Časopis pro pěstování matematiky

Miroslav Fiedler

Poznámka o positivně definitních maticích

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 85 (1960), No. 1, 75--77

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/108118`

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 85 (1960), Praha

POZNÁMKA O POSITIVNĚ DEFINITNÍCH MATICÍCH

MIROSLAV FIEDLER, Praha

(Došlo dne 29. dubna 1959)

V článku se dokazuje nerovnost (3) pro positivně definitní matice A, B a některé její důsledky.

1. Úvod. Nechť $A = (a_{ij})$ je čtvercová matice n-tého řádu s komplexními prvky. Značíme jako obvykle A^* matici transponovanou a komplexně sdruženou k A, $\tau(A)$ stopu matice A (tj. $\tau(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$), $N(A) = (\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2)^{\frac{1}{2}}$, tj. $N^2(A) = \tau(AA^*)$. Dále označujeme $M(A)$ odmocninu z maximálního vlastního čísla matice AA^*; je-li speciálně A symetrická (tj. $A = A^*$) je $M(A)$ rovno maximální absolutní hodnotě vlastních čísel matice A. Platí nyní známé vztahy*)

$$N(AB) \leqq N(A)\, M(B)\,, \qquad N(AB) \leqq M(A)\, N(B)\,. \tag{1}$$

Rovněž užijeme vztahu

$$\tau(AB) = \tau(BA) \tag{2}$$

a (charakteristické) vlastnosti positivně definitních matic, že k takové matici existuje regulární matice C tak, že $A = CC^*$.

2. Dokážeme tuto větu:

Věta. *Nechť A a B jsou positivně definitní matice téhož řádu. Potom platí*

$$\tau[(A - B)(B^{-1} - A^{-1})] \geqq \frac{N^2(A - B)}{M(A)\, M(B)}\,. \tag{3}$$

D ů k a z. Existují regulární matice C_1 a C_2 tak, že $A = C_1C_1^*$, $B = C_2C_2^*$. Nyní podle (2) a (1)

$$\begin{aligned}\tau[(A - B)(B^{-1} - A^{-1})] &= \tau[(A - B)\, B^{-1}(A - B)\, A^{-1}] = \\ &= \tau[(A - B)\, C_2^{*-1}\, C_2^{-1}(A - B)\, C_1^{*-1}C_1^{-1}] = \\ &= \tau[C_1^{-1}(A - B)\, C_2^{*-1}(C_1^{-1}(A - B)\, C_2^{*-1})^*] = N^2[C_1^{-1}(A - B)\, C_2^{*-1}] \geqq \\ &\geqq \frac{N^2(A - B)}{M^2(C_1)\, M^2(C\ )} = \frac{N^2(A - B)}{M(A)\, M(B)}\,,\end{aligned}$$

*) Viz např. A. S. HOUSEHOLDER [1], str. 42.

neboť

$$M(A) = M(C_1C_1^*) = M^2(C_1) \text{ atp.}$$

Z této věty plynou některé důsledky:

Důsledek 1. *Jsou-li A a B positivně definitní matice téhož řádu, platí*

$$\tau[(A - B)(B^{-1} - A^{-1})] \geqq \frac{N^2(A - B)}{\|A\| \, \|B\|}, \tag{4}$$

kde $\|M\|$ je libovolná norma matice M.

Důkaz. Plyne ihned odtud, že $M(A) \leqq \|A\|$ pro symetrickou matici A, neboť $M(A)$ je pak rovno maximální absolutní hodnotě vlastních čísel matice A.

Důsledek 2. *Jsou-li $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ positivně definitní matice n-tého řádu, $A^{-1} = (\alpha_{ij})$, $B^{-1} = (\beta_{ij})$, potom platí*

$$\sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij} - b_{ij})(\bar{\alpha}_{ij} - \bar{\beta}_{ij}) \leqq 0 \, ; \tag{5}$$

rovnost zde nastane právě pro $A = B$.

Důkaz. Plyne ihned z (3), neboť levá strana (5) je $- \tau[(A - B)(B^{-1} - A^{-1})]$.

Důsledek 3. *Positivně definitní matice je určena jednoznačně, jsou-li dány její prvky na některých místech v jejím schematu a prvky matice k ní inversní na zbylých místech schematu.*

Důkaz. Nechť pro dvě positivně definitní matice $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ s inversními maticemi $A^{-1} = (\alpha_{ij})$, $B^{-1} = (\beta_{ij})$ platí $a_{ij} = b_{ij}$ pro $(i, j) \in M_1$, $\alpha_{ij} = \beta_{ij}$ pro $(i, j) \in M_2$, kde M_1 resp. M_2 odpovídá prvním resp. druhým místům schematu. Potom

$$\sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij} - b_{ij})(\bar{\alpha}_{ij} - \bar{\beta}_{ij}) = \sum_{M_1} \ldots + \sum_{M_2} \ldots = 0 \, ,$$

takže podle důsledku 2 je $A = B$.

Poznámka. Nezabýváme se zde otázkou, za jakých podmínek taková positivně definitní matice skutečně existuje.

Důsledek 4. *Zvětšíme-li (zmenšíme-li) reálné části prvků positivně definitní matice na některých místech tak, aby výsledná matice byla opět positivně definitní, potom inversní matice k výsledné matici má alespoň na jednom z uvedených míst prvek o menší (větší) reálné části než měla matice původní.*

Důkaz. Plyne ihned z (5).

Literatura

[1] *Householder A. S.*: Principles of Numerical Analysis, McGraw-Hill, N. York-London 1953.

Резюме

ЗАМЕЧАНИЕ О ПОЛОЖИТЕЛЬНО ОПРЕДЕЛЕННЫХ МАТРИЦАХ

МИРОСЛАВ ФИДЛЕР (Miroslav Fiedler), Прага

Если $A = (a_{ij})$ — квадратная матрица, то мы через A^* обозначим матрицу транспонированную и комплексно сопряженную с A, через $\tau(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ — след матрицы A, $N(A) = (\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\tau(AA^*)}$, через $M(A)$ — квадратный корень из наибольшего собственного числа матрицы AA^*. Доказывается теорема:

Если A и B — положительно определенные матрицы одинаковых порядков, то

$$\tau[(A - B)(B^{-1} - A^{-1})] \geqq \frac{N^2(A - B)}{M(A)\,M(B)}.$$

Далее выводятся некоторые следствия этого неравенства, напр.:

Положительно определенная матрица опрделяется однозначно, если даны ее элементы на некоторых местах в ее схеме и элементы ее обратной матрицы на остальных местах схемы.

Summary

A REMARK ON POSITIVE DEFINITE MATRICES

Miroslav Fiedler, Praha

Let A be a square matrix. We denote A^* the conjugate transpose of A, $\tau(A)$ the trace of A, $N(A) = [\tau(AA^*)]^{\frac{1}{2}}$, $M(A)$ the square root of the maximal proper value of AA^*. The following theorem is proved:

Let A, B be positive definite matrices of the same order. Then

$$\tau[(A - B)(B^{-1} - A^{-1})] \geqq \frac{N^2(A - B)}{M(A)\,M(B)}.$$

Some consequences of this inequality are given, e. g.:

A positive definite matrix is uniquely determined by its elements on some places of its scheme and by the elements of its inverse matrix on the remaining places.