Časopis pro pěstování matematiky

František Zítek

Singulární vstupní proudy

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 83 (1958), No. 1, 41--55

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/108177`

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 83 (1958), Praha

SINGULÁRNÍ VSTUPNÍ PROUDY

FRANTIŠEK ZÍTEK, Praha

(Došlo dne 27. října 1956)

DT: 381.5
381.741.001.2

Práce se zabývá podrobnějším studiem singulárních vstupních proudů (viz [6]), zejména některých jednodušších zvláštních případů. Jsou odvozeny výsledky analogické základním výsledkům platným pro regulární proudy (viz [5], kap. 1—5), je zaveden pojem singulárních aproximací regulárního proudu a ukázány některé jejich vlastnosti. Použití je ilustrováno jednoduchým příkladem z theorie hromadné obsluhy.

1. Úvod

Význam theorie vstupních proudů tkví s praktického hlediska především v její souvislosti s theorií hromadné obsluhy. Dobrý i když zdaleka ne úplný přehled o problematice tohoto oboru lze získat z monografie [5], kde je možno se též poučiti o užitečnosti a upotřebitelnosti těchto theorií. Monografie [5] tvoří spolu s prací [6] výchozí bod této práce; proto také budeme pokud možno zásadně užívati pojmů, termínů a označení zavedených v [5].

Typ vstupního proudu je jednou ze základních charakteristik systému hromadné obsluhy. Jeho studiu byla již věnována řada prací. S matematického hlediska lze na vstupní proudy nahlížeti především jako na stochastické procesy jistého, dosti speciálního druhu; toto hledisko bylo také přijato v [5]. Vstupní proud je pak charakterisován stochastickým procesem $x(t)$, $t \geqq 0$, udávajícím počet „zákazníků", kteří přišli během časového intervalu $(0, t\rangle$. Náhodné funkce $x(t)$ mají tyto vlastnosti: jsou (skoro jistě) neklesající, zprava spojité, nabývají jen celočíselných hodnot a platí $\mathbf{P}(x(0) = 0) = 1$. Při pevném t je tedy $x(t)$ náhodná proměnná se zákonem rozložení pravděpodobností

$$v_k(t) = \mathbf{P}(x(t) = k)\,, \quad k = 0, 1, 2, \dots\,; \tag{1.1}$$

přitom pro každé $t \geqq 0$ platí $\sum\limits_{k=0}^{\infty} v_k(t) = 1$. Vzhledem k uvedeným vlastnostem procesu jsou funkce $v_k(t)$ zprava spojité a součty

$$V_k(t) = \sum_{j=0}^{k} v_j(t) \tag{1.2}$$

jsou neklesající a zprava spojité funkce argumentu t, kromě toho platí $V_0(0) = v_0(0) = 1$.

V některých souvislostech je výhodné uvažovati místo procesu $x(t)$ jeho přírůstky

$$\xi(t_1, t_2) = x(t_2) - x(t_1), \quad t_1 < t_2 ; \tag{1.3}$$

v obvyklé terminologii znamená $\xi(t_1, t_2)$ počet zákazníků, kteří přišli v intervalu $(t_1, t_2\rangle$, specielně tedy $\xi(0, t) = x(t)$. Zákon rozložení pravděpodobností náhodné proměnné $\xi(t_1, t_2)$ budiž při pevných t_1, t_2 dán výrazy

$$v_k(t_1, t_2) \doteq \mathbf{P}(x(t_2) - x(t_1) = k) , \; k = 0, 1, 2, \ldots \tag{1.4}$$

Dále označíme

$$M(t) = \mathbf{E}x(t) = \sum_{k=1}^{\infty} k v_k(t) ; \tag{1.5}$$

zřejmě je $M(t)$ pro $t \geqq 0$ neklesající, zprava spojitá funkce argumentu t, platí rovněž

$$\mathbf{E}\xi(t_1, t_2) = M(t)_2 - M(t_1) . \tag{1.6}$$

Funkci $M(t)$ nazveme shodně s [6] *řídící funkcí* proudu; její derivace $\bar{\mu}(t) = M'(t)$, která existuje skoro všude (viz na př. [7], str. 193), bývá obvykle nazývána intensitou proudu. My však budeme užívati tohoto termínu v poněkud jiném smyslu.

Analogicky s [5] a [6] nazveme vstupní proud

a) *finitním*, jestliže pro všechna $t \geqq 0$ jest $M(t) < \infty$;

b) *regulárním*, je-li $M(t)$ spojitá pro $t \geqq 0$;

c) *singulárním*, jestliže $M(t)$ je konstantní až na spočetný počet bodů nespojitosti, v nichž má skok;

d) *stacionárním*, jestliže pravděpodobnosti (1.4) závisí vedle k jen na rozdílu $(t_2 - t_1)$, je-li tedy $x(t)$ proces se stacionárními přírůstky;

e) *nezávislým*, jestliže náhodné proměnné $\xi(t_1, t_2)$ a $\xi(t_3, t_4)$ jsou nezávislé, když intervaly $(t_1, t_2\rangle$ a $(t_3, t_4\rangle$ jsou disjunktní.

Jak ukázal Chinčin v [6], lze každý finitní nezávislý proud rozložiti na dva vzájemně nezávislé proudy, z nichž jeden je regulární a druhý singulární. Pro řídící funkci proudu odpovídá tomuto rozkladu známý rozklad na spojitou složku a funkci skoků (viz na př. [7], str. 194, věta 7).[1])

V dalších paragrafech se budeme zabývati převážně zevrubným studiem finitních singulárních proudů. Přitom budeme v **2**—**6** předpokládati, že body nespojitosti řídící funkce jsou celá nezáporná čísla; pro naše účely nebude toto omezení na závadu. Ježto $x(t)$ je v tomto případě nutně konstantní v inter-

---

[1]) Určité dosti obecné podmínky finitnosti proudu vyplývají m. j. ze zajímavých výsledků M. Fisze [4].

valech tvaru $\langle n, n + 1)$ (přesněji řečeno: skoro jistě konstantní), stačí uvažovati jen posloupnost $x_n = x(n)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$; obdobně pro $\xi_n = x_n - x_{n-1}$, $\xi_0 = x_0$ a také pro funkce v_k, V_k, atd. Vlastnosti d) a e) můžeme pak vyjádřiti jednodušeji jako

d') náhodné proměnné ξ_n mají stejné rozložení pravděpodobností;

e') libovolné dva součty $\sum_{j=k_1}^{k_2} \xi_j$ a $\sum_{j=k_3}^{k_4} \xi_j$ jsou stochasticky nezávislé, jestliže $k_2 < k_3$ nebo $k_4 < k_1$.

Pro regulární proudy byl v [5] zaveden ještě také pojem *ordinárnosti*, vyjádřené vztahem

$$\lim_{h \to 0} \frac{1 - v_0(t, t + h) - v_1(t, t + h)}{h} = 0 . \tag{1.7}$$

Analogicky nazveme *singulární* proud *ordinárním*, jestliže pro všechna $n \geqq 0$ platí $\mathbf{P}(\xi_n > 1) = 0$. Rovněž podobně jako v [5] nazveme singulární proud *jednoduchým*, jestliže je stacionární, nezávislý a ordinární.

V theorii regulárních proudů hrají důležitou úlohu veličiny zvané *parametr* a *intensita* proudu. Parametr $\lambda(t)$ proudu je definován jako

$$\lambda(t) = \lim_{h \to 0} \frac{1 - v_0(t, t + h)}{h} \tag{1.8}$$

a intensita $\bar{\mu}(t)$ jako

$$\bar{\mu}(t) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \mathbf{E}\,[x(t + h) - x(t)] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} M(t) . \tag{1.9}$$

V případě singulárních proudů budeme nazývati parametrem proudu přímo pravděpodobnost

$$\lambda_n = \mathbf{P}(\xi_n \geqq 1) \tag{1.10}$$

a intensitou střední hodnotu

$$\mu_n = \mathbf{E}\xi_n . \tag{1.11}$$

2. Jednoduchý singulární proud

Studium singulárních proudů začneme nejjednodušším případem t. zv. jednoduchého proudu. Posloupnost $\{\xi_n\}_{n=0}^{\infty}$ je v tomto případě posloupností nezávislých náhodných proměnných nabývajících pouze hodnot 0 a 1, a to s konstantními pravděpodobnostmi q a p, $p + q = 1$. Náhodné proměnné x_n mají tudíž binomické rozložení pravděpodobností

$$v_k(n) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} . \tag{2.1}$$

Ježto jednoduchý proud je stacionární, je i jeho parametr konstantní, totiž

$$\lambda_n = \mathbf{P}(\xi_n = 1) = p . \tag{2.2}$$

Obdobně také intensita proudu bude rovna

$$\mu_n = \mathbf{E}\xi_n = p = M(n) - M(n-1)\,. \tag{2.3}$$

Z (2.3) vidíme, že řídící funkce $M(t)$ jednoduchého singulárního proudu má v bodech $t = 1, 2, \ldots$ skoky rovné p, jinak je konstantní. Současně vyplývá z (2.2) a (2.3), že podobně jako v regulárním případě mají i zde intensita a parametr touž hodnotu.

Na vstupní proud jest ovšem možno se dívati také s hlediska časových intervalů mezi příchody jednotlivých po sobě následujících zákazníků. Označíme-li obecně z_i délku intervalu (v případě singulárního proudu nutně celočíselného) mezi příchodem zákazníka i-tého a $(i+1)$ho, $i = 1, 2, 3, \ldots$, snadno se přesvědčíme, že pro jednoduchý singulární proud platí

$$\mathbf{P}(z_i = k) = pq^{k-1}\,, \quad k = 1, 2, \ldots;\ i = 1, 2, \ldots\,, \tag{2.4}$$

t. j. že délky z_i mají Pascalovo rozložení. Jsou rovněž stochasticky nezávislé a platí $\mathbf{E}z_i = p^{-1}$.

3. Stacionární nezávislý singulární proud

Tento obecnější druh vstupních proudů je o to složitější, že náhodné proměnné ξ_n mohou nabývati i hodnot větších než 1. Jejich společný zákon rozložení budiž dán pravděpodobnostmi

$$v_k = \mathbf{P}(\xi_n = k)\,, \quad k = 0, 1, 2, \ldots\,. \tag{3.1}$$

Pro pravděpodobnosti $v_k(n)$ pak dostaneme výrazy:

$$v_0(n) = v_0^n\,,\ v_1(n) = nv_1v_0^{n-1}\,,\ v_2(n) = nv_2v_0^{n-1} + \binom{n}{2} v_1^2v_0^{n-2} \text{ atd.}$$

Mezi parametrem $\lambda = 1 - v_0$ a intensitou $\mu = M(n) - M(n-1)$ platí ovšem týž vztah jako v regulárním případě

$$\mu = \sum_{k=1}^{\infty} k\,.\,v_k \geqq \sum_{k=1}^{\infty} v_k = 1 - v_0 = \lambda\,. \tag{3.2}$$

Současně je z (3.2) zřejmá i platnost analogie známé věty (viz [5], § 11):

Nutnou a postačující podmínkou pro to, aby stacionární nezávislý vstupní proud byl jednoduchý, je rovnost $\mu = \lambda$.

Všimněme si ještě mezipříchodových intervalů. Délka nenulových intervalů má opět Pascalovo rozložení

$$\mathbf{P}(z = k \,/\, z > 0) = (1 - v_0)\, v_0^{k-1}\,, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{3.3}$$

Označme pro zjednodušení $\nu = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{v_k}{k}$. Pro pravděpodobnost $\mathbf{P}(z = 0)$ dostaneme snadnou úvahou[2]) výraz

$$\mathbf{P}(z = 0) = 1 - \frac{\nu}{1 - v_0}, \tag{3.4}$$

takže odtud a z (3.3) vyplývá

$$\mathbf{P}(z = k) = \nu v_0^{k-1}, \quad k = 1, 2, \ldots; \tag{3.5}$$

formulemi (3.4) a (3.5) je zákon rozložení pravděpodobností délek mezipříchodových intervalů určen. Pro střední hodnotu délky dostaneme $\mathbf{E}[z / z > 0] = (1 - v_0)^{-1}$ a

$$\mathbf{E}z = \frac{\nu}{(1 - v_0)^2}. \tag{3.6}$$

4. Ordinárnost stacionárních proudů

Pro regulární stacionární proudy je známa věta Koroljukova (viz [5], § 11, [8]), která udává podmínky ordinárnosti proudu. V případě singulárního proudu můžeme ihned vysloviti obdobnou větu; její důkaz je o to jednodušší, že na rozdíl od regulárních proudů má parametr λ singulárního proudu vždy konečnou hodnotu, neboť $\lambda \leqq 1$.

Věta. *Singulární stacionární proud je ordinární tehdy a jen tehdy, jestliže* $\mu = \lambda$.

Důkaz. I. Je-li proud ordinární, pak $v_k = 0$ pro $k > 1$, tedy

$$\mu = \mathbf{E}\xi_n = 1 \,.\, v_1 = 1 - v_0 = \lambda \,.$$

II. Nechť $\mu = \lambda$, tedy $\sum_{k=1}^{\infty} k v_k = \sum_{k=1}^{\infty} v_k$, odtud však plyne $\sum_{k=2}^{\infty} (k - 1)\, v_k = 0$, vzhledem k nezápornosti všech členů platí tedy nutně $v_k = 0$ pro $k \geqq 2$, c. b. d.

Poznámka. Zcela obdobně jako pro regulární proudy lze také pro singulární stacionární ordinární proudy zavésti t. zv. *Palmovy funkce* $\varphi_k(n)$ vztahy

$$\varphi_k(n) = \frac{1}{\lambda} \mathbf{P}(\xi_1 = 1, \sum_{j=2}^{n+1} \xi_j = k)\,, \; n = 0, 1, 2, \ldots, k = 0, 1, 2, \ldots \tag{4.1}$$

specielně tedy $\varphi_0(0) = 1$. Znamená tudíž $\varphi_k(n)$ podmíněnou pravděpodobnost toho, že v n po sobě následujících okamžicích přišlo právě k zákazníků za

[2]) $\mathbf{P}(z = 0)$ je pravděpodobnost toho, že uvažovaný zákazník je jeden z k ($k \geqq 1$) současně přišlých zákazníků, a to nikoliv poslední, tedy $\mathbf{P}(z = 0) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{v_k}{1 - v_0} \cdot \frac{k - 1}{k}$.

předpokladu, že bezprostředně před uvažovanou n-ticí okamžiků přišel zákazník. Z (4.1) můžeme snadno odvoditi formule (pro $n < k$ je $\varphi_k(n) = 0$)

$$v_0(n) = 1 - \lambda \sum_{j=0}^{n-1} \varphi_0(j) \tag{4.2}$$

a

$$v_k(n) = \lambda \sum_{j=k-1}^{n+1} [\varphi_{k-1}(j) - \varphi_k(j)],\ k = 1, 2, \ldots, \tag{4.3}$$

analogické formulím (10.8) monografie [5].

5. Stacionární proudy s omezenou závislostí

Nazveme tak proudy (které obecně nemusí být nezávislé) takové, že délky mezipříchodových intervalů jsou nezávislé náhodné proměnné. V singulárním případě nabývají tyto náhodné proměnné opět jenom nezáporných celých hodnot, v případě ordinárních proudů jenom kladných. Pro stacionární ordinární proudy je požadavek omezené závislosti slabší než požadavek nezávislosti proudu, t. j. každý jednoduchý proud je také proudem s omezenou závislostí, naopak však existují stacionární ordinární proudy s omezenou závislostí, které nejsou nezávislé; jako příklad může sloužiti singulární proud určený posloupností ξ_n tvořící Markovův řetězec s maticí pravděpodobností přechodu

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},\ a \neq c,\ b \neq d,\ abcd \neq 0 \tag{5.1}$$

a se stacionárním rozložením absolutních pravděpodobností

$$v_0 = \frac{c}{b+c},\quad v_1 = \frac{b}{b+c}. \tag{5.2}$$

P o z n á m k a. Není-li ordinární nezávislý proud stacionární, nemusí být proudem s omezenou závislostí, ač by bylo možno při povrchním čtení takto rozuměti tvrzení na počátku § 13 a v poznámce pod čarou na str. 42 v [5]. Lze snadno sestrojiti příklady singulárních i regulárních nestacionárních vstupních proudů, které jsou sice ordinární a nezávislé, kde však již prvé dva mezipříchodové intervaly jsou stochasticky závislé.

Singulární proud, který je stacionární, ordinární a s omezenou závislostí, nazveme proudem typu P. Tyto proudy mají některé jednoduché vlastnosti, analogické vlastnostem regulárních proudů tohoto typu. Použijeme-li Palmových funkcí, odvodíme snadno, že pro rozložení pravděpodobností délek mezipříchodových intervalů platí (viz [5], str. 43)

$$\mathbf{P}(z_i \leqq n) = 1 - \varphi_0(n)\ ;\ i = 1, 2, \ldots, n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{5.3}$$

$$\mathbf{P}(z_0 \leqq n) = \lambda \sum_{k=0}^{n-1} \varphi_0(k)\,. \tag{5.4}$$

Obě tyto formule lze odvodit též přímo ze vzorců § 4.

V důsledku stacionarity proudu typu **P** nezávisí jeho vlastnosti na volbě počátku časové osy, t. j. z posloupnosti $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ můžeme vynechati libovolný — avšak pevný — počet počátečních členů, aniž tím změníme stochastickou strukturu proudu. Vynecháme-li jich však *náhodný* počet, a to tak, aby poslední vynechaný člen ξ byl roven 1, pak změníme stochastický charakter posloupnosti, proud přestane být proudem typu **P**. Uvažujme nyní v takto modifikovaném proudu jev $\boldsymbol{E} \equiv (\xi = 1)$, tento jev je rekurentním jevem ve smyslu Fellerových definicí (viz Feller [1], kap. XII; [2]). Fellerovým pravděpodobnostem f_k odpovídají v našem označení (platném pro původní nemodifikovanou posloupnost $\{\xi_n\}$) pravděpodobnosti

$$f_k = \mathbf{P}(z_i = k) = \varphi_0(k-1) - \varphi_0(k)\,, \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{5.5}$$

pravděpodobnostem u_j pak podmíněné pravděpodobnosti

$$u_j = \mathbf{P}(\xi_{j+1} = 1 \,/\, \xi_1 = 1)\,, \quad j = 1, 2, \ldots \tag{5.6}$$

Nyní již můžeme pro náš proud využíti všech výsledků odvozených Fellerem: střední doba návratu jevu $\boldsymbol{E}$ bude

$$\sum_{k=1}^{\infty} k[\varphi_0(k-1) - \varphi_0(k)] = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_0(k)\,, \tag{5.7}$$

konstanta f je rovna

$$f = 1 - \lim_{n\to\infty} \varphi_0(n)\,, \tag{5.8}$$

jev $\boldsymbol{E}$ je tedy jistý tehdy a jen tehdy, platí-li $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_0(n) = 0$. Konverguje-li řada $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k\varphi_0(k)$, lze aplikovati rovněž výsledky Fellerovy týkající se asymptotické normality součtů $\boldsymbol{S}_n = \sum\limits_{i=1}^{n} z_i$ i počtu zákazníků $\boldsymbol{N}_r$.

6. Nestacionární nezávislý ordinární proud

V tomto paragrafu si jen velmi stručně všimneme proudu tohoto speciálního typu. Jest ovšem $\mathbf{P}(\xi_n > 1) = 0$, takže $\mathbf{P}(\xi_n = 1) = \lambda_n$ je „okamžitá" hodnota parametru. Rovněž „okamžitá" hodnota intensity je $\mu_n = \mathbf{E}\xi_n = \lambda_n$; takže platí zřejmě

Věta. *Nezávislý singulární proud je ordinární tehdy a jen tehdy, jestliže $\mu_n = \lambda_n$ pro všechna n.*

Náhodné proměnné

$$\xi_{n,m} = x_{n+m} - x_n = \sum_{i=1}^{m} \xi_{n+i} \tag{6.1}$$

mají t. zv. zobecněné binomické rozložení (viz na př. [3], str. 107). Platí zejména

$$\mathbf{E}\xi_{n,m} = \sum_{i=1}^{m} \lambda_{n+i}\,; \tag{6.2}$$

řídící funkce $M(t)$ má tedy v bodech $t = n$ skoky rovné λ_n; střední hodnota (6.2) je stejná, jako by byla v případě stacionárního proudu s průměrným parametrem

$$\bar{\lambda} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} \lambda_{n+1} . \tag{6.3}$$

Pro pravděpodobnosti $v_0(n, n+m) = \mathbf{P}(\xi_{n,m} = 0)$ dostaneme snadno rekurentní vztah

$$v_0(n, n+m+1) = v_0(n, n+m) \, . \, v_0(n+m, n+m+1) = \\ = v_0(n, n+m) \, . \, (1 - \lambda_{n+m+1}) , \tag{6.4}$$

takže

$$v_0(n, n+m) = \prod_{i=1}^{m} (1 - \lambda_{n+i}) ; \tag{6.5}$$

podobně lze odvodit diferenční rovnici

$$v_k(n, n+m+1) - v_k(n, n+m) = - \lambda_{n+m+1} [v_k(n, n+m) - v_{k-1}(n, n+m)] , \tag{6.6}$$

charakterisující zobecněné binomické rozložení.

7. Singulární p-aproximace regulárních proudů

Budiž dán regulární vstupní proud $x(t)$. Singulární proud $x^{(r)}(t)$ definovaný vztahem

$$x^{(r)}(t) = x\left(\frac{[2^r \, . \, t]}{2^r}\right) \tag{7.1}$$

nazveme r-tou *singulární p-aproximací* (regulárního) proudu $x(t)$. Pro příslušné pravděpodobnosti $v_k^{(r)}$, $V_k^{(r)}$ platí zřejmě

$$v_k^{(r)}(t) = v_k\left(\frac{[2^r \, . \, t]}{2^r}\right) \tag{7.2}$$

a

$$V_k(t) \leqq V_k\left(\frac{[2^r \, . \, t]}{2^r}\right) = V_k^{(r)}(t) \leqq V_k(t + 2^{-r}) . \tag{7.3}$$

Ježto regulární proud je stochastický proces spojitý podle pravděpodobnosti, platí pro každé $t \geqq 0$

$$\lim_{h \to 0} \mathbf{P}(x(t+h) > x(t)) = 0 , \tag{7.4}$$

odtud však vyplývá

$$\lim_{r \to \infty} V_k^{(r)}(t) = V_k(t) , \quad t \geqq 0 , \quad k = 0, 1, 2, \ldots . \tag{7.5}$$

Obdobně lze dále dokázati, že posloupnost $\{x^{(r)}(t)\}_{r=0}^{\infty}$ konverguje k $x(t)$ ve smyslu Bernoulliově.

Ze spojitosti podle pravděpodobnosti procesu $x(t)$ a z definice $x^{(r)}(t)$ však nadto vyplývá i konvergence $x^{(r)}(t)$ k $x(t)$ podle pravděpodobnosti pro každé $t \geqq 0$; je to důsledek předpokládané monotonie funkcí $x(t)$:

$$x(t - 2^{-r}) \leqq x\left(\frac{[2^r t]}{2^r}\right) = x^{(r)}(t) \leqq x(t)\,, \tag{7.6}$$

takže

$$\lim_{r\to\infty} \mathbf{P}(x(t) - x^{(r)}(t) > 0) = 0\,. \tag{7.7}$$

S praktického hlediska znamená přechod k r-té singulární p-aproximaci, že se počet zákazníků zjišťuje jen v určitých ekvidistantních časových okamžicích $t = j\,.\,2^{-r}$, $j = 0, 1, 2, \ldots$, takže je znám vždy jen souhrnný počet zákazníků přišlých v intervalech délky 2^{-r}, nikoli však přesné okamžiky příchodu jednotlivých zákazníků.

Vlastnosti stacionarity, nezávislosti a finitnosti se zachovávají při přechodu od regulárního proudu k jeho p-aproximacím; naproti tomu ordinárnost proudu obecně není zachována.

Vztah mezi rozložením pravděpodobností přírůstků ξ_n regulárního proudu a jeho singulárních p-aproximací si snadno odvodíme ze vzorců (7.2), (7.3), resp. z definice (7.1). Všimněme si ještě podrobněji parametru a intensity proudu. Z (1.8) máme

$$\mathbf{P}(x(t + h) > x(t)) = h\,.\,\lambda(t) + o(h)\,, \tag{7.8}$$

avšak

$$\lambda_j^{(r)} = \mathbf{P}\left(x\left(\frac{j}{2^r}\right) > x\left(\frac{j-1}{2^r}\right)\right), \tag{7.9}$$

tedy

$$\lambda_j^{(r)} = 2^{-r}\,.\,\lambda(j2^{-r}) + o(2^{-r})\,, \tag{7.10}$$

takže při $r \to \infty$, $j \to \infty$, $j\,.\,2^{-r} \to t$ dostáváme

$$\lim 2^r\,.\,\lambda_j^{(r)} = \lambda(t)\,, \tag{7.11}$$

pokud parametr $\lambda(t)$ je spojitou funkcí argumentu t, speciálně tedy platí (7.11) v případě stacionárního proudu $x(t)$.

Obdobně máme pro intensitu proudu z (1.9) a z

$$\mu_j^{(r)} = \mathbf{E}\left[x\left(\frac{j}{2^r}\right) - x\left(\frac{j-1}{2^r}\right)\right] \tag{7.12}$$

rovnost

$$\mu_j^{(r)} = 2^{-r}\,.\,\bar{\mu}(t) + o(2^{-r})\,, \tag{7.13}$$

takže znovu při $r \to \infty$, $j \to \infty$, $j\,.\,2^{-r} \to t$ platí

$$\lim 2^r \mu_j^{(r)} = \bar{\mu}(t)\,. \tag{7.14}$$

Poznámka. Je zřejmé, že volba posloupnosti $\{2^{-r}\}_{r=0}^{\infty}$ není pro definici a vlastnosti singulárních p-aproximací regulárního proudu nijak podstatná. Místo ní by bylo možno použít i libovolné jiné vhodné posloupnosti konvergující k nule.

8. Singulární B-aproximace

Mějme opět dán regulární proud $x(t)$. Posloupnost $\{x^{(r)}(t)\}_{r=0}^{\infty}$ singulárních proudů nazveme *posloupností singulárních B-aproximací* proudu $x(t)$, jestliže $\lim_{r\to\infty} x^{(r)}(t) = x(t)$ v Bernoulliově smyslu. Je zřejmé z (7.7), že posloupnost p-aproximací regulárního proudu je také posloupností jeho B-aproximací. Přitom se můžeme (pro naše účely bez újmy obecnosti) omeziti jen na takové posloupnosti B-aproximací, jejichž r-tý člen má řídící funkci konstantní v intervalech tvaru $\langle j \,.\, 2^{-r}, (j+1) \,.\, 2^{-r})$, $j = 0, 1, 2, \ldots$.

Všimněme si, že na rozdíl od p-aproximací, má o B-aproximacích smysl mluvit jen jako o celých posloupnostech; r-tá B-aproximace nám sama o sobě ještě nic neříká o aproximovaném regulárním proudu, kdežto r-tá p-aproximace ano.

Ježto hodnoty parametru a intensity proudu, ať již regulárního či singulárního, závisí pouze na zákonech rozložení pravděpodobností procesu $x(t)$, platí vztahy (7.11) a (7.14) za jistých podmínek i tehdy, jde-li o posloupnost B-aproximací. Odtud, z věty § 4 a z věty 3 v [8] vyplývá

Věta. *Jestliže k danému finitnímu regulárnímu proudu $x(t)$ existuje posloupnost stacionárních ordinárních singulárních B-aproximací taková, že platí* (7.11) a (7.14), *pak $x(t)$ je rovněž stacionární a ordinární proud.*

Kromě parametru a intensity existují ovšem i jiné důležité vlastnosti závislé jen na zákonu rozložení pravděpodobností, které se mohou zachovati při limitním přechodu v posloupnosti B-aproximací regulárního proudu. Pro ilustraci si v dalším paragrafu ukážeme na jednoduchém příkladě využití singulárních B-aproximací k řešení některých úloh theorie hromadné obsluhy. Účelem jest ovšem jen ilustrace možností, nikoliv systematické odvozování nových výsledků; jde totiž o případ vstupního proudu, který byl vyšetřován již v samých začátcích theorie systémů hromadné obsluhy.

9. Obsluha jednoduchého proudu

Budeme uvažovati jednoduchý singulární vstupní proud $x_n = x(n)$. Zákazníci nechť vytvářejí jednoduchou frontu obsluhovanou jediným obsluhujícím, délky d_i trvání obsluhy buďtež nezávislé náhodné proměnné s týmž zákonem rozložení Pascalova typu daným pravděpodobnostmi

$$\mathbf{P}(d_i = k) = \beta(1-\beta)^{k-1}, \quad k = 1, 2, \ldots; 0 < \beta < 1 \,. \tag{9.1}$$

Poznámka. Pascalovo rozložení je diskretní analogií exponenciálního rozložení v tom smyslu, že podobně jako pro exponenciálně rozložené spojité veličiny platí

$$\mathbf{P}(d = k + n \mid d \geqq n) = \mathbf{P}(d = k)\,. \tag{9.2}$$

Předpokládáme, že obsluha dalšího zákazníka může začíti v témž (celočíselném) okamžiku, kdy předcházející byla ukončena.

Budeme rozlišovati tři případy podle osudu zákazníků přišlých v okamžiku, kdy obsluhující je zaměstnán.

I. *Zákazníci, kteří nemohou být ihned obslouženi, čekají po neomezenou dobu v neomezené frontě.*

Označíme-li η_n počet zákazníků ve frontě (včetně právě obsluhovaného) v okamžiku n, tvoří náhodné proměnné η_n Markovův řetězec s maticí pravděpodobností přechodu $\mathbf{P} = (p_{ij})$, $i, j = 0, 1, 2, \ldots$ tvaru

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1-\lambda & \lambda & 0 & 0 & \ldots \\ \beta(1-\lambda) & \beta\lambda + (1-\beta)(1-\lambda) & (1-\beta)\lambda & 0 & \ldots \\ 0 & \beta(1-\lambda) & \beta\lambda + (1-\beta)(1-\lambda) & (1-\beta)\lambda & \ldots \\ 0 & 0 & \beta(1-x) & \beta\lambda + (1-\beta)(1-\lambda) & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{bmatrix}.$$

Stacionární rozložení absolutních pravděpodobností $P_k = \mathbf{P}(\eta_n = k)$ získáme známými methodami řešením rovnic

$$P_k = \sum_{j=0}^{\infty} P_j p_{jk}\,; \tag{9.3}$$

dostaneme tak — v podstatě zcela stejnými úpravami jakých je použito pro regulární proudy v [5] —

$$P_k = \frac{\lambda^k (1-\beta)^{k-1}}{\beta^k (1-\lambda)^k} \,.\, P_0\,, \tag{9.4}$$

což spolu s normující podmínkou $\sum_{k=0}^{\infty} P_k = 1$ dává

$$P_0 = \frac{\beta - \lambda}{\beta}\,; \tag{9.5}$$

vzorci (9.4) a (9.5) jsou P_k úplně určena. Vidíme, že podobně jako v regulárním případě musíme předpokládat $\lambda < \beta$, aby stacionární řešení existovalo. Ježto délky obsluhy d_i jsou nezávislé náhodné proměnné, dostáváme z (9.1), (9.4) a (9.5) pro celkovou dobu γ, po kterou zákazník musí čekat na obsluhu, pravděpodobnosti

$$\mathbf{P}(\gamma = n) = \sum_{k=1}^{n} P_k \,.\, \binom{n-1}{n-k} \beta^k (1-\beta)^{n-k}\,, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{9.6}$$

a

$$\mathbf{P}(\gamma = 0) = P_0 = \frac{\beta - \lambda}{\beta}. \tag{9.7}$$

Z (9.6) pak vyplývá

$$\mathbf{P}(\gamma = n) = \frac{\beta - \lambda}{\beta} \cdot \frac{\lambda(1-\beta)^{n-1}}{(1-\lambda)^n}, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{9.8}$$

a

$$\mathbf{P}(\gamma > n) = \frac{\lambda}{\beta} \cdot \frac{(1-\beta)^n}{(1-\lambda)^n}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{9.9}$$

Tím je problém obsluhy daného singulárního proudu v podstatě rozřešen.

Uvažujme nyní posloupnost jednoduchých singulárních proudů $\{x^{(r)}(t)\}_{r=0}^{\infty}$ tvořící posloupnost B-aproximací jednoduchého finitního regulárního proudu $x(t)$. Nechť platí

$$\lim_{r\to\infty} 2^r \,.\, \lambda^{(r)} = \bar{\lambda}\,, \tag{9.10}$$

kde $\bar{\lambda}$ je parametr proudu $x(t)$ a $\lambda^{(r)}$ parametr proudu $x^{(r)}(t)$. Nechť zároveň veličina β z (9.1) konverguje k nule, a to tak, že

$$\lim_{r\to\infty} 2^r \,.\, \beta^{(r)} = \bar{\beta}, \quad \bar{\lambda} \,.\, \bar{\beta}^{-1} = \alpha\,, \quad 0 < \alpha < 1\,. \tag{9.11}$$

Pro pravděpodobnost $\mathbf{P}(\gamma > t)$ toho, že čekací doba při obsluze regulárního proudu $x(t)$ bude větší než t (za předpokladu stejné čekací disciplíny ve frontě a exponenciálního zákona rozložení délky obsluhy, k němuž (9.1) konverguje) dostaneme

$$\mathbf{P}(\gamma > t) = \lim \frac{\lambda^{(r)}}{\beta^{(r)}} \cdot \left(\frac{1-\beta^{(r)}}{1-\lambda^{(r)}}\right)^{[2^r t]}; \tag{9.12}$$

tedy

$$\mathbf{P}(\gamma > t) = \alpha \,.\, \mathrm{e}^{-(\bar{\beta}-\bar{\lambda})t} \tag{9.13}$$

a speciálně

$$\mathbf{P}(\gamma > 0) = \alpha\,, \tag{9.14}$$

což je pravděpodobnost čekání vůbec. Uvedené vzorce (9.13) a (9.14) se shodují se vzorci odvozenými pro regulární proud $x(t)$ přímo (viz [5], § 34 a 35).

II. *Zákazníci, kteří nemohou být ihned obslouženi, jsou odmítáni a odpadají z obsluhy.*

Proměnné η_n nabývají tu pouze hodnot 0 a 1, matice $\boldsymbol{P}$ má tvar

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1-\lambda & \lambda \\ \beta(1-\lambda) & \beta\lambda + (1-\beta) \end{pmatrix}$$

(zde již nemusí být $\lambda < \beta$), takže rovnice pro P_k má tvar

$$P_0 = P_0(1-\lambda) + P_1 \,.\, \beta(1-\lambda)\,; \tag{9.15}$$

odtud

$$P_0 = \frac{\beta - \beta\lambda}{\beta + \lambda - \beta\lambda}, \quad P_1 = \frac{\lambda}{\beta + \lambda - \beta\lambda}, \tag{9.16}$$

P_1 je pravděpodobnost odmítnutí. Provedeme-li limitní přechod ve stejném smyslu jako v odstavci I, dostaneme

$$\lim P_0 = \frac{1}{1 + \alpha}, \quad \lim P_1 = \frac{\alpha}{1 + \alpha} \tag{9.17}$$

ve shodě s výsledky v [5], § 20, str. 67.

III. Nakonec uvažujme ještě případ t. zv. smíšeného systému:

Je-li jeden zákazník obsluhován, může ještě jeden další čekat, ostatní jsou odmítáni a odpadají.

Pro matici $\boldsymbol{P}$ (tentokráte třířádkovou, neboť η_n nabývají hodnot 0,1 a 2), máme

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1 - \lambda & \lambda & 0 \\ \beta(1 - \lambda) & \beta\lambda + (1 - \beta)(1 - \lambda) & (1 - \beta)\lambda \\ 0 & \beta(1 - \lambda) & \beta\lambda + (1 - \beta) \end{pmatrix},$$

takže rovnice pro P_k jsou

$$\begin{aligned} P_0 &= P_0(1 - \lambda) + P_1(\beta - \beta\lambda), \\ P_1 &= P_0\lambda + P_1(1 - \lambda - \beta + 2\beta\lambda) + P_2(\beta - \beta\lambda), \\ P_2 &= P_1(\lambda - \beta\lambda) + P_2(1 - \beta + \beta\lambda). \end{aligned} \tag{9.18}$$

Odtud pak dostaneme opět stejnými obraty výrazy pro P_k, které po obvyklém limitním přechodu dávají

$$\lim P_k = \frac{\alpha^k}{1 + \alpha + \alpha^2}, \quad k = 0, 1, 2; \quad 0 < \alpha < \infty, \tag{9.19}$$

což se shoduje s výsledky (4) a (5) práce [9]. Rozložení čekací doby je v tomto jednoduchém případě ovšem triviální: zákazník je obsloužen bez čekání s pravděpodobností P_0, musí čekat s pravděpodobností P_1, v tom případě má pak γ exponenciální rozložení jako přímou limitu Pascalova rozložení (9.1).

LITERATURA

[1] *W. Feller*: An introduction to probability theory and its applications I., New York 1950.

[2] *W. Feller*: Fluctuation theory of recurrent events; TAMS *67* (1949), 98—119.

[3] *M. Fisz*: Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna; Warszawa 1954.

[4] *M. Fisz*: Realizations of some stochastic processes; Studia Mathematica *15* (1956), 359—364.

[5] *А. Я. Хинчин*: Математические методы теории массового обслуживания; Труды Матем. Института им. В. А. Стеклова *49*, Москва 1955.

[6] *А. Я. Хинчин:* Потоки случайных событий без последействия; Теория вероятностей *1* (1956), 3—18.

[7] *И. П. Натансон:* Теория функций вещественной переменной; Москва-Ленинград, 1950.

[8] *F. Zítek:* Заметка к одной теореме Королюка; Чехосл. Мат. Журнал *7* (*82*), 1957, 318—319.

[9] *F. Zítek*: Příspěvek k theorii smíšených systémů hromadné obsluhy; Aplikace matematiky *2* (1957), 154—159.

Резюме

СИНГУЛЯРНЫЕ ВХОДЯЩИЕ ПОТОКИ

ФРАНТИШЕК ЗИТЭК (František Zítek), Прага

(Поступило в редакцию 27/X 1956 г.)

После первого параграфа послужившего в качестве введения (большинство определений и обозначений принято из [5] и [6]), изучаются в первой части работы (§§ 2—6) сингулярные входящие потоки вызовов (см. [6]), следуя при этом вообще исследованиям главы 1 монографии [5].

Во второй части (§§ 7—9) введено понятие сингулярных аппроксимаций регулярных потоков. Если $x(t)$ — финитный регулярный поток, то последовательность $\{x^{(r)}(t)\}_{r=0}^{\infty}$ сингулярных потоков, определенных равенством (7.1), называется последовательностью p-аппроксимаций потока $x(t)$. Изучаются некоторые свойства p-аппроксимаций, и после этого переходится в параграфе 8 к исследованию B-аппроксимаций, называя так элементы последовательностей сингулярных потоков, сходящихся к $x(t)$ в смысле Бернулли.

В последнем параграфе использованы установленные результаты в случае одного простого примера из теории обслуживания. Методом аппроксимаций получаются результаты, совпадающие с результатами, полученными прямым методом для непрерывного случая (см. [5] и [9]).

Résumé

COURANTS D'ENTRÉE SINGULIERS

FRANTIŠEK ZÍTEK, Praha

(Reçu le 27 octobre 1956)

Après le premier paragraphe qui sert d'introduction (la plupart des définitions et notations sont celles des travaux [5] et [6]), on étudie, dans la première partie du présent travail (§§ 2—6), les courants d'entrée singuliers (voir [6]) en suivant à peu près parallèlement le développement du chapitre 1 de [5].

Dans la seconde partie (§§ 7—9) on introduit la notion d'approximations singulières de courants réguliers. Un courant régulier $x(t)$ étant donné, la suite $\{x^{(r)}(t)\}_{r=0}^{\infty}$ de courants singuliers définis par (7.1) est appelée suite d'approximations-p du courant $x(t)$. Après avoir établi quelques propriétés des approximations-p, on passe, au paragraphe 8, à l'étude des approximations-B, en appelant ainsi les éléments de toute suite de courants singuliers convergeant vers $x(t)$ au sens de Bernoulli.

Au dernier paragraphe les résultats établis sont, à titre d'illustration, employés dans le cas d'un exemple simple de problèmes d'attente. En procédant par la méthode d'approximation on arrive à des résultats conformes à ceux obtenus directement pour le cas continu (voir [5] et [9]).