Galina Ch. Sarafova; Drumi Dimitrov Bajnov

О применении метода двухсторонних приближений к отысканию периодических решений интегро-дифференциального уравнения типа Вольтерра

Archivum Mathematicum, Vol. 14 (1978), No. 4, 183--190

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/107008`

ARCH. MATH. 4, SCRIPTA FAC. SCI. NAT. UJEP BRUNENSIS
XIV: 183—190, 1978

О ПРИМЕНЕНИИ МЕТОДА ДВУХСТОРОННИХ ПРИБЛИЖЕНИЙ К ОТЫСКАНИЮ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ТИПА ВОЛЬТЕРРА

Г. Х. САРАФОВА, Д. Д. БАЙНОВ

(Поступило в редакцию 24го июня 1977 г.)

Настоящая работа посвящена обоснованию численно–аналитического метода А. М. Самойленко [1] — [5] для одного класса интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра.

Рассмотрим уравнение

$$\dot{x}(t) = \int_0^t \varphi(t, s, x(s), x(s))\, \mathrm{d}s, \tag{1}$$

где φ — скалярная функция скалярных аргументов.

Предположим что выполнены следующие условия (A):

A1. Функция $\varphi(t, s, x, y)$ — определена при $t, s \in (-\infty, +\infty)$, $x, y \in [a, b]$ и непрерывна по своим аргументам.

A2. Функция $\varphi(t, s, x, y)$ — периодическая по t, s с периодом T.

A3. Функция $\varphi(t, s, x, y)$ — неубывающая по x и невозрастающая по y, т.е.,

$$\varphi(t, s, x, y) \leqq \varphi(t, s, u, v), \qquad x \leqq u, \qquad y \geqq v, \qquad x, y, u, v \in [a, b].$$

A4. При $x \geqq y$, $x, y \in [a, b]$ выполнено соотношение

$$\varphi(t, s, x, y) - \varphi(t, s, y, x) \leqq L(x - y), \qquad L = \mathrm{const} > 0.$$

Нас будет интересовать вопрос о существовании и отыскании периодических периода T решений уравнения (1).

Пусть $x(t)$ удовлетворяет уравнению (1). Тогда

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} \equiv \int_0^t \varphi(t, s, x(s), x(s))\, \mathrm{d}s.$$

Заменяя в этом тождестве t на $t + T$, получим

$$\frac{dx(t+T)}{dt} = \int_0^{t+T} \varphi(t, s, x(s), x(s))\, ds = \int_{-T}^{t} \varphi(t, s, x(s+T), x(s+T))\, ds =$$

$$= \int_{-T}^{0} \varphi(t, s, x(s+T), x(s+T))\, ds + \int_0^t \varphi(t, s, x(s+T), x(s+T))\, ds =$$

$$= \int_0^t \varphi(t, s, x(s+T), x(s+T))\, ds + \int_0^T \varphi(t, s, x(s), x(s))\, ds.$$

Отсюда следует, что вместе с $x(t)$ функция $x(t+T)$ является решением уравнения (1) тогда и только тогда, когда

$$\int_0^T \varphi(t, s, x(s), x(s))\, ds = 0.$$

Обозначим через $R_{[0,T]}$ множество всех непрерывных функций $x(t)$, $t \in [0, T]$, таких, что

(2) $$x(0) = x(T) = x_0, \qquad a \leqq x(t) \leqq b$$

Предположим, что выполнены следующие условия (Б):

Б1. Для $t, s \in (-\infty, +\infty)$, $x, y \in [a, b]$

$$m \leqq \varphi(t, s, x, y) \leqq M, \qquad m, M = \mathrm{const}.$$

Б2. $$a + \frac{T^2}{12}(M - m) \leqq x_0 \leqq b - \frac{T^2}{12}(M - m)$$

Б3. $$\frac{T^2}{6}(M - m) \leqq b - a$$

Б4. $$\frac{T^2 L}{9} < 1$$

Определим две последовательностей функций, по рекуррентным формулам

$$u_{n+1}(t) = x_0 + \left(1 - \frac{t}{T}\right) \int_0^t \left\{\left(1 - \frac{\tau}{T}\right) \int_0^\tau \varphi(\tau, s, u_n(s), v_n(s))\, ds - \right.$$
$$\left. - \frac{\tau}{T} \int_\tau^T \varphi(\tau, s, v_n(s), u_n(s))\, ds \right\} d\tau -$$
$$- \frac{t}{T} \int_t^T \left\{\left(1 - \frac{\tau}{T}\right) \int_0^\tau \varphi(\tau, s, v_n(s), u_n(s))\, ds - \frac{\tau}{T} \int_\tau^T \varphi(\tau, s, u_n(s), v_n(s))\, ds \right\} d\tau,$$

(3) $$v_{n+1}(t) = x_0 + \left(1 - \frac{t}{T}\right) \int_0^t \left\{\left(1 - \frac{\tau}{T}\right) \int_0^\tau \varphi(\tau, s, v_n(s), u_n(s))\, ds - \right.$$
$$\left. - \frac{\tau}{T} \int_\tau^T \varphi(\tau, s, u_n(s), v_n(s))\, ds \right\} d\tau -$$
$$- \frac{\tau}{T} \int_t^T \left\{\left(1 - \frac{\tau}{T}\right) \int_0^\tau \varphi(\tau, s, u_n(s), v_n(s))\, ds - \frac{\tau}{T} \int_\tau^T \varphi(\tau, s, v_n(s), u_n(s))\, ds \right\} d\tau,$$

взявь в качестве $u_0(t)$ и $v_0(t)$ соответственно

$$u_0(t) = x_0 - \frac{T}{3}t\left(1 - \frac{t}{T}\right)(M - m), \tag{4}$$
$$v_0(t) = x_0 + \frac{T}{3}t\left(1 - \frac{t}{T}\right)(M - m).$$

Покажем, что $u_0(t)$, $v_0(t) \in R_{[0,T]}$. Легко проверить, что

$$u_0(t) \leqq v_0(t). \tag{5}$$

Используя условие Б2 получаем, что $a \leqq u_0(t) \leqq v_0(t) \leqq b$. Очевидно, что $u_0(t)$, $v_0(t)$ непрерывны при $t \in [0, T]$ и $u_0(0) = u_0(T) = x_0$, $v_0(0) = v_0(T) = x_0$. Следовательно, $u_0(t)$, $v_0(t) \in R_{[0,T]}$.

Покажем, что при $n = 0, 1, 2, \dots$ $u_n(t)$, $v_n(t) \in R_{[0,T]}$ и имеют место соотношения

$$u_0(t) \leqq u_1(t) \leqq \dots \leqq u_n(t) \leqq \dots \leqq v_n(t) \leqq \dots \leqq v_1(t) \leqq v_0(t).$$

Покажем, что при $n = 0, 1, 2, \dots$ $u_n(t) \leqq v_n(t)$.

При $n = 1$ непосредственной проверкой, используя условие А3 и (5) получаем

$$\begin{aligned} u_1(t) = x_0 &+ \left(1 - \frac{t}{T}\right)\int_0^t \left\{\left(1 - \frac{\tau}{T}\right)\int_0^\tau \varphi(\tau, s, u_0, v_0)\,\mathrm{d}s - \frac{\tau}{T}\int_\tau^T \varphi(\tau, s, v_0, u_0)\,\mathrm{d}s\right\}\mathrm{d}\tau - \\ &- \frac{t}{T}\int_t^T \left\{\left(1 - \frac{\tau}{T}\right)\int_0^\tau \varphi(\tau, s, v_0, u_0)\,\mathrm{d}s - \frac{\tau}{T}\int_\tau^T \varphi(\tau, s, u_0, v_0)\,\mathrm{d}s\right\}\mathrm{d}\tau \leqq \\ \leqq x_0 &+ \left(1 - \frac{t}{T}\right)\int_0^t \left\{\left(1 - \frac{\tau}{T}\right)\int_0^\tau \varphi(\tau, s, v_0, u_0)\,\mathrm{d}s - \frac{\tau}{T}\int_\tau^T \varphi(\tau, s, u_0, v_0)\,\mathrm{d}s\right\}\mathrm{d}\tau - \\ &- \frac{t}{T}\int_t^T \left\{\left(1 - \frac{\tau}{T}\right)\int_0^\tau \varphi(\tau, s, u_0, v_0)\,\mathrm{d}s - \frac{\tau}{T}\int_\tau^T \varphi(\tau, s, v_0, u_0)\,\mathrm{d}s\right\}\mathrm{d}\tau = v_1(t). \end{aligned}$$

Если допустим справедливость неравенства $u_n(t) \leqq v_n(t)$, то методом математической индукции легко доказывается, что $u_{n+1}(t) \leqq v_{n+1}(t)$, откуда и следует, что при $n = 0, 1, 2, \dots$

$$u_n(t) \leqq v_n(t). \tag{6}$$

Методом математической индукции легко доказывается, что при $n = 0, 1, 2, \dots$ имеют место неравенства

$$u_{n+1}(t) \geqq u_n(t), \tag{7}$$
$$v_{n+1}(t) \leqq v_n(t). \tag{8}$$

Из (6), (7) и (8) следует справедливость неравенств

$$u_0(t) \leqq u_1(t) \leqq \dots \leqq u_n(t) \leqq \dots \leqq v_n(t) \leqq \dots \leqq v_1(t) \leqq v_0(t), \tag{9}$$

откуда следует, что интервалы $[u_n(t), v_n(t)] \subset [a, b]$ для всех $u = 0, 1, 2, \dots$. Кроме того из (3), (4) следует, что

$$u_n(0) = u_n(T) = x_0\,; \qquad v_n(0) = v_n(T) = x_0\,.$$

Итак, мы доказали, что $u_n(t),\ v_n(t) \in R_{[0,T]}$.

Введем оператор F по формуле

$$\begin{aligned}(10)\qquad Fx = x_0 &+ \left(1 - \frac{t}{T}\right)\int_0^t \left\{\left(1 - \frac{\tau}{T}\right)\int_0^\tau \varphi(\tau, s, x(s), x(s))\,\mathrm{d}s - \right.\\ &\left. - \frac{\tau}{T}\int_\tau^T \varphi(\tau, s, x(s), x(s))\,\mathrm{d}s\right\}\mathrm{d}\tau - \frac{t}{T}\int_t^T \left\{\left(1 - \frac{\tau}{T}\right)\int_0^\tau \varphi(\tau, s, x(s), x(s))\,\mathrm{d}s - \right.\\ &\left. - \frac{\tau}{T}\int_\tau^T \varphi(\tau, s, x(s), x(s))\,\mathrm{d}s\right\}\mathrm{d}\tau.\end{aligned}$$

Введем обозначение

$$\overline{f(t)} = \frac{1}{T}\int_0^T f(\tau)\,\mathrm{d}\tau.$$

Тогда (10) можно записать в виде

$$\begin{aligned}Fx = x_0 &+ \int_0^t \Big\{ \int_0^\tau [\varphi(\tau, s, x(s), x(s)) - \overline{\varphi(\tau, s, x(s), x(s))}]\,\mathrm{d}s - \\ &- \overline{\int_0^\tau [\varphi(\tau, s, x(s), x(s)) - \overline{\varphi(\tau, s, x(s), x(s))}]\,\mathrm{d}s}\Big\}\,\mathrm{d}\tau.\end{aligned}$$

Покажем, что этот оператор преобразует интервалы $[u_n(t),\ v_n(t)]$, $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ в себя. Пусть $z \in [u_n, v_n]$, z — произвольно.

Тогда

$$\begin{aligned}u_{n+1}(t) = x_0 &+ \left(1 - \frac{t}{T}\right)\int_0^t \left\{\left(1 - \frac{\tau}{T}\right)\int_0^\tau \varphi(\tau, s, u_n(s), v_n(s))\,\mathrm{d}s - \right.\\ &\left. - \frac{\tau}{T}\int_\tau^T \varphi(\tau, s, v_n(s), u_n(s))\,\mathrm{d}s\right\}\mathrm{d}\tau - \frac{t}{T}\int_t^T \left\{\left(1 - \frac{\tau}{T}\right)\int_0^\tau \varphi(\tau, s, v_n(s), u_n(s))\,\mathrm{d}s - \right.\\ &\left. - \frac{\tau}{T}\int_\tau^T \varphi(\tau, s, u_n(s), v_n(s))\,\mathrm{d}s\right\}\mathrm{d}\tau \leqq \\ \leqq x_0 &+ \left(1 - \frac{t}{T}\right)\int_0^t \left\{\left(1 - \frac{\tau}{T}\right)\int_0^\tau \varphi(\tau, s, z(s), z(s))\,\mathrm{d}s - \frac{\tau}{T}\int_\tau^T \varphi(\tau, s, z(s), z(s))\,\mathrm{d}s\right\}\mathrm{d}\tau - \\ &- \frac{t}{T}\int_t^T \left\{\left(1 - \frac{\tau}{T}\right)\int_0^\tau \varphi(\tau, s, z(s), z(s))\,\mathrm{d}s - \frac{\tau}{T}\int_\tau^T \varphi(\tau, s, z(s), z(s))\,\mathrm{d}s\right\}\mathrm{d}\tau = \\ = Fz \leqq x_0 &+ \left(1 - \frac{t}{T}\right)\int_0^t \left\{\left(1 - \frac{\tau}{T}\right)\int_0^\tau \varphi(\tau, s, v_n(s), u_n(s))\,\mathrm{d}s - \right.\\ &\left. - \frac{\tau}{T}\int_\tau^T \varphi(\tau, s, u_n(s), v_n(s))\,\mathrm{d}s\right\}\mathrm{d}\tau - \\ &- \frac{t}{T}\int_t^T \left\{\left(1 - \frac{\tau}{T}\right)\int_0^\tau \varphi(\tau, s, u_n(s), v_n(s))\,\mathrm{d}s - \frac{\tau}{T}\int_\tau^T \varphi(\tau, s, v_n(s), u_n(s))\mathrm{d}s\right\}\mathrm{d}\tau = v_{n+1}(t).\end{aligned}$$

Это и означает, что оператор F преобразует $[u_n, v_n]$ в себя. Согласно принципа Шаудера о неподвижной точке существует неподвижная точка x^* оператора F, которая является решением уравнения

$$x(t) = x_0 + \left(1 - \frac{t}{T}\right)\int_0^t \left\{\left(1 - \frac{\tau}{T}\right)\int_0^\tau \varphi(\tau, s, x(s), x(s))\,\mathrm{d}s - \frac{\tau}{T}\int_\tau^T \varphi(\tau, s, x(s), x(s))\,\mathrm{d}s\right\}\mathrm{d}\tau - \frac{t}{T}\int_t^T \left\{\left(1 - \frac{\tau}{T}\right)\int_0^\tau \varphi(\tau, s, x(s), x(s))\,\mathrm{d}s - \frac{\tau}{T}\int_\tau^T \varphi(\tau, s, x(s), x(s))\,\mathrm{d}s\right\}\mathrm{d}\tau \tag{11}$$

и такая, что

$$u_n(t) \leqq x^*(t) \leqq v_n(t). \tag{12}$$

Заметим также, что любое решение $x(t) \in [a, b]$ уравнения (11) удовлетворяет условию $x(0) = x(T) = x_0$ и неравенству (12).

Далее, из соотношений (9) видно, что последовательность $\{u_n(t)\}$ монотонно неубывающая и ограничена сверху, а последовательность $\{v_n(t)\}$ — монотонно невозрастающая и ограничена снизу. Следовательно существуют предельные функции этих последовательностей

$$\bar{u}(t) = \lim_{n\to\infty} u_n(t); \qquad \bar{v}(t) = \lim_{n\to\infty} v_n(t),$$

причем выполняется неравенство

$$u_n(t) \leqq \bar{u}(t) \leqq \bar{v}(t) \leqq v_n(t). \tag{13}$$

Покажем, что предельные функции $\bar{u}(t)$, $\bar{v}(t)$ непрерывны на отрезке $[0, T]$. Для этого покажем, что $u_n(t) - v_n(t) \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} 0$.

Имеем

$$v_n(t) - u_n(t) = \left(1 - \frac{t}{T}\right)\int_0^t \left\{\left(1 - \frac{\tau}{T}\right)\int_0^\tau [\varphi(\tau, s, v_{n-1}(s), u_{n-1}(s)) - \varphi(\tau, s, u_{n-1}(s), v_{n-1}(s))]\,\mathrm{d}s + \frac{\tau}{T}\int_\tau^T [\varphi(\tau, s, v_{n-1}(s), u_{n-1}(s)) - \varphi(\tau, s, u_{n-1}(s), v_{n-1}(s))]\,\mathrm{d}s\right\}\mathrm{d}\tau + \frac{t}{T}\int_t^T \left\{\left(1 - \frac{\tau}{T}\right)\int_0^\tau [\varphi(\tau, s, v_{n-1}(s), u_{n-1}(s)) - \varphi(\tau, s, u_{n-1}(s), v_{n-1}(s))]\,\mathrm{d}s + \frac{\tau}{T}\int_\tau^T [\varphi(\tau, s, v_{n-1}(s), u_{n-1}(s)) - \varphi(\tau, s, u_{n-1}(s), v_{n-1}(s))]\,\mathrm{d}s\right\}\mathrm{d}\tau.$$

В силу условия A4)

$$v_n(t) - u_n(t) \leqq L\left(1 - \frac{t}{T}\right)\int_0^t \left\{\left(1 - \frac{\tau}{T}\right)\int_0^\tau [v_{n-1}(s) - u_{n-1}(s)]\,ds +\right.$$
$$\left. + \frac{\tau}{T}\int_\tau^T [v_{n-1}(s) - u_{n-1}(s)]\,ds\right\} d\tau + \frac{Lt}{T}\int_t^T \left\{\left(1 - \frac{\tau}{T}\right)\int_0^\tau [v_{n-1}(s) - u_{n-1}(s)]\,ds +\right.$$
$$\left. + \frac{\tau}{T}\int_\tau^T [v_{n-1}(s) - u_{n-1}(s)]\,ds\right\} d\tau.$$

Из (4) получаем

(15) $$v_0 - u_0 = \frac{2T}{3}t\left(1 - \frac{t}{T}\right)(M - m) = \frac{T}{3}\alpha_1(t)(M - m),$$

где

$$\alpha_1(t) = 2t\left(1 - \frac{t}{T}\right) \leqq \frac{T}{2}.$$

Интегрируя (14) и используя (15) получаем

$$v_n(t) - u_n(t) \leqq \frac{T}{3}\left(\frac{T^2L}{9}\right)^{n+1}(M - m)\,\alpha_1(t),$$

откуда в силу условия B4 получаем, что $v_n(t) - u_n(t) \rightrightarrows 0$ при $n \to \infty$ для $t \in [0, T]$.

Из неравенства (13) получаем

$$\bar{u}(t) - u_n(t) \leqq v_n(t) - u_n(t),$$

откуда следует, что $\{u_n(t)\} \rightrightarrows \bar{u}(t)$, $u \to \infty$; $\{v_n(t)\} \rightrightarrows \bar{v}(t)$, $u \to \infty$. Следовательно, $\bar{u}(t)$ и $\bar{v}(t)$ — непрерывные функции на интервале $[0, T]$.

Далее, переходя к пределу в (3) получаем, что $\bar{u}(t)$, $\bar{v}(t)$ удовлетворяют системе

$$\bar{u}(t) = x_0 + \left(1 - \frac{t}{T}\right)\int_0^t \left\{\left(1 - \frac{\tau}{T}\right)\int_0^\tau \varphi(\tau, s, \bar{u}(s), \bar{v}(s))\,ds -\right.$$
$$\left. - \frac{\tau}{T}\int_\tau^T \varphi(\tau, s, \bar{v}(s), \bar{u}(s))\,ds\right\} d\tau - \frac{t}{T}\int_t^T \left\{\left(1 - \frac{\tau}{T}\right)\int_0^\tau \varphi(\tau, s, \bar{v}(s), \bar{u}(s))\,ds -\right.$$
$$\left. - \frac{\tau}{T}\int_\tau^T \varphi(\tau, s, \bar{u}(s), \bar{v}(s))\,ds\right\} d\tau,$$

$$\bar{v}(t) = x_0 + \left(1 - \frac{t}{T}\right)\int_0^t \left\{\left(1 - \frac{\tau}{T}\right)\int_0^\tau \varphi(\tau, s, \bar{v}(s), \bar{u}(s))\,ds -\right.$$
$$\left. - \frac{\tau}{T}\int_\tau^T \varphi(\tau, s, \bar{u}(s), \bar{v}(s))\,ds\right\} d\tau - \frac{t}{T}\int_t^T \left\{\left(1 - \frac{\tau}{T}\right)\int_0^\tau \varphi(\tau, s, \bar{u}(s), \bar{v}(s))\,ds -\right.$$
$$\left. - \frac{\tau}{T}\int_t^T \varphi(\tau, s, \bar{v}(s), \bar{u}(s))\,ds\right\} d\tau.$$

Поскольку последовательности $\{u_n(t)\}$ и $\{v_n(t)\}$ сходятся и $v_n(t) - u_n(t) \rightrightarrows 0$, $n \to \infty$, то они будут иметь одинаковые пределы, т.е., $\bar{u}(t) = \bar{v}(t)$ и этот общий предел будет решением уравнения (11).

Таким образом доказана следующая

ТЕОРЕМА 1. *При выполнении условий* (А) *и* (Б) *уравнение* (11) *имеет решение* $x^*(t) \in R_{[0,T]}$.

Рассмотрим вопрос о существования периодических решений системы (1). *Введем обозначения*

$$\Delta(x_0, x) = \frac{1}{T}\int_0^T dt \int_0^t \varphi(t, s, x(s), x(s))\, ds,$$
$$\Phi(x_0, x) = \frac{1}{T}\int_0^T \varphi(t, s, x(s), x(s))\, ds.$$

Если $x^*(t)$ – *решение уравнения* (11) *и* $\Delta(x_0, x^*) = 0$, $\Phi(x_0, x^*) = 0$, *то уравнение* (1) *имеет периодическое решение, являющееся периодическим продолжением решения* $x^*(t)$. *Наоборот, если уравнение* (1) *имеет решение, являющееся периодическим продолжением решения* $x^*(t)$ *уравнения* (11), *то* $\Delta(x_0, x^*) = 0$ *при* $\Phi(x_0, x^*) = 0$. *Таким образом, существование периодических решений уравнения* (1) *сводится к вопросу о существовании нулей функции* $\Delta(x_0, x^*)$ *как функция от* x_0 *и выполнению соотношения* $\Phi(x, x^*) = 0$, *где* $x^*(t)$ – *решение уравнения* (11). *Но поскольку* $\Delta(x_0, x^*)$ и $\Phi(x_0, x^*)$ *неизвестны, то естественно рассмотреть функций* $\underline{\Delta}_n(x_0)$, $\bar{\Delta}_n(x_0)$, $\underline{\Phi}_n(x_0)$ *и* $\bar{\Phi}_n(x_0)$:

$$\underline{\Delta}_n(x_0) = \frac{1}{T}\int_0^T dt \int_0^t \varphi(t, s, u_n(s), v_n(s))\, ds,$$
$$\bar{\Delta}_n(x_0) = \frac{1}{T}\int_0^T dt \int_0^t \varphi(t, s, v_n(s), u_n(s))\, ds,$$
$$\underline{\Phi}_n(x_0) = \frac{1}{T}\int_0^T \varphi(t, s, u_n(s), v_n(s))\, ds,$$
$$\bar{\Phi}_n(x_0) = \frac{1}{T}\int_0^T \varphi(t, s, v_n(s), u_n(s))\, ds.$$

В силу условия А3, соотношений (9) и (12) имеем

$$\underline{\Delta}_0(x_0) \leqq \underline{\Delta}_1(x_0) \leqq \dots \leqq \underline{\Delta}_n(x_0) \leqq \Delta(x_0, x^*) \leqq \bar{\Delta}_n(x_0) \leqq \dots \leqq \bar{\Delta}_0(x_0),$$
$$\underline{\Phi}_0(x_0) \leqq \underline{\Phi}_1(x_0) \leqq \dots \leqq \underline{\Phi}_n(x_0) \leqq \Phi(x_0, x^*) \leqq \bar{\Phi}_n(x_0) \leqq \dots \leqq \bar{\Phi}_0(x_0).$$

Потребуем для всех $u = 0, 1, 2, \dots$ и для всех x_0, удовлетворяющих условию Б2 выполнение соотношения

$$\Phi_n(x_0) = \bar{\Phi}_n(x_0) = 0. \tag{16}$$

По характеру функций $\underline{\Delta}_n(x_0)$ и $\bar{\Delta}_n(x_0)$ будем судить о существовании нулей функции $\Delta(x_0, x^*)$.

Обозначим через $\underline{x}$ и $\bar{x}$ соответственно нули функций $\underline{\Delta}_n(x_0)$ и $\bar{\Delta}_n(x_0)$. Тогда на отрезке с концами в точках $\underline{x}$, $\bar{x}$ существует по крайней мере один нуль функции $\Delta(x_0, x^*)$.

Тем самым доказана следующая

ТЕОРЕМА 2. *Пусть:*

1. *Выполнены условия* (А) *и* (Б).

2. *Каждая из функций* $\underline{\Delta}_n(x_0)$ *и* $\bar{\Delta}_n(x_0)$ *для некоторого* n *итеет нуль.*

3. *Для всех* $n = 0, 1, 2, \ldots$ *и всех* x_0, *удовлетворяющих условию* Б2 *выполнено соотношение* (16).

Тогда уравнение (1) *имеет периодическое решение, являющееся периодическим продолжением решения* $x^*(t)$ *уравнения* (11) *и проходящее через точку* $(0, x_0)$, *где* x_0 *— нуль функции* $\Delta(x_0, x^*)$.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Самойленко А. М.: *Численно — аналитический метод исследования периодических решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений.* 1, Украинский математический журнал, т. 17, № 4, 1965.

[2] Самойленко А. М.: *Численно — аналитический метод исследования периодических решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений.* 11, Украинский математический журнал, т. 18, № 2, 1966.

[3] Самойленко А. М.: Ронто Н. И. *Численно аналитические методы исследования периодических решений.* Изд-во КГУ, Киев, 1976.

[4] Курпель Н. С.: *О двусторонних приближениях к периодическим решениям дифференциальных уравнений.* Труды У международной конференции по нелинейным колебаниям, 1970, Киев, 1.

[5] Вахабов Г.: *Численно — аналитический метод исследования периодических систем интегро — дифференциальных уравнений.* Украинский математический журнал, т. 21, № 5, 1969.

Г. Х. Сарафова

Д. Д. Байнов
София — 4, Оборище 23
Болгария