Предположим, что функция $x(.) \in W[t_0, T]$, удовлетворяет дифференциальному уравнению вида

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)\,x(t) + a(t) + f_1(t)$$

$$x(t_0) = a_0 + f_0$$

с некоторыми функциями $a(.), f_1(.) \in L_2(H_-)$ и векторами $a_0, f_0 \in H_0$.

Заметим, что для такого уравнения существует единственное решение принадлежащее пространству $W[t_0, T]$.

Пусть нам задана функция $y(t)$; $t \in [t_0, \bar{T}]$, $\bar{T} \leqq T$ и $y(t) = C(t)\,x(t) + b(t) + f_2(t)$
где $b_2(.), f_2(.), C(.)\,x(.) \in L_2(H)$;
H — некоторое гильбертовое пространство. $C(t)$ — ограниченный оператор. Будем считать, что функции $a(t)$, $b(t)$ и вектор a_0 заданы, а вектор $f = (f_0, f_1(.), f_2(.))$ принадлежит области D

$$D = \{f : (Q_0 f_0, f_0) + \int_{t_0}^{t_1} (Q_1(t)\,f_1(t), f_1(t))_-\,dt + \int_{t_0}^{\bar{T}} (Q_2(t)\,f_2(t)\,f_2(t))\,dt \leqq 1\}.$$

Q_0, $Q_1(t)$, $Q_2(t)$ — ограниченные неотрицательные, самосопряженные операторы переводящие H_0 в H_0, H_- в H_-, H в H соответственно, причем $Q_1(t)$ функции из $L_2(H_-)$ переводит в $L_2(H_-)$, а $Q_2(t)$ переводит функции из $L_2(H)$ в $L_2(H)$ и для которых существуют обратные операторы обладающие этими же свойствами.

Наша задача состоит в том, чтобы получить оптимальную, в некотором смысле, линейную оценку, ограниченного функционала вида

$$g(x) = \int_{t_0}^{t_1} (q(t), x(t)_0\,dt + (q_1, x(t_1)); \qquad t_1 \geqq \bar{T}.$$

Функция $q(t)$ и вектор q_1 — фиксированы и принадлежат пространству $L_2(H_-)$ и H_0 соответственно.

При оценке функционала $g(x)$, не ограничивая общности мы можем положить $a(t) = b(t) = a_0 = 0$.

Предположим далее, что допустимые оценки представимы в виде

$$\hat{g}(x) = -\int_{t_0}^{\bar{T}} (u(t), y(t))\,dt,$$

где $u(.)$ некоторая функция из пространства $L_2(H)$. Оценку, для которой функция $u(t)$ находится из условия

$$\inf_{u} \sup_{f \in D} (g(x) - \hat{g}(x))^2$$

будем называть минимаксной.

Теорема 1.

Минимаксная оценка имеет вид

$$\hat{g}_0(x) = -\int_{t_0}^{\bar{T}} (u_0(t), y(t))\,dt,$$

где $u_0(t) = -Q_2^{-1}(t)\,C(t)\lambda(t)$

и функция $\lambda(t)$ определяется из решения системы уравнений

$$\frac{dz}{dt} = -A^+ z - q(t) - C^*(t)\,\Lambda u_0(t)$$

$$z(\bar{T}) = q_2$$

$$\frac{d\lambda(t)}{dt} = A\lambda + I^*\tilde{Q}_1 z$$

$$\lambda(t_0) = Q_0^{-1} z(t_0)$$

A^+ — сопряженный к оператору A — непрерывно переводящий H_+ в H_-, Λ — канонический изоморфизм гильбертового пространства H в сопряженное, $\tilde{Q}_1 = IQ_1^{-1}(t)\,I^*$, I — оператор обратный к оператору вложения H_+ в H_-; и если $z(t)$, $\bar{T} \leqq t \leqq t_1$, решение уравнения

$$\frac{d\bar{z}}{dt} = -A^+\bar{z} - q(t)$$

$$\bar{z}(t_1) = q_1$$

то $q_2 = \bar{z}(\bar{T})$.

При доказательстве этой теоремы используется следующая Лемма. Задача нахождения минимаксной оценки эквивалентна задаче оптимального управления системой

$$\frac{dz}{dt} = -A^+(t)\,z - q(t) - C^*(t)\,\Lambda u(t)$$

$$z(\bar{T}) = q_2$$

с критерием качества вида

$$I(u) = (Q_0^{-1}z(t_0), z(t_0))_0 + \int_{t_0}^{\bar{T}} (\tilde{Q}_1(t)\,z(t), z(t))_+\,dt + \int_{t_0}^{\bar{T}} (Q_2^{-1}(t)\,u(t), u(t))\,dt.$$

Решая затем задачу управления, мы получим требуемый результат.

Предположим теперь, что нам задан элемент $y(T)$ вида

$$y(T) = Cx(T) + f_2$$

где C — ограниченный оператор отображающий пространство H_+ в гильбертово пространство H. Допустимые оценки функционала $g(x)$ имеют вид

$$\hat{g}(x) = -(u, y(T))$$

$$f = (f_0 f_1(.), f_2) \in D$$

$$D = \{f : (Q_0 f_0, f_0)_0 + \int_{t_0}^{t_1} (Q_1(t) f_1(t), f_1(t))_- \, dt + (Q_2 f_2, f_2) \leqq 1\}.$$

Тогда, можно показать, что справедлива следующая

Теорема 2.

Минимаксная оценка имеет вид

$$\hat{g}_0(x) = -(u_0, y(T))$$

где $u_0 = -Q_2^{-1} C\lambda(T)$; а функция $\lambda(t)$ находится из решения системы уравнений

$$\frac{dz}{dt} = -A^+ z - q(t)$$

$$z(T) = q_2 - C^* u_0$$

$$\frac{d\lambda(t)}{dt} = A\lambda + l^* \tilde{Q}_1 z$$

$$\lambda(t_0) = Q_0^{-1} z(t_0).$$

В том случае когда информация о начальном состоянии отсутствует, т.е. известно лишь, что $f \in D_1$, где

$$D_1 = \{f : \int_{t_0}^{\bar{T}} (Q_1(t) f_1(t), f_1(t))_- \, dt + \int_{t_0}^{\bar{T}} (Q_2(t) f_2(t), f_2(t)) \, dt \leqq 1\}$$

функцию $u_0(t)$, можно искать из условия

$$\inf_{u(.) \in U} \sup_{f \in D_1} (g(x) - \hat{g}(x))^2$$

U — множество функций $u(t)$ переводящих систему, описываемую уравнением,

$$\frac{dz}{dt} = -A^+ z - q(t) - C^*(t) \Lambda u(t),$$

$$z(T) = q_2$$

из состояния $z(T) = q_2$ в состояние $z(t_0) = 0$. Тогда, например, теорема 1 может быть сформулирована следующим образом.

Теорема 1′.

Предположим, что множество U не пусто. Тогда минимаксная оценка имеет вид

$$\hat{g}_0(x) = -\int_{t_0}^{\bar{T}} (u_0(t), y(t)) \, dt,$$

$$u_0(t) = -Q_2^{-1} \; (t) \, C(t) \, \lambda(t)$$

а функция $\lambda(t)$ определяется из решения системы уравнений

$$\frac{dz}{dt} = A^{+} z - q(t) - C^{*}(t) \Lambda u_0(t),$$

$$z(T) = q_2; \qquad z(t_0) = 0$$

$$\frac{d\lambda(t)}{dt} = A\lambda + l^{*}\tilde{Q}_1(t) z.$$

Литература

[1] Ю. М. Березанский: *Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов*, Наукова думка, К., 1965

[2] Ж. Л. Лионс: *Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными*, Мир, М., 1972

А. Г. Наконечный
Факультет кибернетики, Университет Т. Шевченка
Киев 252022, Владимирская 64
СССР