Archivum Mathematicum

Josef Mikeš

# $F$-Планарные преобразования пространств аффинной связности

*Archivum Mathematicum*, Vol. 27 (1991), No. 1-2, 53--56

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/107403`

# $F$-ПЛАНАРНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПРОСТРАНСТВ АФФИННОЙ СВЯЗНОСТИ

Й. МИКЕШ

(Поступило в редакцию 18-ого февраля 1987 г.)

Резюме. В статье рассматриваются $F$-планарные преобразования пространств аффинной связности, которые являются обобщением проективных и голоморфно-проективных преобразований. Получаются основные уравнения $F$-планарных преобразований.

Ключевые слова. $F$-планарные преобразование, пространство аффинной связности.

УДК. 53B05.

В настоящей статье рассматриваются некоторые обобщения проективных и голоморфно-проективных преобразований пространств аффинной связности.

Исследования проводятся в тензорной форме, локально, в классе достаточно гладких вещественных функций.

**1.** Рассмотрим пространство аффинной связности без кручения $A_n$, отнесенное к системе координат $x^1, x^2, \ldots, x^n$, в котором определена аффинорная структура $F_i^h(x) \neq a\delta_i^h + a_i b^h$, где $\delta_i^h$ — символы Кронекера, $a$ — некоторый инвариант.

Кривая $L$ заданная уравнениями $x^h = x^h(t)$, $(h = 1, 2, \ldots, n)$, где $t$ — параметр, называется [1] $F$-планарной тогда и только тогда, когда выполняются условия

$$\lambda^h,_\alpha \lambda^\alpha = \varrho_1 \lambda^h + \varrho_2 F_\alpha^h \lambda^\alpha, \tag{1}$$

где $\lambda^h \equiv dx^h/dt$ $(\neq 0)$, $\varrho_1, \varrho_2$ — некоторые произвольные функции параметра $t$, запятой обозначается ковариантная производная по связности $A_n$.

Отметим, что класс $F$-планарных кривых очень широк, в частности, он включает в себя геодезические линии (если $\varrho_2 \equiv 0$), аналитически планарные кривые [2], [3], квазигеодезические кривые [4], планарные кривые [5].

Вопрос о $F$-планарном отображении пространств аффинной связности рассмотрен в работе [1].

Преобразование $\bar{x}^h = \bar{x}^h(x)$ пространства аффинной связности $A_n$, при котором все $F$-планарные кривые $A_n$ переходят в $F$-планарные кривые, назовем $F$-планарным преобразованием.

Это понятие обобщает движения, проективные и голоморфно-проективные преобразования аффинносвязных и римановых пространств.

Имеет место следующая

**Теорема 1.** *Инфинитезимальный оператор* $X \equiv \xi^a(x)\partial_a$ $(\partial_a \equiv \partial/\partial x^a)$ *определяет однопараметрическую группу Ли F-планарных преобразований пространства аффинной связности* $A_n$ *тогда и только тогда, когда выполняются условия*

$$\mathscr{L}_\xi \Gamma^h_{ij} = \psi_{(i}\delta^h_{j)} + \varphi_{(i}F^h_{j)}(a), \qquad \mathscr{L}_\xi F^h_i = a\delta^h_i + bF^h_i(\delta), \tag{2}$$

*где* $\psi_i$, $\varphi_i$ *— некоторые ковекторы,* $a$, $b$ *— некоторые инварианты,* $\mathscr{L}_\xi$ *— производная Ли в направлении вектора* $\xi^h$, $(i, j)$ *— обозначает симметрирование по указанным индексам,* $\Gamma^h_{ij}(x)$ *— объект связности* $A_n$.

Доказательство легко провести в специальной системе координат $x$, в которой фундаментальный вектор $\xi^h(x)$ порождающий однопараметрическую группу Ли, имеет представление $\xi^h = \delta^h_1$. В этой системе координат однопараметрическая группа Ли преобразований определяется формулами $\bar{x}^h = x^h + \delta^h_1\tau$, где $\tau$ — канонический параметр.

Если эта группа является $F$-планарной, используя методы, изложенные в [1], при $n > 3$, нетрудно получить, что

$$\begin{gathered} \Gamma^h_{ij}(\bar{x}) = \Gamma^h_{ij}(x) + \tilde{\psi}_{(i}\delta^h_{j)} + \tilde{\varphi}_{(i}F^h_{j)}(\bar{x}), \\ F^h_i(\bar{x}) = \tilde{a}\delta^h_i + \tilde{b}F^h_i(x), \end{gathered} \tag{3}$$

$\tilde{\psi}_i$, $\tilde{\varphi}_i$, $\tilde{a}$, $\tilde{b}$ — некоторые объекты, зависящие от $x$ и $\tau$.

Учитывая, что в выбранной нами системе координат $\mathscr{L}_\xi\Gamma^h_{ij} = \partial_1\Gamma^h_{ij}$ и $\mathscr{L}_\xi F^h_i = \partial_1 F^h_i$, из (3) легко установить справедливость формул (2).

С другой стороны, формулы (2) действительно порождают группу $F$-планарных преобразований.

Теорема доказана.

Пусть $\xi^h_1, \xi^h_2, \ldots, \xi^h_r$ — линейно независимые решения уравнений (2) в $A_n$, причем любое решение $\xi^h(x)$ представляется в виде

$$\xi^h = \sum_{\sigma=1}^{r} C^\sigma \xi^h_\sigma(x), \qquad \text{где} \qquad C^\sigma - \text{const}\,(\sigma = 1, 2, \ldots, r).$$

Так как коммутатор любых двух векторов $\xi^h_\sigma$ и $\xi^h_\varrho$ $(\sigma, \varrho = 1, 2, \ldots, r)$, удовлетворяет условиям (2), в пространстве аффинной связности $A_n$ система векторов $\xi^h_1, \xi^h_2, \ldots, \xi^h_r$ порождает полную группу Ли $F$-планарных преобразований порядка $r$.

Отметим, в частности, что если в (2) вектор $\varphi_i \equiv 0$, то преобразование является проективным.

Если структура $F$ удовлетворяет условиям $F^h_a F^a_i = \pm\delta^h_i$, формулы (2$\delta$) упрощаются: $\mathscr{L}_\xi F^h_i = 0$. Последнее априори предполагалось для аналитически голоморфно-проективных преобразований келеровых пространств.

Изучая основные уравнения (2) можно убедиться в том, что все $A_n$, допускающие $F$-планарные преобразования, имеют по необходимости и достаточности объект связности $\Gamma^h_{ij}(x)$ и структуру $F^h_i(x)$ в некоторой системе координат $x$

следующего строения:

$$\Gamma_{ij}^h = \tilde{\Gamma}_{ij}^h + \alpha_{(i}\delta_{j)}^h + \beta_{(i}\tilde{F}_{j)}^h \qquad F_i^h = \alpha\delta_i^h + \beta\tilde{F}_i^h,$$

где $\alpha_i, \beta_i, \alpha, \beta$ — некоторые функции от $x^1, x^2, \ldots, x^n$,
$\tilde{\Gamma}_{ij}^h, \tilde{F}_i^h$ — некоторые функции от $x^2, x^3, \ldots, x^n$.

2. Положив $\xi_i^h \equiv \xi_{,i}^h$, уравнения (2) можно записать так:

$$\xi_{,i}^h = \xi_i^h, \qquad \text{(a)}$$

$$(4) \qquad \xi_{i,j}^h = \xi^\alpha R_{ij\alpha}^h + \delta_{(i}^h\psi_{j)} + F_{(i}^h\varphi_{j)}, \qquad \text{(б)}$$

$$\xi^\alpha F_{i,\alpha}^h + \xi_i^\alpha F_\alpha^h - \xi_\alpha^h F_i^\alpha = a\delta_i^h + bF_i^h, \qquad \text{(в)}$$

где $R_{ijk}^h$ — тензор Римана $A_n$.

Условия интегрируемости (4б) имеют вид:

$$(5) \qquad \mathcal{L}_\xi R_{ijk}^h \equiv \xi^\alpha R_{ijk,\alpha}^h + \xi_i^\alpha R_{\alpha jk}^h + \xi_j^\alpha R_{i\alpha k}^h + \xi_k^\alpha R_{ij\alpha}^h - \xi_\alpha^h R_{ijk}^\alpha =$$
$$= \varphi_i F_{[j,k]}^h + F_{i,[k}^h\varphi_{j]} + \delta_i^h\psi_{[jk]} + \delta_j^h\psi_{ik} - \delta_k^h\psi_{ij} + F_i^h\varphi_{[jk]} + F_j^h\varphi_{ik} - F_k^h\varphi_{ij},$$

где $\psi_{ij} \equiv \psi_{i,j}$, $\varphi_{ij} \equiv \varphi_{i,j}$, $[i, j]$ — альтернирование по $i$ и $j$.

При условии, что

$$(6) \qquad n > 3 \quad \text{и} \quad F_i^h \not\equiv \alpha\delta_i^h + a^h b_i,$$

где $a^h$, $b_i$ — некоторые векторы, из уравнений (5) можно выразить

$$\psi_{i,j} = {}^1Q_{ij\alpha}\xi^\alpha + {}^2Q_{ij\alpha}^\beta\xi_\beta^\alpha + {}^3Q_{ij}^\beta\varphi_\beta,$$
$$\varphi_{i,j} = {}^4Q_{ij\alpha}\xi^\alpha + {}^5Q_{ij\alpha}^\beta\xi_\beta^\alpha + {}^6Q_{ij}^\beta\varphi_\beta,$$

где ${}^\sigma O$ $(\sigma = \overline{1,6})$ — тензорные величины, составленные из геометрических объектов $A_n$, т. е. из объектов связности $\Gamma_{ij}^h$ и аффинора $F_i^h$.

Последнее следует из справедливости следующей леммы:

Лемма. *Если* $F_i^h \not\equiv \alpha\delta_i^h + a^h b_i$ *и* $n > 2$, *тогда система линейных однородных алгебраических уравнений*

$$\delta_i^h A_{[jk]} + A_{i[k}\delta_{j]}^h + F_i^h B_{[jk]} + B_{i[k}F_{j]}^h = 0,$$

*относительно неизвестных тензоров* $A_{ij}$ *и* $B_{ij}$ *имеет только тривиальное решение* $(A_{ij} \equiv B_{ij} \equiv 0)$.

Доказательство этой леммы легко провести в специальной системе координат быть и комплексной, в которой матрица $F_i^h$ приведена к форме Жордана.

Уравнения (4а, б) и (7), совокупность которых обозначим через (A), представляют собой систему линейных дифференциальных уравнений в ковариантных производных типа Коши относительно искомых тензоров

$$(8) \qquad \xi^h(x), \xi_i^h(x), \psi_i(x), \varphi_i(x),$$

которая имеет не более одного решения (8) для начальных значений в точке $x_0 \in A_n$:

$$\xi^h(x_0) = {}^0\xi^h,\ \xi^h_i(x_0) = {}^0\xi^h_i,\ \psi_i(x_0) = {}^0\psi_i,\ \varphi_i(x_0) = {}^0\varphi_i.$$

Следовательно, в $A_n$ при условии (6) порядок $r$ полной группы $F$-планарных преобразований не превосходит числа № $\equiv n(n+3)$.

Условия интегрируемости системы ($A$), совокупность которых вместе с ($4b$) (можно показать, что $a$ и $b$ являются линейными относительно $\xi^h$, $\xi^h_i$ с коэффициентами определенными $A_n$), обозначим через ($Б$), их первые ($Б_1$), вторые ($Б_2$) и последующие дифференциальные продолжения являются линейными однородными алгебраическими уравнениями относительно искомых тензоров (8) с коэффициентами, однозначно определенными пространством $A_n$.

На основании аналитической теории дифференциальных уравнений оказывается справедливой

**Теорема 2.** *Пространство аффинной связности $A_n$ ($n > 3$), в котором определена аффинорная структура $F^h_i \not\equiv \alpha\delta^h_i + a^h b_i$, допускает $F$-планарное преобразование тогда и только тогда, когда система уравнений* ($Б$), ($Б_1$), ($Б_2$), ..., ($Б_{№-1}$) *имеет в нем нетривиальное решение* (8).

Максимальное количество $r \leq$ № существенных параметров, от которых зависит общее решение системы уравнений ($A$), является порядком полной группы Ли $F$-планарных преобразований $A_n$.

Учитывая условия ($4b$) и их дифференциальные продолжения легко убедиться, что максимальный порядок $r =$ № не достигается, и более того, $r \leq$ № $- 2(n-2) \equiv n(n+1) + 4$.

## ЛИТЕРАТУРА


[1] Й. Микеш, Н. С. Синюков, *О квазипланарных отображениях пространств аффинной связности*, Изв. ВУЗов, Матем., 1 (1983), 55—61.

[2] *K.* Yano, *Differential geometry on complex and almost complex spaces*, Oxford—London, Pergamon Press, 1965, 323 pp.

[3] Д. В. Беклемишев, *Дифференциальная геометрия пространств с почти комплексной структурой*, Геометрия, 1963. Итоги науки, ВИНИТИ, М., (1965), 165—212.

[4] А. З. Петров, *Моделирование физических полей. равитация и теория относительности*, Казань, 4—5 (1968), 7—21.

[5] Н. С. Синюков, *Почти геодезические отображения аффинносвязных и римановых пространств*, Итоги науки и техники. Сер. Геометрия, ВИНИТИ, 13 (1982).



*Й. Микеш*

*Кафедра геометрии и топологии*

*Одесский государственный университет*

*Петра Великого 2*

*270 000 Одесса*

*СССР*