Nikolai Ivanovich Shkil'

О периодических решениях систем дифференциальных уравнений второго порядка

Archivum Mathematicum, Vol. 23 (1987), No. 1, 53--62

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/107278

ARCHIVUM MATHEMATICUM (BRNO)
Vol. 23, No. 1 (1987), 53–62

О ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА*

Н. И. ШКИЛЬ

(Поступило в редакцию 2. 9. 1985)

1. В работе рассматриваются вопросы о существовании и построении ω-периодических решений системы дифференциальных уравнений вида

$$E^{\frac{2}{r}} \frac{d^2x}{dt^2} = A(t, E)\,x + f(t, E) \exp (i\Theta(t)/E^{\frac{1}{r}}), \tag{1.1}$$

где x, f — n-мерные векторы, A — $n \times n$-матрица, $E > 0$ — малый параметр, Θ — скалярная функция, $i = \sqrt{-1}$, $r \geqq 1$ — целое число. Предполагается, что выполняются условия:

1°. A, f допускают разложения

$$A(t, E) = \sum_{s=0}^{\infty} E^s A_s(t), \qquad f(t, E) = \sum_{s=0}^{\infty} E^s f_s(t). \tag{1.2}$$

2°. Матрицы A_s, векторы $f_s (s = 0, 1, \ldots)$ и функция Θ неограниченно дифференцируемые в интервале $(-\infty; +\infty)$ и периодичны с периодом $\omega > 0$, не зависящим от E;

3°. Корни $\lambda_1(t), \ldots, \lambda_n(t)$ характеристического уравнения

$$\det \| A_0 - \lambda \boldsymbol{E} \| = 0 \tag{1.3}$$

($\boldsymbol{E}$ — единичная матрица) отличны от нуля в интервале $(-\infty; +\infty)$ и вместе с элементарными делителями в этом интервале не меняют кратность.

О результатах исследования систем вида (1.1) автор докладывал на II Национальном конгрессе по прикладной и теоретической механике (г. Варна, 1973 г., [1]), V и IX Международных конференциях по нелинейным колебаниям (г. Киев, 1970, 1981 гг. [2], [3]).

В настоящей работе изучаются новые случаи, не рассмотренные ранее. Так, впервые рассмотрен случай, когда в системе (1.1) при производной в ка-

---

* Предложено на конференции EQUADIFF 6, Брно, 26—30-го августа 1985 г.

честве множителя имеется малый параметр в дробной степени (за исключением $r = 1$ и $r = 2$), помимо простых корней уравнения (1.3), изучен случай, когда среди корней этого уравнения могут быть корни тождественной кратности, получены формальные разложения решений при наличии точек поворота. В этих предположениях найдены условия некритичности относительно ω-однородной системы, а также построены асимптотические в смысле [4] ω-периодические решения системы (1.1) в „резонансном“ и „нерезонансном“ случаях.

2. Случай простых корней уравнения (1.3). Рассмотрим однородную систему

$$E^{\frac{2}{r}} \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = A(t, E)\, x. \tag{2.1}$$

Известно [5], если однородная система с ω-периодическими коэффициентами не имеет ω-периодических решений, кроме решения $x = 0$, то неоднородная система в этом случае имеет единственное ω-периодическое решение. Этот случай называют некритическим. Ниже приведенные теоремы 2, 4 дают достаточные условия некритичности относительно ω системы дифференциальных уравнений (2.1).

Справедливы следующие теоремы.

Теорема 1. *Если выполняются условия* 1°, 2° *и корни уравнения* (1.3) *отличны от нуля и простые в интервале* $(-\infty;\ +\infty)$, *то система* (2.1) *имеет формальный вектор-решение*

$$S(t, h) = U(t, h)\, \psi(t, h), \tag{2.2}$$

где U — $n \times n$-*матрица, а* ψ — n-*мерный вектор, определяемый системой дифференциальных уравнений*

$$h \frac{\mathrm{d}\psi(t, h)}{\mathrm{d}t} = \Lambda(t, h)\, \psi(t, h), \tag{2.3}$$

в которой Λ — *диагональная* $n \times n$-*матрица, допускающая вместе с матрицей* U *формальные разложения*

$$U(t, h) = \sum_{s=0}^{\infty} h^s U_s(t), \qquad \Lambda(t, h) = \sum_{s=0}^{\infty} h^s \Lambda_s(t), \tag{2.4}$$

где

$$h = E^{\frac{1}{r}}. \tag{2.5}$$

Теорема 1 позволяет (это вытекает из метода ее доказательства) при достаточно малых E получить два формальных линейно независимых в интервале $(-\infty;\ +\infty)$ вектор-решения

$$x_1 = \sum_{s=0}^{m} h^s U_s^{(1)}(t)\, y_1, \qquad x_2 = \sum_{s=0}^{m} h^s U_s^{(2)}(t)\, y_2, \qquad m \geqq 1, \tag{2.6}$$

где n-мерные векторы y_1, y_2 определяются системами дифференциальных уравнений

$$h \frac{\mathrm{d}y_k}{\mathrm{d}t} = \sum_{s=0}^{m} h^s \Lambda_s^{(k)}(t)\, y_k + 0(h^{m+1})\, y_1 + 0(h^{m+1})\, y_2, \qquad k = 1, 2. \tag{2.7}$$

При этом матрицы $U_s^{(k)}$, $\Lambda_s^{(k)}$ ([6], [7], $s = 0, 1, \ldots, m$) неограниченно дифференцируемые и ω-периодичны.

Решая системы (2.7) методом последовательных приближений, предполагая при этом, что при $t \in (-\infty;\ +\infty)$

$$\operatorname{Re}\,(\pm\sqrt{\Lambda(t)}) \leqq 0, \tag{2.8}$$

где

$$\Lambda(t) = \operatorname{diag}\,(\lambda_1(t), \ldots, \lambda n(t)), \tag{2.9}$$

доказывается, что

$$y_k = \left(\exp\left(\frac{1}{h} \int_0^t (\sum_{s=0}^{m} h^s \Lambda_s^{(k)}(\tau))\, \mathrm{d}\tau\right) + 0(h^m)\right) y_k^{(0)}, \qquad k = 1, 2, \tag{2.10}$$

где $y_k^{(o)}$ ($k = 1, 2$) – постоянные n-мерные векторы, определяемые начальными условиями.

Из (2.10) вытекает, что матрицы

$$Y_k(\omega, h) = \exp\left(\frac{1}{h} \int_0^{\omega} (\sum_{s=0}^{m} h^s \Lambda_s^{(k)}(\tau))\, \mathrm{d}\tau\right) + 0(h^m), \qquad k = 1, 2 \tag{2.11}$$

являются матрицами монодромии систем (2.7). Отсюда получаем асимптотические формулы для мультипликаторов $\varrho_j^{(k)}$:

$$\varrho_j^{(k)} = \exp\left(\frac{1}{h} (\int_0^{\omega} (\sum_{s=0}^{m} h^s \lambda_{js}^{(k)}(\tau))\, \mathrm{d}\tau)\right) + 0(h^m), \qquad k = 1, 2, \tag{2.12}$$

где $\lambda_j^{(k)}$ – элементы матриц $\Lambda_s^{(k)}$ (s = 0, 1, …, m; $k = 1, 2$).

Приходим к теореме.

Теорема 2. *Если выполняются условия теоремы 1, а также условия* (2.8), *и все числа*

$$\alpha_j^{(k)} = \operatorname{Re}\,(\int_0^{\omega} (\sum_{s=0}^{m} h^s \lambda_{js}^{(k)}(\tau))\, \mathrm{d}\tau), \qquad j = 1, \ldots, n;\ k = 1, 2, \tag{2.13}$$

при достаточно малых h не равны нулю, то система (2.1) *не имеет ω-перио-*

дических решений, кроме решения $x = 0$. *При этом, если все числа* $\alpha_j^{(k)} < 0$, *то все решения системы* (2.1) *при* $t \to \infty$ *стремятся к нулевому решению. Если хотя бы одно число* $\alpha_j^{(k)} > 0$, *то система* (2.1) *имеет неограниченные решения.*

3. Случай кратных корней уравления (1.3). Сделаем предположение, что среди корней уравнения (1.3) имеются корни тождественной кратности. Не умаляя общности, можно предположить, что уравнение (1.3) имеет лишь один корень $\lambda = \lambda_0(t)$ кратности n. В противном случае систему (2.1) методом из [7] можно привести к системе с одним кратным корнем.

Теорема 3. *Пусть для системы* (2.1) *выполняются условия* 1°, 2°, *а также условия:* 1. *уравнение* (1.3) *имеет один ненулевой корень* $\lambda = \lambda_0(t)$ *постоянной кратности* n, *которому в интервале* $(-\infty;\ +\infty)$ *отвечает один элементарный делитель кратности* n; 2. *матрица*

$$D(t) = 2B^{-1}(t)\,B'(t)\,W_0(t) + W_0'(t), \tag{3.1}$$

где

$$W_0(t) = \pm\sqrt{W(t)}, \qquad W(t) = \lambda_0(t)\,E + J, \tag{3.2}$$

$$J = \left\|\begin{matrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & & \dots & 0 \end{matrix}\right\|, \tag{3.3}$$

B^{-1}*-обратная матрица к матрице преобразования подобия* B, B', W_0' — *производные, такова, что ее элемент*

$$d_{n1} \neq 0, \tag{3.4}$$

при любом $t \in (-\infty;\ +\infty)$.

Тогла система (2.1) *имеет формальный вектор-решение*

$$S(t, \mu) = U(t, \mu)\,\psi(t, \mu), \tag{3.5}$$

где U — $n \times n$*-матрица, а* ψ n*-мерный вектор, определяемый системой дифференциальных уравнений*

$$\mu^n \frac{d\psi(t, \mu)}{dt} = (W_0(t) + W(t, \mu))\,\psi(t, \mu), \tag{3.6}$$

в которой W*-диагональная* $n + n$*-матрица, допускающая вместе с матрицей* U *формальные разложения:*

$$U(t, \mu) = \sum_{s=0}^{\infty} \mu^s U_s(t), \qquad W(t, \mu) = \sum_{s=1}^{\infty} \mu^s W_s(t), \tag{3.7}$$

где

$$\mu = E^{\frac{1}{nr}}. \tag{3.8}$$

Теорема 3 позволяет получить в интервале $(-\infty;\ +\infty)$ два формальных линейно независимых вектор-решения системы (2.1) следующего вида

$$x_1 = \sum_{s=0}^{m+n-1} \mu^s U_s^{(1)}(t)\, y_1, \qquad x_2 = \sum_{s=0}^{m+n-1} \mu^s U_s^{(2)}(t)\, y_2, \tag{3.9}$$

где n-мерные векторы y_1 и y_2 определяются системами дифференциальчых уравнений

$$\mu^n \frac{\mathrm{d}y_k}{\mathrm{d}t} = \sum_{s=0}^{m} \mu^s W_s^{(k)}(t)\, y_k + 0(\mu^{m+1})\, y_1 + 0(\mu^{m+2})\, y_2, \qquad k = 1, 2. \tag{3.10}$$

Тогда, применяя к системам (3.10) срезающее преобразование [8]:

$$y_k = E_1(\mu)\, z_k, \tag{3.11}$$

где

$$E_1 = \operatorname{diag}\left(1, \mu^{\frac{m}{n}}, \ldots, \mu^{\frac{(n-1)m}{n}}\right), \tag{3.12}$$

приходим к системам

$$\mu^n \frac{\mathrm{d}z_k}{\mathrm{d}t} = (\lambda_0^{(k)}(t)\, E + \sum_{s=1}^{n} \mu^s W_s^{(k)}(t))\, z_k + 0\left(\mu^{\frac{n+1}{n}}\right) z_1 + 0\left(\mu^{\frac{m+1}{n}}\right) z_2, \qquad k = 1, 2. \tag{3.13}$$

Предположив, что при $t \in (-\infty;\ +\infty)$ и достаточно малых E выполняются условия

$$\operatorname{Re}(\lambda_0^{(k)}(t)\, E + \sum_{s=1}^{n-1} \mu^s W_s^{(k)}(t)) \leqq 0, \qquad k = 1, 2 \tag{3.14}$$

можно доказать, что

$$z_k = \exp\left(\frac{1}{\mu^n} \int_0^t (\lambda_0^{(k)}(\tau)\, E + \sum_{s=1}^{m} \mu^s W_s^{(k)}(\tau))\, \mathrm{d}\tau + 0\left(\mu^{\frac{m+1-2n}{n}}\right)\right) z_k^{(0)}, \qquad k = 1, 2, \tag{3.15}$$

где $z_k^{(0)}$ — постоянные n-мерные векторы, определяемые начальными условиями.

Тогда для мультипликаторов системы (2.1) получаем асимптотические формулы:

$$\varrho_j^{(k)} = \exp\left(\frac{1}{\mu^n} \int_0^\omega (\lambda_0^{(k)}(\tau) + \sum_{s=1}^{m} \mu^s W_{js}^{(k)}(\tau))\, \mathrm{d}\tau + 0\left(\mu^{\frac{m+1-2n}{n}}\right)\right), \quad j = 1, \ldots, n;\ k = 1, 2. \tag{3.16}$$

Пришли к теореме.

Теорема 4. *Если выполняются условия теоремы 3, а также условие* (3.14) *и все числа*

$$\beta_j^{(k)} = \mathrm{Re}\left(\int_0^{\omega} (\lambda_0^{(k)}(\tau) + \sum_{s=1}^{m} \mu^s W_{js}^{(k)}(\tau))\,\mathrm{d}\tau, \qquad j = 1, \ldots, n;\ k = 1, 2 \tag{3.17}$$

при достаточно малых E не равны нулю, то система (2.1) *не имеет* ω*-периодических решений, кроме решения* $x = 0$. *При этом, если все числа* $\beta_j^{(k)} < 0$, *то все решения системы* (2.1) *при* $t \to +\infty$ *стремятся к нулевому решению. Если хотя бы одно число* $\beta_j^{(k)} > 0$, *то система* (2.1) *имеет неограниченные решения.*

4. „Нерезонансный" и „резонансный" случаи. Будем предполагать, что для системы (1.1) могут иметь место один из двух случаев: 1. „нерезонансный" случай, когда функция $-k^2(t)\left(k = \frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}t}\right)$ при любом $t \in (-\infty;\ +\infty)$ не равна корням уравнения (1.3) и „резонансный" – случай, когда функция $-k^2(t)$ в интервале $(-\infty;\ +\infty)$ равна одному из корней уравнения (1.3), например:

$$-k^2(t) = \lambda_1(t), \tag{4.1}$$

и не равна остальным корням этого уравнения.

Тогда в случае некритичности относительно ω системы (2.1) методом из [9] могут быть доказаны теоремы.

Теорема 5. *Если выполняются условия* $1°-3°$, *то система* (1.1) *в „нерезонансном" случае имеет формальное* ω*-периодическое решение*

$$z = \varrho(t, h) \exp\,(i\Theta(t)/h), \tag{4.2}$$

где $\varrho(t, h)$ – *n-мерный вектор, представленный формальным рядом*

$$\varrho(t, h) = \sum_{s=0}^{\infty} h^s \varrho_s(t), \qquad h = E^{\frac{1}{r}}. \tag{4.3}$$

Теорема 6. *Если выполняются условия теоремы 1, а также условие*

$$\mathrm{Re}\left(\frac{i}{2} \int_0^{\omega} \frac{\gamma_{11}(\tau)}{k(\tau)}\,\mathrm{d}\tau\right) \neq 0, \tag{4.4}$$

где γ_{11} *— первый элемент матрицы*

$$\Gamma(t) = rik(t)\,B^{-1}(t)\,B'(t) + ik'(t)\,E, \tag{4.5}$$

то система (1.1) *в „резонансном" случае имеет формальное* ω*-периодическое решение вида* (4.2), *где вектор* $\varrho(t, h)$ *представлен формальным рядом*

$$\varrho(t, h) = h^{-1}\varrho_{-1}(t) + \sum_{s=0}^{\infty} h^s \varrho_s(t). \tag{4.6}$$

Теорема 7. *Если выполняются условия теоремы 3, а также условие: при любом* $t \in (-\infty; +\infty)$

$$\gamma_{n1}(t) \neq 0, \tag{4.7}$$

то система (1.1) *в „резонансном" случае имеет формальное* ω*-периодическое решение вида* (4.2), (4.6).

Методам работ [6], [7] доказывается, что формальные решения, приводимые в теоремах 1, 3, 5–7 обладают асимптотическим свойством в смысле [4].

5. Формальные решения при наличии точек поворота. Существенными условиями теорем 1–7 являются условия 3°. Если эти условия нарушаются (появляются точки поворота [8]), то данные теоремы перестают быть верными. Построение даже формальных решений систем типа (1.1), (2.1) в этих случаях значительно усложняется. Более менее обозримые результаты при наличии точек поворота получены лишь для одного дифференциального уравнения второго порядка [9] и систем двух дифференциальных уравнений первого порядка [8].

Нами указаны более общие достаточные условия, чем условия 3°, при выполнении которых системы дифференциальных уравнений типа (1.1), (2.1) имеют формальные решения. Однако, в отличие от приведенных выше решений, в которых формальные ряды являются чистыми разложениями по некоторым степеням параметра E, при наличии точек поворота коэффициенты формальных рядов в свою очередь зависят от параметра.

Сформулируем полученный результат для системы дифференциальных уравнений первого порядка

$$E^{\frac{1}{r}} \frac{dx}{dt} = A(t, E)\, x, \tag{5.1}$$

где $A(t, E)$, r — те же, что и в системе (1.1).

Теорема 8. *Если выполняются условия* 1°–2° *и условие* 4°*: существует целое число* $k \geqq 0$*, такое, что корни уравнения*

$$\det \| A_0(t) + EA_1(t) + \ldots + E^k A_k(t) - \lambda E \| = 0, \tag{5.2}$$

при любых $t \in (-\infty; +\infty)$ *и* $E \in (0; E_0]$ *простые, то существует формальный вектор-решение системы* (5.1) *вида*

$$S(t, E, h) = U(t, E, h)\, \psi(t, E, h), \tag{5.3}$$

где U — $n \times n$*-матрица а* ψ n*-мерный вектор, определяемый системой дифференциальных уравнений*

$$h\frac{\mathrm{d}\psi(t, E, h)}{\mathrm{d}t} = \Lambda(t, E, h)\,\psi(t, E, h), \tag{5.4}$$

в которой Λ — диагональная $n \times n$-матрица, допускающая вместе с матрицей U. Формальные разложения

$$U(t, E, h) = \sum_{s=0}^{\infty} h^s U_s(t, E),$$

$$\Lambda(t, E, h) = \sum_{s=0}^{\infty} h^s \Lambda_s(t, E), \tag{5.5}$$

$$h = E^{\frac{1}{r}}.$$

Вопрос об асимптотическом поведении при $E \to 0$ формального вектор-решения (5.3), (5.4) здесь не изучается.

Пример. В качестве примера рассмотрим дифференциальное уравнение

$$E\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} + (\omega(t) + Eg(t))\,y = 0, \tag{5.6}$$

где по предположению $\omega(t)$ может в некоторых точках интервала $(-\infty;\ +\infty)$ обращаться в ноль, а $g(t) \neq 0$ при любом $t \in (-\infty;\ +\infty)$.

Тогда уравнение (5.6) можно записать в виде системы (5.1), где

$$A(t, E) = A_0(t) + EA_1(t),$$

$$A_0(t) = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ \omega(t) & 0 \end{Vmatrix}, \qquad A_1(t) = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ g(t) & 0 \end{Vmatrix}, \tag{5.7}$$

$$x = \begin{Vmatrix} y \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \end{Vmatrix}.$$

Корни характеристического уравнения (5.1) в данном случае равны

$$\lambda_1(t) = \sqrt{\omega(t)}, \qquad \lambda_2(t) = -\sqrt{\omega(t)} \tag{5.8}$$

и, следовательно, в точках интервала $(-\infty;\ +\infty)$, в которых $\omega(t) = 0$, условие 3° не выполняется.

Корни уравнения (5.2)

$$\lambda_1(t, E) = \sqrt{\omega(t) + Eg(t)}, \qquad \lambda_2(t, E) = -\sqrt{\omega(t) + Eg(t)} \tag{5.9}$$

при $E > 0$ и любом $t \in (-\infty;\ +\infty)$ различны.

Поэтому для уравнения (5.6) справедлива теорема 8 и, следовательно, оно имеет формальное решение вида (5.3), (5.4). Так, в первом приближении это решение имеет вид:

$$x(t, E, E) = (U_0(t, E) + EU_1(t,E)) \exp\left(\frac{1}{E}\int_0^t (\Lambda_0(t, E) + E\Lambda_1(t, E))\,\mathrm{d}t\right) C, \tag{5.10}$$

$$U_0 = \left\|\begin{matrix} \dfrac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} & 1 \\ \dfrac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} & \lambda_2 \end{matrix}\right\|,$$

$$U_1 = \left\|\begin{matrix} \dfrac{-\lambda_1'}{(\lambda_2 - \lambda_1)^3} & \dfrac{-\lambda_2'}{(\lambda_2 - \lambda_1)^2} \\ \dfrac{-\lambda_2\lambda_1'}{(\lambda_2 - \lambda_1)^3} & \dfrac{-\lambda_1\lambda_2'}{(\lambda_2 - \lambda_1)^2} \end{matrix}\right\|, \tag{5.11}$$

$$\Lambda_0 = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2),$$

$$\Lambda_1 = \operatorname{diag}\left(\frac{\lambda_1'\lambda_2 + \lambda_1'\lambda_1 - 2\lambda_2'\lambda_1}{(\lambda_2 - \lambda_1)^2}, \frac{\lambda_2'}{\lambda_2 - \lambda_1}\right),$$

λ_1, λ_2 — функции, определяемые формулами (5.9), λ_1', λ_2' — производные по t этих функций, C — постоянный двумерный вектор.

6. Системы дифференциальных уравнений с малой нелинейностью. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$E^{\frac{2}{r}} \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = A(t, E)\,x + \eta f(t, x, E, \eta), \tag{6.1}$$

где A — матрица, что и в системе (1.1), а f — вектор-функция, периодическая по t с периодом ω, E, η — малые действительные параметры. Тогда применяя метод сжатых отображений [5], можно доказать следующую теорему.

Теорема 9. *Пусть для системы* (6.1) *выполняются условия:* 1. *система* (2.1) *некритическая относительно* ω; 2. *вектор-функция* f *периодична по* t *с периодом* ω, *непрерывна по всем аргументам,* $f(t, 0, E, \eta) = 0$ *и в области* $0 \leqq |x| \leqq R$, $0 < E \leqq E_0$, $0 < \eta \leqq \eta_0$ *удовлетворяет условию Липшица*

$$|f(t, x_1, E, \eta) - f(t, x_2, E, \eta)| \leqq N|x_1 - x_2|. \tag{6.2}$$

Тогда система (6.1) *при достаточно малых* E *и* η *имеет единственное нетривиальное* ω*-периодическое решение.*

ЛИТЕРАТУРА

[1] Н. И. Шкиль, *О периодических решениях систем дифференциальных уравнений, содержащих параметр.* — Теорет. и прикл. механика, София, 1975, т. I, с. 304—310.

[2] Н. И. Шкиль, *О периодических решениях систем дифференциальных уравнений с малым*

параметром при производной. — В кн.: Тр. V Международной конференции по нелинейным колебаниям. — К.: Наукова думка, 1970, *с.* 623—629.

[3] Н. И. Шкиль, *О периодических решениях систем дифференциальных уравнений второго порядка с малым параметром при производной.* — В кн.: Тр. IX Международной конференции по нелинейным колебаниям. — Киев: Наук. думка, 1984, т. I, с. 415—420.

[4] Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский, *Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний.* — М.: Физматгиз, 1955, 447 с.

[5] Дж. Хейл, *Колебания в нелинейных системах.* — М.: Мир, 1966, 230 с.

[6] Н. И. Шкиль, *О некоторых асимптотических методах в теории линейных дифференциальных уравнений с медленно меняющимися козффициентами*: Автореф. дис. д-ра физ.-мат. наук. — Киев, 1968, 23 с.

[7] С. Ф. Фещенко, Н. И. Шкиль, Л. Д. Николенко, *Асимптотические методы в теории линейных дифференциальных уравнений.* — Киев: Наук. думка, 1966, 251 с.

[8] В. Вазов, *Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений.* — М.: Мир, 1968, 464 с.

[9] Л. Чезари, *Асимптотическое поведение и устойчивость решений обыкновенных дифференциальных уравнений.* — М.: Мир, 1964, 477 с.

Н. И. Шкиль
Пединститут им. М. Горького
Киев
УССР