Karel Karták
K theorii vícerozměrného integrálu

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 80 (1955), No. 4, 400--414

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/108231

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 80 (1955)

K THEORII VÍCEROZMĚRNÉHO INTEGRÁLU

KAREL KARTÁK, Praha.

(Došlo dne 8. července 1954.) DT: 517.397

Článek vznikl z autorovy diplomové práce, kterou vedl J. Mařík. Hlavním výsledkem je zobecnění na vícerozměrný případ této známé věty z theorie Perronova integrálu: *Má-li f Perronův integrál v $\langle a, t\rangle$ pro každé $t \in \langle a, b)$ a existuje-li konečná limita* $\lim_{t \to b-} \int_a^t f(x)\, dx = A$, *pak existuje také* $\int_a^b f(x)\, dx$ *a rovná se A.*

I. Vícerozměrné nevlastní integrály

1. Základní definice a označení. Budeme se převážně zabývat vícerozměrným Perronovým integrálem, definovaným v článku [1] J. Maříkem. (Tam je definován dokonce Perron-Stieltjesův integrál). Připomeňme si stručně jeho definici.

Intervalem I v m-rozměrném eukleidovském prostoru E_m nazveme kartézský součin m uzavřených nezvrhlých (t. j. obsahujících více než jeden bod) intervalů z E_1. Je-li $I = i_1 \times i_2 \times \ldots \times i_m$, kde $i_k = \langle a_k, b_k\rangle$, $a_k < b_k$, $k = 1, 2, \ldots, m$, budeme psát $I = \langle a_1, b_1; a_2, b_2; \ldots; a_m, b_m\rangle$. Objemem intervalu I nazveme číslo $|I| = \prod_{k=1}^{m} (b_k - a_k)$. Řekneme, že posloupnost intervalů $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje k bodu $x \in E_m$, jestliže $x \in I_n$ pro $n = 1, 2, \ldots$ a $\lim_{n\to\infty} d(I_n) = 0$; $d(A)$ znamená pro $A \subset E_m$ průměr množiny A. Jako obvykle značí $O(A, \varepsilon)$, kde $\varepsilon > 0$, ε-okolí množiny A v E_m, $\bar{A}$ její uzávěr a Int A množinu všech jejích vnitřních bodů. Řekneme, že se intervaly I_1, I_2 nepřekrývají, jestliže platí Int $(I_1 \cap I_2) = \emptyset$.

Buď K m-rozměrný interval. Řekneme, že F je funkce intervalu v K, jestliže F je zobrazení množiny všech intervalů $I \subset K$ do množiny reálných čísel. Řekneme, že F je superaditivní v K, jestliže platí $F(I_1 + I_2) \geqq F(I_1) + F(I_2)$, kdykoli se intervaly I_1, I_2 nepřekrývají, $I_1 + I_2$ je interval v K a součet na pravé straně má smysl (t. j. nemá tvar $\infty - \infty$ nebo $-\infty + \infty$). Pro znaménko $\leqq$ resp. $=$ dostáváme definici subaditivní resp. aditivní funkce intervalu.

Buď F funkce intervalu v K. Řekneme, že F je slabě spojitá v bodě $x \in K$, jestliže $F(I_n) \to 0$, kdykoli $I_n \to x, I_n \subset K$. Je-li F slabě spojitá v každém bodě $x \in K$, řekneme, že je slabě spojitá v K.

Horní derivací funkce intervalu F v bodě $x \in K$ nazveme supremum množiny všech limit tvaru

$$\lim \frac{F(I_n)}{|I_n|} \text{ pro } I_n \to x,\ I_n \subset K\,;$$

označení $\overline{F}(x, K)$ nebo krátce $\overline{F}(x)$. Podobně dolní derivací funkce F v bodě $x \in K$ nazveme číslo

$$\underline{F}(x) = \inf_{\{I_n\}} \left(\lim_{\substack{I_n \to x \\ I_n \subset K}} \frac{F(I_n)}{|I_n|} \right);$$

lehce se zjistí souvislost s jednorozměrným případem.

Buď f bodová funkce v K. Řekneme, že funkce intervalu M je majorantou funkce f v K, jestliže

(1) M je superaditivní v K,

(2) $-\infty \neq \underline{M}(x) \geqq f(x)$ pro každý bod $x \in K$.

Řekneme, že m je minorantou f v K, když $-m$ je majorantou funkce $-f$ v K.

Přejděme k *definici Perronova integrálu*. Buď f bodová funkce v intervalu K. Horním Perronovým integrálem funkce f v intervalu K nazveme infimum množiny $\{M(K)\}$, kde M je majoranta f v K; označení $\overline{\int_K} f(x)\,\mathrm{d}x$. Dolním Perronovým integrálem funkce f v K nazveme supremum množiny $\{m(K)\}$, kde m je minoranta f v K; označení $\underline{\int_K} f(x)\,\mathrm{d}x$. Z podmínek (1), (2) pro majorantu plyne $\overline{\int_K} f(x)\,\mathrm{d}x \geqq \underline{\int_K} f(x)\,\mathrm{d}x$ (důkaz viz [1], část II, 43). Jestliže platí $\overline{\int_K} f = \underline{\int_K} f$ a je to konečné číslo, nazveme je Perronovým integrálem funkce f v intervalu K a označíme $\int_K f(x)\,\mathrm{d}x$.

V dalším budou také zmínky o *Riemannově* a *Lebesgueově vícerozměrném integrálu*; jejich definice jest dobře známa. Pro krátkost budeme dále místo Perronův integrál psát P-integrál; podobně L-integrál, R-integrál a dále definované integrály.

2. Některé výsledky z theorie P-integrálu.

(2.1) *Má-li f P-integrál v K, má také P-integrál v I, kdykoli je interval $I \subset K$.*
Důkaz: [1], část II, 51.

(2.2) *P-integrál je aditivní funkce intervalu.*
Důkaz: [1], část II, 52.

(2.3) Fubiniho věta. *Má-li funkce $f(x, y)$ P-integrál v intervalu $K = \langle a, b; c, d\rangle$, platí*

$$\int_K f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^b \Big(\overline{\int_c^d} f(x, y)\,\mathrm{d}y\Big)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \Big(\underline{\int_c^d} f(x, y)\,\mathrm{d}y\Big)\,\mathrm{d}x\,.$$

Důkaz: [1], část II, 77.

(2.4) *Nechť f má P-integrál v intervalu K. Pro $I \subset K$ položme* $P(I) = \int_I f(x)\,\mathrm{d}x$. *Pak P je slabě spojitá v K.*

Důkaz: [1], část II, 81.

(2.5) *Má-li f P-integrál v $\langle a, t\rangle$ pro každé $t \in \langle a, b\rangle$ a existuje-li konečná limita* $\lim\limits_{t \to b-} \int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x = A$, *pak existuje také* $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ *a platí* $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = A$.

Důkaz: [1], část II, 90.

(2.6) (a) *Buď f bodová funkce v intervalu K. Existuje-li R-integrál z f v K, pak existuje také P-integrál z f v K a rovná se R-integrálu.*

(b) *Označme $P_A(K)$ resp. $L(K)$ množinu všech perronovsky absolutně resp. lebesgueovsky integrovatelných funkcí v K. Pak platí $P_A(K) = L(K)$.*

(c) *Buď $K = \langle a, b\rangle$; nechť f má v K nevlastní R-integrál resp. nevlastní L-integrál. Pak má také P-integrál.*

Důkaz: (a) [1], část II, 60. (b) [1], část III, 11. (c) plyne z (a) resp. (b) a (2.5).

Poznámka. V dalším se budeme zabývat jen dvojrozměrným případem.

3. Nevlastní dvojrozměrné integrály. Všimněme si nejprve nevlastního R-integrálu. Ten se obvykle definuje ne právě exaktně, ale smysl těchto definicí je následující (uvažujeme případ jediného „singulárního" bodu).

(3.1) Buď K interval, bod $z \in K$. Buď D omezená oblast, jejíž hranicí je jednoduchá uzavřená křivka konečné délky; nechť $z \in D$. Jestliže existuje vlastní limita

$$\lim_{d(D) \to 0} (R) \iint_{K-D} f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = A\,,$$

řekneme, že existuje nevlastní R-integrál funkce f v K a rovná se A.

Poznámka. Je-li f definována v intervalu K a je-li množina A částí K, definujeme jako obvykle

$$\int_A f(x)\,\mathrm{d}x = \int_K f(x)\,.\,\chi_A(x)\,\mathrm{d}x\,,$$

kde χ_A značí charakteristickou funkci množiny A. Zřejmě nezáleží na tom, do kterého intervalu množinu A vnoříme. Neexistuje-li integrál napravo, řekneme, že integrál z f přes množinu A neexistuje.

Definice se obdobně rozšiřuje i pro případ konečně mnoha singulárních bodů. Lze však ukázat, že takto definovaný integrál nepřekračuje třídu L-integrálu; to plyne z této věty:

(3.2) *Funkce f má nevlastní R-integrál (ve smyslu definice* (3.1)), *právě když $|f|$ má nevlastní R-integrál.* (Viz na příklad knihu *K. Petr*: Počet integrální (1931), odstavec 307.)

Od této chvíle klademe $K = \langle 0, 1; 0, 1 \rangle$; to není na újmu obecnosti.

(3.3) Buď v K definována funkce f; nechť pro $0 \leqq x < 1$, $0 \leqq y < 1$ $I(x, y)$ značí interval $\langle x, 1; y, 1 \rangle$. Nechť existuje R-integrál z funkce f v $K - I(x, y)$; označme

$$\Phi(x, y) = \iint_{K - I(x,y)} f(x, y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y .$$

Jestliže existuje vlastní limita

$$\lim_{[x,y] \to [1,1]} \Phi(x, y) = A , \quad 0 \leqq x < 1 , \quad 0 \leqq y < 1 ,$$

pak řekneme, že existuje nevlastní R-integrál funkce f v K a rovná se A.

Takto definovaný integrál označme R^{**}. Podobně definujme L^{**}-integrál a P^{**}-integrál. Nemusili jsme se samozřejmě omezovat na případ, kdy bod z leží ve vrcholu K, ale tato definice je stejně jen pomocná.

Poznámka. (3.3) odpovídá tomu případu ve (3.1), kdy oblasti D jsou otevřené intervaly. Měli bychom důsledněji označit

$$\Phi(x, y) = \iint_{\overline{K - I(x,y)}} f(x, y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y ,$$

neboť množina $K - D$ je uzavřená; ale hodnota integrálu je v obou případech stejná. Této poznámky dále častěji použijeme.

Zřejmě platí $R^{**} \supset R$, $L^{**} \supset L$, $L^{**} \supset R^{**}$ (t. j. má-li funkce f R-integrál v K, má také R^{**}-integrál v K a jejich hodnoty jsou stejné; atd.). Ukažme teď, že neplatí $R^{**} \subset L$.

(3.4) *Na intervalu K existuje funkce f tak, že platí $(R^{**}) \int_K f = 0$ a že neexistuje konečný integrál z f přes Δ, kde $\Delta = \underset{x,y]}{\mathcal{E}} ([x, y] \in K, x \geqq y)$.*

Důkaz (*J. Mařík*): Buď $a_1, a_2, \ldots$ rostoucí posloupnost kladných čísel, která má limitu 1; buď dále $b_1, b_2, \ldots$ posloupnost kladných čísel, která má limitu 0 a která tvoří divergentní řadu. Položme ještě $a_0 = 0$; nechť

$$K_n = \langle a_{n-1}, a_n; a_{n-1}, a_n \rangle , \quad \Delta_n = \underset{[x,y]}{\mathcal{E}} [a_{n-1} \leqq y \leqq x \leqq a_n] .$$

Je tedy $\Delta_n \subset K_n$ pro $n = 1, 2, \ldots$ Utvořme v každém intervalu K_n funkci f_n o těchto vlastnostech:

(1) f_n je spojitá v K_n a na hranici K_n má nulové hodnoty;

(2) $f_n(x, y) = - f_n(y, x)$ pro každý bod $[x, y] \in K_n$;

(3) $f_n(x, y) \geqq 0$ pro $[x, y] \in \Delta_n$;

(4) $\int_{\Delta_n} f_n = b_n$.

(Snadno se zjistí, že takové funkce f_n existují.)

Definujme nyní v K funkci f takto: Je-li $[x, y] \in K_n$, buď $f(x, y) = f_n(x, y)$. (Patří-li bod $[x, y]$ do $K_m \cap K_n$, kde $m \neq n$, je zřejmě $|m - n| = 1$, $f_n(x, y) =$

$= f_m(x, y) = 0$.) Nepatří-li $[x, y]$ do žádného z intervalů K_n, buď $f(x, y) = 0$. Snadno se zjistí, že funkce f je s výjimkou bodu $[1, 1]$ spojitá všude v K.

Dokážeme, že $\lim \Phi(x, y)$[1]) pro $[x, y] \in K$, $[x, y] \to [1, 1]$, $x < 1$, $y < 1$ existuje a rovná se nule.

Zvolme tedy kladná čísla x, y menší než 1; buď na př. $y \leqq x$. Je-li $y = x$, je z důvodu symetrie $\Phi(x, y) = 0$. Buď nyní $y < x$; označme $I_1 = \langle x, 1; y, x \rangle$. Platí $\Phi(x, y) + \int_{I_1} f = \Phi(x, x) = 0$, tedy $\Phi(x, y) = -\int_{I_1} f$. Buď $a_{n-1} < x \leqq a_n$. Interval I_1 zřejmě nemá společné body s intervaly $K_1, K_2, \ldots, K_{n-1}$ (v těch jsou první souřadnice nejvýš rovné $a_{n-1} < x$) ani s vnitřky intervalů K_{n+1}, $K_{n+2}, \ldots$ (v těch jsou druhé souřadnice větší než $a_n \geqq x$). Interval I_1 je částí Δ; na I_1 je tedy $f \geqq 0$. Na $I_1 - K_n$ je však $f = 0$; je proto $0 \leqq \int_{I_1} f = \int_{I_1 K_n} f \leqq \int_{\Delta_n} f = b_n$, takže $0 \leqq |\Phi(x, y)| \leqq b_n$. Odtud plyne ihned, že $\lim \Phi(x, y) = 0$. Existuje tedy R^{**}-integrál $\int_K f$ a rovná se nule. Lebesgueův integrál $\int_K f$ však neexistuje, protože $\int_\Delta f = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\Delta_n} f_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \infty$.

Poznámka. Definujme v K funkci intervalu P předpisem $P(I) = \int_I f$ (rozumí se R^{**}-integrál). Obsahuje-li I bod $[1, 1]$, je $P(I) = \int_K f - \int_{K-I} f = -\Phi(x, y)$, kde $I = \langle x, 1; y, 1 \rangle$. Je-li $a_{n-1} < \max(x, y) \leqq a_n$, je $|P(I)| = |\Phi(x, y)| \leqq b_n$; přitom je však plošná velikost intervalu I aspoň $(1 - a_n)^2$. Volíme-li na př. $b_n = \frac{1}{n}$, $a_n = 1 - \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$, je pro takový interval I poměr mezi $P(I)$ a plošnou velikostí intervalu I v prosté hodnotě nejvýš $\frac{b_n}{(1 - a_n)^2} = \frac{1}{n} \cdot \sqrt[3]{n^2} = \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$; derivace funkce P v bodě $[1, 1]$ je potom rovna nule. Vidíme, že takto sestrojená funkce f má v K dokonce Newtonův integrál (viz [1], část II, 56).

4. P^{**}-integrál. V tomto odstavci dokážeme, že P-integrál je, podobně jako v jednorozměrném případě, zobecněním L^{**}-integrálu. Dokážeme totiž, že $P^{**} = P$.

(4.1) *Nechť existuje P-integrál z funkce f v intervalu K. Pak existuje také P^{**}-integrál z f v K a rovná se P-integrálu.*

Důkaz: Plyne ze slabé spojitosti P-integrálu; viz (2.4).

(4.2) *Nechť existuje P^{**}-integrál z funkce f v intervalu K a rovná se A. Pak existuje také P-integrál z f v K a rovná se A.*

Důkaz. Sestrojme tuto posloupnost čtverců: Rozdělme K na čtyři shodné čtverce a označme K_1, K_2, K_3 ty z nich, které neobsahují bod $[1, 1]$. Ve zbylém

[1]) Viz (3.3).

čtverci — označme ho L_1 — proveďme tuto operaci znova; dostaneme čtverce K_4, K_5, K_6; interval L_n rozdělíme podobně na intervaly $K_{3n+1}, K_{3n+2}, K_{3n+3}, L_{n+1}$, při čemž L_{n+1} obsahuje bod [1, 1]. Je tedy $L_n = \langle 1 - 2^{-n}, 1; 1 - 2^{-n}, 1\rangle$. Položme ještě $K = L_0$.

Zvolme nyní libovolně $\varepsilon > 0$. Protože existují integrály $\int_{K_n} f$, $n = 1, 2, \ldots$, existují majoranty $M_1, M_2, \ldots$ v $K_1, K_2, \ldots$ tak, že platí

$$(\alpha) \qquad M_n(K_n) < \int_{K_n} f + \frac{\varepsilon}{2^n} \quad (n = 1, 2, \ldots)\,.$$

Každou funkci M_n rozšiřme na celý interval K tak, že položíme $M_n(I) = M_n(IK_n)$ resp. $M_n(I) = 0$ podle toho, je-li IK_n interval (nedegenerovaný) či nikoli. Funkce M_n jsou podle [1], část II, 22 superaditivní v K.

Zkoumejme nyní řadu

$$(\beta) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} [M_{3n-2}(K) + M_{3n-1}(K) + M_{3n}(K)]\,.$$

Je $\int_{K_n} f \leqq M_n(K_n) = M_n(K) < \int_{K_n} f + \frac{\varepsilon}{2^n}$, tedy

$$\int_{L_{n-1}-L_n} f = \int_{K_{3n-2}} f + \int_{K_{3n-1}} f + \int_{K_{3n}} f \leqq M_{3n-2}(K) + M_{3n-1}(K) + M_{3n}(K) <$$

$$< \int_{L_{n-1}-L_n} f + \varepsilon \left(\frac{1}{2^{3n-2}} + \frac{1}{2^{3n-1}} + \frac{1}{2^{3n}}\right).$$

Je však $\sum_{n=1}^{N} \int_{L_{n-1}-L_n} f = \int_{L_0-L_N} f = \int_{K-L_N} f$, jak se snadno zjistí indukcí; odtud plyne, že řada (β) konverguje a její součet leží v intervalu $\langle A, A + \varepsilon)$.

Zvolme nyní libovolný interval $I \subset K$ a utvořme řadu

$$(\gamma) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} [M_{3n-2}(I) + M_{3n-1}(I) + M_{3n}(I)]\,.$$

Rozeznávejme dva případy:

(1) [1, 1] nepatří do I. Potom pro velká n je $I \cap L_{n-1} = \emptyset$, tedy $I \cap K_{3n-2} = I \cap K_{3n-1} = \ldots = \emptyset$, $M_{3n-2}(I) = M_{3n-1}(I) = \ldots = 0$, takže řada ($\gamma$) má jen konečný počet nenulových členů a je proto konvergentní.

(2) [1, 1] patří do I. Potom pro velká n je $L_{n-1} \subset I$, tedy $M_{3n-2}(I) = M_{3n-2}(I \cap K_{3n-2}) = M_{3n-2}(K_{3n-2}) = M_{3n-2}(K)$ atd. Řada (γ) se tedy až na konečný počet členů shoduje s řadou (β), takže je rovněž konvergentní.

Řada (γ) tedy definuje pro každý interval $I \subset K$ jisté číslo; označme je $\tilde{M}(I)$. Tím je definována v K funkce intervalu $\tilde{M}$, která je zřejmě superaditivní; zjistili jsme, že $A \leqq \tilde{M}(K) < A + \varepsilon$.

Definujme ještě v K funkci intervalu D tímto předpisem: Je $D(I) = 1$ resp. $D(I) = 0$ podle toho, obsahuje-li interval I bod $[1, 1]$ či ne. Funkce D je zřejmě aditivní, takže funkce

$$M = \tilde{M} + 5\varepsilon D$$

je superaditivní.

Dokážeme, že M je majorantou funkce f. Máme tedy dokázat, že platí $\underline{M}(x, y) \geqq f(x, y)$, $\underline{M}(x, y) \neq -\infty$ pro každý bod $[x, y] \in K$.

Buď napřed $[x, y] \neq [1, 1]$. Pak existují nejvýš čtyři indexy i tak, že $[x, y] \in K_i$. Lehce se zjistí (viz [1], část II, 29), že $\underline{M}(x, y, K) = \min\limits_i M_i(x, y, K_i)$, kde i probíhá uvedené indexy; je tedy $\underline{M}(x, y) \geqq f(x, y)$. Zřejmě je také $\underline{M}(x, y) \neq -\infty$.

Dokážeme ještě, že je $\underline{M}(1, 1) = +\infty$. Protože funkce $\Phi(x, y)$[2]) má v bodě $[1, 1]$ limitu A, existuje $\delta > 0$ tak, že pro každý interval $I(x, y)$,[2]) kde $1 - \delta < x < 1$, $1 - \delta < y < 1$, je

$$\Big| \int_{K - I(x,y)} f - A \Big| < \varepsilon . \tag{*}$$

Je-li nyní $1 - \delta < x_1 < x_2 < 1$, $1 - \delta < y_1 < y_2 < 1$, $B = I(x_1, y_1) - I(x_2, y_2)$, je zřejmě

$$\Big|\int_B f\Big| = \Big| \int_{K - I(x_2,y_2)} f - \int_{K - I(x_1,y_1)} f \Big| < 2\varepsilon . \tag{**}$$

Zvolme takový interval $I(x, y)$, aby platilo $1 - \delta < x < 1$, $1 - \delta < y < 1$. K němu zvolme přirozené n tak velké, aby bylo $x < 1 - 2^{-n}$, $y < 1 - 2^{-n}$. Rozdělme interval $I(x, y)$ zřejmým způsobem na intervaly I_1, I_2, I_3, L_n. Je $\tilde{M}(I(x, y)) \geqq \tilde{M}(L_n) + \sum\limits_{i=1}^{3} \tilde{M}(I_i)$. Z (β), (γ) plyne, že $\tilde{M}(L_n) = \tilde{M}(K) - \sum\limits_{i=1}^{3n} \tilde{M}(K_i)$, je tedy $\tilde{M}(L_n) \geqq \tilde{M}(K) - \sum\limits_{i=1}^{3n} \left[\int\limits_{K_i} f + \frac{\varepsilon}{2^i} \right] > \tilde{M}(K) - \int\limits_{K - L_n} f - \varepsilon >$[3]) $\tilde{M}(K) - A - \varepsilon - \varepsilon \geqq -2\varepsilon$. Dále je $\tilde{M}(I_i) \geqq \int\limits_{I_i} f$, $i = 1, 2, 3$, tedy $\sum\limits_{i=1}^{3} \tilde{M}(I_i) \geqq \int\limits_{I(x,y)-L_n} f >$[4]) -2ε. Je tudíž $\tilde{M}(I(x, y)) > -4\varepsilon$, $M(I(x, y)) > \varepsilon$. Odtud plyne ihned $\underline{M}(1, 1) = \infty$. Je proto $\overline{\int\limits_K} f \leqq M(K) < A + 6\varepsilon$, $\overline{\int\limits_K} f \leqq A$. Ze stejného důvodu je $\overline{\int\limits_K}(-f) \leqq -A$, $\underline{\int\limits_K} f \geqq A$, tedy $\int\limits_K f = A$. Tím je věta dokázána.

Poznámka. Z předešlého výsledku plyne, že funkce z (3.4) má P-integrál. Tento příklad zároveň ukazuje, že i pro dva rozměry je P-integrál obecnější než L-integrál. Existence funkce z (3.4) je konstatována v článku [2]. — Poznamenejme ještě, že jiný příklad funkce mající P-integrál a nemající L-integrál

[2]) Viz (3.3).

[3]) Viz (*).

[4]) Viz (**).

lze sestrojit takto: Buď g funkce v $\langle 0, 1\rangle$, mající neabsolutně konvergentní P-integrál. Položme $f(x, y) = g(x)$ pro $[x, y] \in \langle 0, 1; 0, 1\rangle$. Lehce se zjistí, že f má pak neabsolutně konvergentní P-integrál (dokonce podle aditivních majorant a minorant); také zobecnění pro více rozměrů je zřejmé.

5. P^*-integrál. $P^* = P$. Podle (2.5) je jednorozměrný P-integrál spojitou funkcí svých mezí. Ukažme, že se tato vlastnost rozšiřuje na dvojrozměrný případ; nejprve podáme jinou definici nevlastních integrálů.

(5.1) Buď v K definována funkce f; nechť existuje P-integrál z funkce f v každém intervalu $\langle 0, x; 0, y\rangle$, kde $0 \leqq x \leqq 1$, $0 \leqq y \leqq 1$, $x + y < 2$. Označme

$$F(x, y) = \iint\limits_{\langle 0,x;0,y\rangle} f(x, y)\, dx\, dy\,, \quad [1, 1] \neq [x, y] \in K\,.$$

Jestliže existuje vlastní limita

$$\lim_{[x,y]\to[1,1]} F(x, y) = A\,, \quad \text{kde} \quad [x, y] \in K,\ [x, y] \neq [1, 1]\,,$$

pak řekneme, že existuje P^*-integrál z funkce f v K a rovná se A.

Poznámka. Podobně můžeme definovat i R^*-integrál, L^*-integrál.

(5.2) *Nechť existuje P^*-integrál z funkce f v intervalu K. Pak existuje také P-integrál z f v K a rovná se P^*-integrálu.*

Důkaz: Pro $0 \leqq x < 1$, $0 \leqq y < 1$ zřejmě platí

$$\Phi(x, y) = F(x, 1) + F(1, y) - F(x, y)\,,$$

kde Φ je definována ve (3.3). Tedy existuje také vlastní limita $\lim\limits_{[x,y]\to[1,1]} \Phi(x, y) = \lim F(x, y) = A$, kde $0 \leqq x < 1$, $0 \leqq y < 1$. Tvrzení plyne ze (4.2).

Tím je dokázáno, že platí $P^* \subset P$. Dokažme ještě obrácenou inklusi.

(5.3) *Nechť existuje P-integrál z funkce f v intervalu K a rovná se A. Pak existuje také P^*-integrál z f přes K a je rovný A.*

Nebo v ekvivalentní formě:

(5.4) *P-integrál je spojitá bodová funkce.*

Důkaz: Pro $0 \leqq x \leqq 1$ existuje tedy $\iint\limits_{\langle x,1;0,1\rangle} f = \Psi(x)$ a platí $\lim\limits_{x\to 1-} \Psi(x) = 0$. Podle (2.3) je totiž

$$\iint\limits_{\langle x,1;0,1\rangle} f = \int_x^1 \left(\int_0^1 f(x, y)\, dy\right) dx\,;$$

podle (2.5) je P-integrál spojitou funkcí svých mezí.

Je-li $0 \leqq x < 1$, použijeme odhadu

$$|F(x, y) - A| \leqq |F(x, y) - F(x, 1)| + |F(x, 1) - A| \leqq$$
$$\leqq \Big|\iint\limits_{\langle 0,1;y,1\rangle} f\Big| + \Big|\iint\limits_{\langle x,1;y,1\rangle} f\Big| + \Big|\iint\limits_{\langle x,1;0,1\rangle} f\Big|\,.$$

Je-li $x = 1$, pišme $|F(x, y) - A| = |\iint\limits_{\langle 0,1;y,1\rangle} f|$. Ze slabé spojitosti P-integrálu a předešlé poznámky plyne ihned, že $F(x, y) - A$ konverguje k nule pro $[x, y] \to [1, 1]$.

6. Nevlastní P-integrál. Následující otázka zůstala nevyjasněna: Buď $Q = \langle -1, 1; -1, 1\rangle$. Nechť existuje P-integrál z f přes $Q - I$, kdykoli I je interval, $[0, 0] \in \operatorname{Int} I$, a nechť existuje limita $\lim \int\limits_{Q-I} f = A$ pro $I \to [0, 0]$, $[0, 0] \in \operatorname{Int} I$. Má f P-integrál v Q?

V tomto odstavci ukážeme, že odpověď je kladná a že $\int\limits_Q f(x)\, dx = A$.

(6.1) Definice. Buď K interval, F funkce intervalu v K. Řekneme, že F je spojitá v K, jestliže $F(I_n) \to 0$, kdykoli $K \supset I_n$, $n = 1, 2, \ldots, |I_n| \to 0$.

Poznámka. Zřejmě každá spojitá funkce intervalu je slabě spojitá. Opak neplatí, jak se lehce zjistí.

Podle (2.4) je P-integrál slabě spojitá funkce intervalu. Teď můžeme dokázat více.

(6.2) *P-integrál je spojitá funkce intervalu.*

Důkaz: Stačí provést pro interval $K = \langle 0, 1; 0, 1\rangle$. Podle (2.2) je P-integrál aditivní funkce intervalu. Označme podle (5.2) $F(x, y) = \iint\limits_{\langle 0,x;0,y\rangle} f$, kde $0 \leqq x \leqq 1$, $0 \leqq y \leqq 1$. Pro $I = \langle x_1, x_2; y_1, y_2\rangle \subset K$ platí $P(I) = \int\limits_I f = F(x_2, y_2) - F(x_2, y_1) - F(x_1, y_2) + F(x_1, y_1)$. Podle (5.4) je F spojitá bodová funkce; protože K je kompaktní, je dokonce stejnoměrně spojitá na K. K danému $\varepsilon > 0$ existuje tedy $\delta > 0$ tak, že

$$([x_1, y_1] \in K, [x_2, y_2] \in K, (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 < \delta^2) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow |F(x_1, y_1) - F(x_2, y_2)| < \varepsilon .$$

Je-li $|I| < \delta^2$, je $\min(|x_2 - x_1|, |y_2 - y_1|) < \delta$. Je tedy $|P(I)| < 2\varepsilon$, kdykoli $|I| < \delta^2$.

(6.3) Věta. *Buď $Q = \langle -1, 1; -1, 1\rangle$ interval, f buď bodová funkce definovaná na Q. Nechť existuje P-integrál z f přes $Q - I$, kdykoli $[0, 0] \in \operatorname{Int} I$, kde I je interval, a nechť existuje limita*

$$\lim_{I \to [0,0]} \int\limits_{Q-I} f(x, y)\, dx\, dy = A \text{ pro } [0, 0] \in \operatorname{Int} I .$$

Pak existuje také P-integrál z f přes Q a rovná se A.

Důkaz: Položme $K = K_1 = \langle 0, 1; 0, 1\rangle$, $K_2 = \langle -1, 0; 0, 1\rangle$, $K_3 = \langle -1, 0; -1, 0\rangle$, $K_4 = \langle 0, 1; -1, 0\rangle$. Pro $l = 1, 2, 3, 4$ buď $f_l = f \cdot \chi_{K_l}$, kde χ_{K_i} je charakteristická funkce množiny K_l. Dokažme, že existují limity

$$\lim \int\limits_{Q-I} f_i, \quad I \to [0, 0], [0, 0] \in \operatorname{Int} I , \quad i = 1, 2, 3, 4 .$$

Stačí na př. dokázat, že existuje $\lim \int\limits_{K-I} f$ pro $I \to [0, 0]$, $I \subset K$. Položme pro krátkost $F(A) = \int\limits_A f$ pro $A \subset Q$. Podle předpokladu ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že

$$|F(Q - I_1) - F(Q - I_2)| < \varepsilon\,,$$

kdykoli $I_k \subset Q \cap O([0, 0], \delta)$, $[0, 0] \in \operatorname{Int} I_k$, $k = 1, 2$. Volíme-li speciálně $I_k = \langle a, b; c, y_k \rangle$, $k = 1, 2$, $y_1 < y_2$, dostáváme

$$|F(\langle a, b; y_1, y_2 \rangle)| < \varepsilon\,.$$

Ze spojitosti funkce F plyne, že $|F(\langle 0, b; y_1, y_2 \rangle)| \leqq \varepsilon$. Podobně zjistíme, že je $|F(\langle x_1, x_2; 0, d \rangle)| \leqq \varepsilon$, kdykoliv je $0 < x_1 < x_2 < \delta$, $0 < d < \delta$. Je tedy

$$|F(K - I_1) - F(K - I_2)| \leqq 2\varepsilon\,,$$

kdykoli $I_k \subset Q \cap O([0, 0], \delta)$, $[0, 0] \in \operatorname{Int} I_k$, $k = 1, 2$. Tedy je splněna nutná a postačující podmínka pro existenci limity $\lim \int\limits_{K-I} f$, takže existují limity $\lim \int\limits_{Q-I} f_i = A_i$, $I \to [0, 0]$, $[0, 0] \in \operatorname{Int} I$, $i = 1, 2, 3, 4$. Podle (4.2) platí $\int\limits_Q f_i = A_i$. Protože je zřejmě $A = \sum\limits_{i=1}^{4} A_i$, jest $\sum\limits_{i=1}^{4} \int\limits_Q f_i = \int\limits_Q f = A$. Tím je důkaz ukončen.

II. Některé aplikace a další problémy

7. O integrálu součinu funkcí. V mnoha případech je důležité vědět, zda je součin dvou integrovatelných funkcí také integrovatelná funkce; stačí připomenout počítání Fourierových koeficientů.

V jednorozměrném případě je v této otázce celkem jasno; poznamenejme, že má-li na příklad f P-integrál a φ je monotonní, existuje také integrál z $f\varphi$ a platí obvyklá druhá věta o střední hodnotě (důkaz: [1], část II, 93). Naproti tomu lze lehce konstruovat příklad, kdy f má nevlastní R-integrál, φ je spojitá (dokonce má derivaci), a integrál z $f\varphi$ diverguje. φ má pak ovšem nekonečnou variaci. (Viz [1], část II, cvičení 13.)

Ve vícerozměrném případě se v případě L-integrálu taková věc stát nemůže. Je však snadné udat spojitou funkci $\varphi(x, y)$ tak, že P-integrál z $f \,.\, \varphi$ přes K, kde f je funkce z (3.4), diverguje.

Nejdůležitější z tohoto okruhu otázek je asi ta, zda je možno použít vícerozměrného P-integrálu v theorii dvojných Fourierových řad. V theorii distribucí se vyskytují integrály $\int\limits_K f\varphi$, kde φ je nekonečně derivovatelná. V případě P-integrovatelné funkce f není známo, zda na př. integrály ze součinů $f(x, y)\,.$ $.\cos nx, \ldots$ konvergují.

Pro první účel by stačilo dokázat, že integrál ze součinu P-integrovatelné funkce $f(x, y)$ a funkce $\varphi(x)$ s variací konečnou konverguje. Není známo, zda tato věta platí. Ukážeme, že platí pro funkci f, mající nevlastní L-integrál. Dokážeme dokonce tuto obecnější větu:

(7.1.) *Nechť f má P-integrál v K a nechť φ je funkce s konečnou variací v $\langle 0, 1\rangle$. Nechť existuje P-integrál $\iint_I f(x, y)\, \varphi(x)\, dx\, dy$ pro každý interval I, který je částí K a neobsahuje bod $[1, 1]$. Pak existuje též P-integrál $\iint_K f(x, y)\, \varphi(x)\, dx\, dy$.*

Důkaz. Můžeme předpokládat, že φ je monotonní. Je-li $I = \langle x_1, x_2; y_1, y_2\rangle \subset K$, má podle Fubiniovy věty funkce $\psi(x) = \int_{y_1}^{y_2} f(x, y)\, dy$ a tedy též funkce $\varphi(x) \,.\, \psi(x)$ P-integrál v $\langle x_1, x_2\rangle$. Můžeme tedy v K definovat funkci intervalu N předpisem

$$N(I) = \int_{x_1}^{x_2} \varphi(x)\Big[\int_{y_1}^{y_2} f(x, y)\, dy\Big]\, dx\,.$$

Snadno se zjistí, že N je (konečná) aditivní funkce a že $N(I) = \int_I f(x, y)\, \varphi(x)$ pro každý interval $I \subset K$, který neobsahuje bod $[1, 1]$. Z aditivity funkce N plyne, že pro každý interval $I \subset K$, který obsahuje bod $[1, 1]$, platí

$$N(K) - N(I) = \int_{K-I} f(x, y)\, \varphi(x)\,. \tag{***}$$

Je-li $I = \langle x, 1; y, 1\rangle$, je podle 2. věty o střední hodnotě

$$N(I) = \varphi(x) \int_x^\xi\int_y^1 f + \varphi(1) \int_\xi^1\int_y^1 f\,.$$

Protože integrál funkce f je spojitou funkcí intervalu, je $N(I) \to 0$ pro $I \to$ $\to [1, 1]$. Ze vztahu (***) nyní plyne, že existuje P^{**}-integrál a tedy též P-integrál funkce $f(x, y)\, \varphi(x)$ v K. Tím je věta (7.1) dokázána.

Zavedeme ještě tuto **definici: (7.2)** *Buď f P-integrovatelná funkce v K. Řekneme, že bod $a \in K$ je L_f-singulární, jestliže neexistuje interval I takový, že $a \in \operatorname{Int} I$ a že na $I \cap K$ je f L-integrovatelná.*

Z věty (7.1) plyne, jak čtenář snadno dokáže, tato věta:

(7.3) *Buď f P-integrovatelná funkce v intervalu K. Buď φ funkce s variací konečnou na $\langle 0, 1\rangle$. Nechť je množina L-singulárních bodů funkce f konečná. Pak P-integrál z $f\varphi$ přes interval K existuje.*

8. O geometrickém významu P-integrálu. Příklad ve (3.4) ukazuje na „přílišnou obecnost“ vícerozměrného P-integrálu. Je totiž vidět, že otočíme-li graf funkce $f(x, y)$ tak, aby se přímka $y = x$ ztotožnila na př. s osou x, přestává funkce f být integrovatelná. Zatím co pro L-integrál jsou dokázány velmi obecné věty o substituci, pro P-integrál neplatí ani věta o tak speciální substituci, jakou je rotace.

V tomto odstavci ukážeme, že existují funkce, které mají neabsolutně konvergentní integrál invariantní vzhledem k isometrickým transformacím. Zřejmě stačí dokázat následující větu:

(8.1) *Na množině* $\underset{[x,y]}{\mathcal{E}}(x^2 + y^2 \leqq 1)$ *existuje funkce* f, *mající* P*-integrál invariantní vzhledem k transformaci* $x' = x \cos \varphi - y \sin \varphi$, $y' = x \sin \varphi + y \cos \varphi$, *nemající však* L*-integrál.*

Důkaz. Na intervalu $\langle 0, 1\rangle$ existuje funkce g, která je spojitá v $(0, 1\rangle$ a taková, že integrál $\int_0^1 x\, g(x)\, \mathrm{d}x$ je neabsolutně konvergentní. Označme $R = \underset{[x,y]}{\mathcal{E}}(x \geqq 0, y \geqq 0, x^2 + y^2 \leqq 1)$; pro $x^2 + y^2 \leqq 1$ buď $f(x, y) = g(\sqrt{x^2 + y^2})$. Dokažme, že existuje integrál $\iint_R f(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$. Podle (4.2) stačí dokázat, že existuje P^{**}-integrál z f přes R (zde je ovšem „singulárním" bodem bod $[0, 0]$). Buď $[a, b] \in R$, $a > 0$, $b > 0$, $I(a, b) = \langle 0, a; 0, b\rangle$. Jest

$$\iint_{R - I(a,b)} f(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \int_{(\mathrm{I})} \ldots + \int_{(\mathrm{II})} \ldots + \int_{(\mathrm{III})} \ldots ,$$

kde

$$(I) \;= \underset{[x,y]}{\mathcal{E}}([x, y] \in R,\ a^2 + b^2 \leqq x^2 + y^2 \leqq 1)\ ,$$

$$(II) \;= \underset{[x,y]}{\mathcal{E}}([x, y] \in R,\ 0 \leqq x \leqq a,\ b \leqq y \leqq \sqrt{a^2 + b^2 - x^2})\ ,$$

$$(III) = \underset{[x,y]}{\mathcal{E}}([x, y] \in R,\ a \leqq x \leqq \sqrt{a^2 + b^2 - y^2},\ 0 \leqq y \leqq b)\ .$$

V těchto integrálech je integrovaná funkce spojitá; lze tedy užít věty o substituci. Máme tak

$$\int_{(\mathrm{I})} \ldots = \int_{(\mathrm{I})} g(\sqrt{x^2 + y^2})\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Big(\int_{\sqrt{a^2+b^2}}^{1} r\, g(r)\, \mathrm{d}r \Big)\, \mathrm{d}\varphi =$$

$$= \tfrac{1}{2}\pi \int_{\sqrt{a^2+b^2}}^{1} r\, g(r)\, \mathrm{d}r\ .$$

Druhý integrál odhadneme takto: Z existence limity $\lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^1 x\, g(x)\, \mathrm{d}x$ plyne, že ke každému $\eta > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2 < \delta \Rightarrow |\int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} x\, g(x)\, \mathrm{d}x| < \eta$. Je-li tedy $0 < \sqrt{a^2 + b^2} < \delta$, je

$$\Big|\int_{(\mathrm{II})} \ldots\Big| = \Big| \int_{\operatorname{arctg}\frac{b}{a}}^{\frac{\pi}{2}} \Big(\int_{\frac{b}{\sin\varphi}}^{\sqrt{a^2+b^2}} r\, g(r)\, \mathrm{d}r \Big)\, \mathrm{d}\varphi \Big| < \tfrac{1}{2}\pi \,.\, \eta\ .$$

Pro $[a, b] \to [0, 0]$, $a > 0$, $b > 0$ se tedy tento integrál blíží nule; podobně se vyšetří i třetí integrál.

Tím je dokázáno, že platí $(P) \iint\limits_R f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\pi \int\limits_0^1 g(r)\, r\,\mathrm{d}r$. — Z podobných důvodů existují také integrály ve zbývajících čtvrtkružnicích; je zřejmé, že funkce f nemá L-integrál. Protože se rotací graf funkce f nemění, je věta dokázána.

Poznámka. Je přirozené položit si tuto otázku: Definovat P-integrál tak, aby integrovatelné funkce zůstaly integrovatelné i po substituci $\vec{X}' = \varphi(\vec{X})$, kde φ je isometrická transformace. Poznamenejme, že jeden možný způsob je definovat derivace majorant a minorant podle simplexů.

9. Další otázky. Z důkazu Fubiniho věty v [1] je vidět, proč bylo k definici P-integrálu třeba superaditivních a ne jen aditivních majorant.

(9.1) (*J. Mařík.*) *Existuje funkce dvou proměnných, mající P-integrál podle superaditivních majorant, nemající však P-integrál podle aditivních majorant?*

V (6.2) jsme dokázali, že P-integrál je spojitá funkce intervalu.

(9.2) *Nestačí k definici P-integrálu spojité majoranty a minoranty?*

Poznámka. V jednorozměrném případě tomu tak je ([3], str. 211).

(9.3) *Existuje funkce f v $K = \langle 0, 1;\ 0, 1\rangle$ taková, aby v tomto intervalu platilo*

$$(+) \qquad \int\limits_0^x \Big(\int\limits_0^y f(u, v)\,\mathrm{d}v\Big)\,\mathrm{d}u = \int\limits_0^y \Big(\int\limits_0^x f(u, v)\,\mathrm{d}u\Big)\,\mathrm{d}v = F(x, y)\,,$$

aby takto definovaná funkce F byla spojitá v K a aby neexistoval P-integrál z funkce f v intervalu K?

Tolstov sestrojil příklad spojité funkce F v intervalu K takové, že v každém bodě platí

$$\frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial y \partial x} = f(x, y) \neq \pm\infty$$

a že funkce f nemá L-integrál v žádném intervalu $I \subset K$ (viz [4]). Pro funkce F, f zřejmě platí vztah $(+)$. Lze tedy položit slabší otázku:

(9.4) *Nechť f má P-integrál na K. Existuje interval $I \subset K$ tak, že f má L-integrál na I?*

Nejtěžší z tohoto okruhu otázek je asi tato:

(9.5) *Charakterisovat P-integrál mezi všemi aditivními funkcemi intervalu.*

Poznámka. V jednorozměrném případě je to rozřešeno větou o ekvivalenci P-integrálu a t. zv. „úzkého" Denjoyova integrálu ([3], str. 211).

LITERATURA

[1] *J. Mařík*: Základy theorie integrálu v euklidových prostorech. Časopis pro pěstování matematiky, roč. *77* (1952), 1—51, 125—145, 267—301.

[2] *J. Mařík*: Конспект статьи „Основы теории интеграла в эвклидовых пространствах". Чехосл. мат. журнал, Т. *2* (77), 1952, 273—277.

[3] *S. Saks*: Théorie de l'intégrale. Warszawa 1933.

[4] *Г. П. Толстов:* О криволинейном и повторном интеграле. Труды М. И. им. В. А. Стеклова, XXXV, М—Л 1950.

Резюме

К ТЕОРИИ МНОГОМЕРНОГО ИНТЕГРАЛА

КАРЕЛ КАРТАК (Karel Karták), Прага.

(Поступило в редакцию 8. VII. 1954 г.)

Работа посвящается многомерному интегралу Перрона; автор исходит из определения, данного Я. Маржиком в работе [1] (супераддитивные мажоранты). Главным результатом первой части является следующая **теорема:**

Пусть Q — интервал, $a \in Q$, f — функция на Q. Пусть существует интеграл Перрона функции f, распространенный на $Q - I$, для всякого интервала I, где $a \in \operatorname{Int} I$, *и пусть существует предел* $\lim\limits_{I \to a} \int\limits_{Q-I} f(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = A$ *для* $a \in \operatorname{Int} I$. *Тогда существует и интеграл Перрона функции f, распространенный на Q, и равняется A.*

Во второй части показаны некоторые приложения этой теоремы (интеграл произведения; геометрическое значение интеграла Перрона); далее разбираются некоторые проблемы.

Zusammenfassung

ZUR THEORIE DES MEHRDIMENSIONALEN INTEGRALS

KAREL KARTÁK, Praha.

(Eingelangt am 8. Juli 1954.)

Diese Arbeit betrifft das mehrdimensionale Perronsche Integral, wie es in [1] von J. Mařík definiert wurde. Das Hauptresultat des ersten Teiles lautet:

Es sei Q ein Intervall ($Q \subset E_2$), $a \in Q$, f sei eine Funktion auf Q. Es existiere das

Perronsche Integral $\int\limits_{Q-I} f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ *für jedes Intervall* I, *das in seinem Innern den Punkt* a *enthält. Es soll weiter die Limit* $\lim\limits_{I\to a} \int\limits_{Q-I} f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = A$ (*wo* $a \in \operatorname{Int} I$) *existieren. Dann existiert auch das Perronsche Integral* $\int\limits_{Q} f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ *und ist gleich* A.

Im zweiten Teile werden einige Anwendungen dieses Satzes gezeigt (die Existenz des Perronschen Integrals aus dem Produkt zweier Funktionen und die geometrische Bedeutung des Perronschen Integrals in gewissen Spezialfällen). Zum Schluss sind einige Probleme gestellt.