Recense knih a článků

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 76 (1951), No. 4, 291--305

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/108421

RECENSE KNIH A ČLÁNKŮ

KNIHA O VEL'KEJ TRADÍCII SOVIETSKEJ TEÓRIE ČÍSEL

ŠT. SCHWARZ, Bratislava.

(Referát o knihe *Б. Н. Делоне:* Петербургская школа теории чисел.) [1])

Sovietski matematici vracajú sa vo svojich vedeckých prácach neustále ku klasikom ruskej matematiky a čerpajú pre svoju prácu z bohatých zdrojov domácej tradície. To sa javí napríklad vel'mi zretel'ne v edičnej činnosti Akadémie vied SSSR, ktorá v posledných rokoch opätovne vydala sobrané spisy *Čebyševa, Lobačevského, Kovalevskej, Žukovského, Markova, Krylova, Ljapunova, Čaplygina* a iných. Všetci títo klasici, ktorí znamenali súčasne vrchol vtedajšej svetovej vedy, sú i dnes živí a aktuálni. Rad dôležitých problémov, ktoré títo riešili, našiel v práci mladších sovietskych matematikov dôstojných následovníkov. Ohromný rozvoj sovietskej matematiky vzniklý po Vel'kej októbrovej socialistickej revolúcii, tak jasne vyznačený v dobre známej knihe Математика в СССР за тридцать лет 1917—1947,[2]) je predovšetkým dôsledkom starostlivosti s akou socialistický štát podporuje tvorčiu činnosť svojich vedeckých pracovníkov. Je však i dôsledkom zámerne pestovaného zdravého nadväzovania na vel'ké domáce tradície.

Jednou z kníh, ktorej účel je vo shode s práve uvedenými tendenciami, je kniha popredného sovietskeho číselného teoretika (pracujúceho v teórii algebraických čísel a v geometrii čísel) *B. N. Deloneho*, vyšlá v r. 1947 pod názvom Petrohradská škola teórie čísel.[3])

Ciel'om tejto knihy je oboznámiť širšie kruhy matematikov (menovite tých, ktorí nepracujú priamo v teórii čísel) so životom a prácou niekol'kých význačných predstavitel'ov ruskej teórie čísel a matematiky vôbec.

Kto sú tí čelní predstavitelia petrohradskej školy teórie čísel? Prvým z nich je vlastne Leonhard *Euler*, ktorý bol 30 rokov členom petrohradskej Akadémie vied, ktorý tu žil, pracoval a vytvoril tu mnohé zo svojich význačných diel. No, petrohradskou školou teórie čísel v užšom slova smysle nazýva autor školu symbolizovanú menami *Čebyšev, Korkin, Zolotarev, Markov, Voronoj* a ešte žijúceho akademika *Vinogradova*. Rozbor hlavných prác týchto matematikov tvorí vlastný obsah tejto knihy.

Autor sa hneď v úvode omlúva, že iba obmedzený rozsah knihy mu bráni pribrať rozbor prác dalších význačných vedcov, ktorí sa výsledkami svojej práce radia po bok spomínaným. Sú to napr. žiaci a pokračovatelia petrohradskej školy, *Delone*

[1]) *Б. Н. Делоне,* Петербургская школа теории чисел. (*B. N. Delone,* Petrohradská škola teórie čísel), Vydavatel'stvo Akadémie vied SSSR, Moskva-Leningrad 1947, str. 419, cena 20 r, tiráž 3000 exemplárov.

[2]) „Matematika v SSSR za (posledných) 30 rokov", ОГИЗ, Moskva-Leningrad, 1947, str. 1044, cena 51 r, tiráž 6000 exemplárov.

[3]) *B. N. Delone* (nar. 1891) bol od r. 1922—1935 profesorom petrohradskej univerzity. Je členom-korešpondentom Akadémie vied SSSR; teraz žije a pracuje v Moskve.

sám, *Venkov, Kuzmin, Tartakovskij, Linnik,* nedávno zosnulý kazaňský matematik *Čebotarev* a žiaci moskovskej školy *Chinčin, Šnirelman, Gel'fand.*

Treba vopred pripomenúť, že obsahom knihy sú iba číselne – teoretické práce menovaných matematikov a to ovšem tiež len hlavné práce. O ostatnej činnosti sa *Delone* nerozširuje. Jednak by to bola úloha nadmieru obtiažna, jednak by rozsah knihy nevyhnutne mnohonásobne vzrástol.

U každého z menovaných autorov je najprv krátky životopis v rozsahu 4—6 strán; potom kratší alebo dlhší rozbor charakteru ich číselne-teoretických prác. Podľa možnosti je vo viacerých prípadoch (kde to rozsah dovoľuje) viac-menej úplná reprodukcia originálneho znenia práce. Nakoniec je *Deloneho* kommentár, ktorého cieľom je zaradiť výsledky a oceniť ich dosah z hľadiska ďalšieho historického a matematického vývinu problému.

Netreba zdôrazňovať, že *Delone* vložil do knihy i kus svojej vlastnej vedeckej tvorby. Jeho komentáre, tvoriace veľmi podstatnú časť knihy, sú písané sviežim slohom a čítajú sa veľmi ľahko. Charakteristickým znakom týchto kommentárov je, že *Delone* prekladá všetky aritmetické (často umele vypadajúce) obraty skoro zásadne do jasnej a názornej geometrickej reči. To je ostatne v intenciach celej jeho vlastnej vedeckej tvorby.

Kniha poskytuje veľmi dobrý pohľad do života celej petrohradskej školy; do vzájomných vzťahov skoro troch generácií; do intenzívnej práce jej čelných reprezentantov, živo zainteresovaných práve na najťažších súčasných matematických problémoch. Kde-tu utrúsená maličká príležitostná poznámka zo súkromných vzťahov, alebo všeobecnejšie úvahy o rôznych typoch matematikov, veľmi osviežujú text. *Delone* dbal starostlivo o to, aby nikde nebolo ani stopy po suchopárnosti.

Vo shode s cieľom knihy nie je prirodzene počet strán venovaných jednotlivým predstaviteľom vždy úmerný významu aký oni zaujímajú v celkovom vývine ruskej matematiky vôbec. *Čebyševovi* sú venované strany 5—43, *Korkinovi* 43—93, *Zolotarevovi* 93—141, *Markovovi* 141—195, *Voronojovi* 195—321, *Vinogradovovi* 321 až 410.

Na konci diela je pre nás veľmi cenný soznam všetkých prác menovaných matematikov, majúcich vzťah k teórii čísel.

Nie je práve ľahké podať primeraný prehľad o obsahu tejto 400stránkovej knihy. Veď kniha sama je akýmsi hodnotením prác spomenutých vedeckých pracovníkov. Ničmenej využijeme túto príležitosť, aby sme si pripomenuli tie veľké zásluhy, ktoré má petrohradská škola teórie čísel a celá ruská veda pro rozvoj teórie čísel a matematiky vôbec. Kde-tu (pokiaľ to dovolí charakter preberaných problémov) pokusíme sa i naznačiť formuláciu a riešenie zásadných problémov a zaradiť ich do ďalšieho vyvinu matematiky. Nebude to snad celkom vinou recenzenta, ak sa to nepodarí všade tak, ako by to bolo želateľné.

1.

Пафнутий Львович Чебышев (*P. L. Čebyšev,* 1821—1894) bol profesorom petrohradskej univerzity po dobu 35 rokov (od r. 1847 do r. 1882). Od r. 1859 bol riadnym členom Akademie vied. Vynikajúci vedec a súčasne dobrý učiteľ zanechal trvalé stopy v mnohých odboroch matematiky. Tak napr. v teórii pravdepodobnosti, v integrálnom počte, v teórii čísel, v teórii mechanizmov a mnohých iných odvetviach. V tom smeru sa *Čebyšev* podobá veľkým klasikom *Eulerovi* a *Lagrangeovi.* Do teórie čísel spadá 10 jeho vedeckých publikácií. V predloženej knihe sú reprodukované podstatné časti jeho dvoch prác „Об определении числа простых чисел, не превосходящих данной величины" (O určení počtu prvočísel menších ako dané číslo), 1848 a Mémoire sur les nombres premiers (O prvočíslach), 1850.

V čom spočíva fundamentálny význam oboch týchto prác? Od *Euklida* po *Čebyševa* nebolo o rozdelení prvočísel známe nič iného ako to, že ich je nekonečne mnoho. Označme znakom $\pi(x)$ počet prvočísel $\leq x$. Bolo teda známe iba, že $\lim_{x=\infty}\pi(x) = +\infty$. *Legendre* udal (1808) empirický vzorec

$$\pi(x) \doteq \frac{x}{\log x - 1{,}08366}. \tag{1}$$

O odvodení nebolo ovšem reči.

V prvej práci dokázal *Čebyšev* toto: Funkcia $\pi(x)$ vyhovuje v intervale $(2, \infty)$ nekonečne mnohorazy nerovnosti

$$\pi(x) > \int_2^x \frac{dx}{\log x} - \frac{\alpha \cdot x}{\log^n x}$$

a nekonečne mnohorazy nerovnosti

$$\pi(x) < \int_2^x \frac{dx}{\log x} + \frac{\alpha \cdot x}{\log^n x},$$

nech je pritom α akokol'vek malé a n l'ubovol'ne vel'ké.

Z toho plynie, že je

$$\liminf_{x=\infty} \frac{\pi(x)}{\frac{x}{\log x}} \leq 1, \quad \limsup_{x=\infty} \frac{\pi(x)}{\frac{x}{\log x}} \geq 1.$$

Ak teda existuje limita

$$\lim_{x=\infty} \frac{\pi(x)}{\frac{x}{\log x}}, \tag{2}$$

potom je ona nutne rovná číslu 1.

V druhej práci sa podarilo *Čebyševovi* odhadnúť ako sa asi odchyluje funkcia $\pi(x)$ od $\frac{x}{\log x}$. Z jeho výsledkov plynie

$$0{,}92129 \frac{x}{\log x} < \pi(x) < 1{,}10555 \frac{x}{\log x}. \tag{3}$$

Táto nerovnosť bola odvodená (z dnešného hl'adiska) elementárnou, ale vel'mi vtipnou metódou. Nerovnosť (3) má podstatný význam pre rozvoj teórie čísel a znamená vel'ký medzník v matematike vôbec. Oboma geniálnymi prácami začína sa petrohradská škola teórie čísel.

Zlepšiť numerické konštanty v nerovnosti (3) sa podarilo po vel'kej námahe neskôr *Sylvesterovi*. Že limita (2) existuje podarilo sa však dokázať až 50 rokov neskôr (1896) nezávisle na sebe (a to komplikovanými funkčne-teoretickými metódami) *Hadamardovi* a *de la Vallée Poussinovi*.

Zo svojich výsledkov ukázal *Čebyšev*, jednak že vzorec (1) je principiálne nesprávny pre vel'ké x, jednak dokázal — ako prvý — tak zvaný *Bertrandov* postulát, že totiž medzi n a $2n$ je vždy aspoň jedno prvočíslo.

Aký je další vývin problému o rozdelení prvočísel odkazujem čitatel'a na referát prof. *V. Jarníka* v 1. čísle tohto ročníku Časopisu a na tam citovanú literatúru.[4])

---

[4]) *V. Jarník*, Tři sovětské knihy o analytické theorii čísel, Časopis pro pěstování matematiky, roč. 76 (1951), str. 35—65.

Ak sa *Delone* obmedzil vo svojej knihe na dve hlavné práce *Čebyševove* robil tak i z toho dôvodu, že biografií o *Čebyševovi* vyšlo už mnoho, ďaleko viac ako o ostatných predstavitel'och ruskej vedy, o ktorých bude v ďalšom reč.[5])

2.

Александр Николаевич Коркин (*A. N. Korkin*, 1837—1908) prednášal na petrohradskej univerzite po dobu skoro 50 rokov. Od roku 1868 tam bol profesorom. Bol matematikom vel'mi všestranným. Z jeho školy vyšiel rad vedúcich ruských matematikov, napr. tiež *Krylov*. Z teórie čísel napísal v podstate tri práce. Všetky tieto práce vydal spolu so *Zolotarevom*, o ktorom bude reč nižšie. Tieto tri práce rozoberá *Delone* dosť obšírne, nakol'ko maly značný vliv pre vznik a rozvoj celého odvetvia teórie čísel.

Ide o aritmetické vlastnosti kvadratických foriem. Je daná pozitívne definitná kvadratická forma s reálnymi koeficientami $f(x_1, \ldots, x_n) = \Sigma a_{ik} x_i x_k$ s diskriminantom $D = |a_{ik}|$. Dosadzujme do $f(x_1, \ldots, x_n)$ za $(x_1, \ldots, x_n)$ všetky možné n-tice celých čísel rôzne od n-tice $(0, \ldots, 0)$. Je zrejmé, že pre istú n-ticu $(x_1^\circ, \ldots, x_n^\circ)$ nadobúda forma f najmenšiu hodnotu. Toto číslo nazývame minimom formy f M_f. Dve formy, z ktorých jedna vzniká z druhej lineárnou substitúciou s celočíselnými koeficientami s determinantom ± 1 nazývajú se ekvivalentnými.

Je zrejmé, že všetky ekvivalentné formy majú rovnaké minimum. Myslime si teraz všetky možné pozitívne definitné formy v n premenných daného diskriminantu D. Pre každú z nich sostrojme číslo M_f. Označme znakom M hornú hranicu čísel M_f. Problém znie: nájsť číslo M, alebo aspoň čo možná ostrý odhad shora. Číslo M má potom zrejme túto vlastnosť. Nech $f(x_1, \ldots, x_n)$ je l'ubovol'ná poz. definitná forma s diskriminantom D. Existuje taký bod $(x_1^\circ, \ldots, x_n^\circ)$ s celočíselnými súradnicami, že $f(x_1^\circ, \ldots, x_n^\circ) \leq M$.

Pre prípad binárnej kvadratickej formy rozriešil túto úlohu už *Gauss*. Nech $f(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$ je forma s diskriminantom $D = b^2 - ac < 0$. Potom existujú také celé čísla x_0, y_0, že $f(x_0, y_0) \leq \sqrt{\frac{4}{3}|D|}$. Konštanta na pravej strane tejto nerovnosti sa nedá zlepšiť, keďže forma $\sqrt{\frac{4}{3}|D|} \cdot (x^2 + xy + y^2)$ má diskriminant D a nadobúda ako najmenšiu hodnotu zrejme čísla $\sqrt{\frac{4}{3}|D|}$. Je teda $M = \sqrt{\frac{4}{3}|D|}$.

Korkin a *Zolotarev* riešili tú istú úlohu pre pozitívne definitné formy v n premenných. Podarilo sa im dokázať, že číslo M splňuje túto nerovnosť:

$$M \leqq \frac{3^{\frac{m-2}{2}}}{2^{\frac{m-3}{3}}} \cdot \sqrt[n]{|D|} \quad \text{pre } n = 2m,$$

$$M \leqq \left(\frac{3^{m(m-1)}|D|}{2^{m(m-2)}}\right)^{\frac{1}{n}} \quad \text{pre } n = 2m + 1.$$

Pre $n = 2, 3, 4$ dávajú tieto vzorce presnú hodnotu čísla M. Pre $n = 5$ už nedostávame presnú hodnotu. *Korkin* a *Zolotarev* dokázali však inou cestou, že pre $n = 5$ je číslo M rovné $\sqrt[5]{8|D|}$.

Problém, ktorý sme tu naznačili, ukázal sa byť nie práve l'ahkým. Ostatne, svojho času s ním nevedeli dobre pohnúť ani matematici takého formátu akým bol

[5]) Sobrané spisy *Čebyševove* vyšly už vo viacerých vydaniach v Akadémii vied SSSR. Z nových kníh podrobne osvetl'uje jeho život z najrôznejších l'udských i vedeckých stránok pekná knižka: В. Е. Прудников, П. Л. Чебышев, ученый и педагог (*V. E. Prudnikov*, P. L. Čebyšev, vedec a pedagog), Учпедгиз, Moskva, 1950.

Hermite. Ukázalo sa neskôr, že práve tak ako u mnohých iných úloh aritmetickej teórie foriem ťažkosť úlohy rastie vel'mi rýchle s rastúcim n. Pre $n = 6, 7$ našiel presnú hodnotu čísla M až *Blichtfeld* (1926). V poslednom čase boly nájdené hodnoty M i pre $n = 8, 9$.[6])

Týmto trom prácam venuje *Delone* obšírný komentár, v ktorom ukazuje akú geometrickú interpretáciu možno dať práve formulovanému problému i jeho výsledkom.

3.

Егор Иванович Золотарев (*E. I. Zolotarev*, 1847—1878), o ktorom sme práve hovorili, bol neobyčajne nadaným matematikom. Za vedenia *Čebyševa* a *Korkina* sa stal čoskoro natol'ko vyspelým, že už v 21 rokoch bol pripustený za súkromného docenta petrohradskej univerzity. Profesorom sa stal v roku 1876. Bohužial tragická smrť (železničné nešťastie) v 31 rokoch života pripravila matematickú vedu o jednoho z vel'mi nádejných pracovníkov.

Zolotarev publikoval vedecky vlastne len 10 rokov. Za tento pomerne krátky čas napísal rad vedeckých prác, z ktorých najdôležitejšie (v počte 10) sa týkajú teórie čísel.

Ešte dôležitejšie ako jeho práce z teórie kvadratických foriem sú jeho práce z teórie algebraických čísel.

V tejto recenzii nie je dosť dobre možné podať ani podstatné myšlienky jeho teórie. Krátko povedané *Zolotarev* vybudoval v rokoch 1874—1885 teóriu delitel'nosti celých čísel daného algebraického číselného telesa, ktorá je ekvivalentná s *Dedekindovou* teóriou ideálov. Z dnešného hl'adiska vývinu algebraickej teórie čísel je dôležité, že *Zolotarev* prvý krát rozvinul teóriu, ktorá dnes nesie názov lokálna teória ideálov. Tejto témy sa týkajú tri jeho práce a to „Теория целых комплексных чисел с приложением к интегральному исчислению" (doktorská dizertácia, Спб, 1874), „Sur les nombres complexes" (Bull. de l'Acad. Sci. de St. Pétersbourg 3 série, 24, 1878), „Sur la théorie des nombres complexes" (Journal de Math. pures et appliquées, t. 6, 1885). V prvej z týchto prác je ešte istá nedokonalosť, lebo jeho teória neplatí pre prvočísla, ktoré delia takzvaný index telesa. V ďalších dvoch prácach je však ukázané ako doplniť teóriu i pre tieto výnimočné prvočísla (ktorých je ostatne v každom telese iba konečný počet). Teória algebraických čísel bola koncom minulého a začiatkom tohoto storočia, hlavne vplyvom *Hilberta*, hlboko rozvinutá. Vyšiel rad kníh. Je pozoruhodné, že v žiadnej z týchto kníh nie sú *Zolotarevove* práce spomenuté. Je to tým čudnejšie, že práce *Dedekindove* (ktorého zásluha tým nemá byť nijako zmenšovaná) vyšly až o niečo neskôr, totiž v rokoch 1877 až 1895. Až sovietsky matematik *N. G. Čebotarev* (zomr. 1947) upozornil v r. 1925 podrobnejšie na *Zolotarevove* práce v pojednaní, ktoré bolo hned preložené tiež do angličiny a vyšlo v americkom časopise Amer. Math. Monthly.[7])

Dedekindova teória je vyššie postavená s hl'adiska teoretického, kedže operuje pojmami všeobecnejšej koncepcie. *Zolotarevova* teória má však jednu vel'kú výhodu. Umožňuje numerický výpočet ideálov v každom konkrétnom prípade. To je nanajvýš dôležité, lebo — ako známo — je otázka numerických výpočtov slabinou algebraickej teórie čísel vôbec.

---

[6]) Novšie výsledky ako i príslušnú literatúru tohto problému nájde čitatel' v knihe *J. F. Koksma*, Diophantische Approximationen, 1937.

[7]) Z príležitosti výročia stých narodenin *Zolotareva* rozšíril *Čebotarev* tento článok a uverejnil ho znova pod názvom „Об обосновании теории идеалов по Золотарёву" v časopise Успехи математических наук, том II, 1947, str. 52 až 67. Poznamenajme, že v tomže čísle toho istého časopisu je na str. 22—51 i článok Р. О. Кузьмин, Жизнь и научная деятельность Егора Ивановича Золотарева (*R. O. Kuzmin*, Život a vedecká činnosť E. I. Zolotareva).

V recenzovanej knihe vykladá *Delone* na 40 stranách zásadné momenty *Zolotarevovej* teórie v pôvodnej (ale skrátenej) forme. V kommentároch ukazuje na základe geometrickej interpretácie ekvivalenciu *Dedekindovej* a *Zolotarevovej* teórie.[8])

4.

Андрей Андреевич Марков (*A. A. Markov*, 1856—1922), ktorému je venovaný štvrtý diel knihy, bol profesorom petrohradskej univerzity od r. 1886. Od r. 1896 bol riadnym členom Akadémie. Jeho vedecké dielo je značne obsiahle a rôznorodé. *Markov* sa zaoberal teóriou čísel, diferencialnymi rovnicami, reťazovými zlomkami, diferenčnými rovnicami, interpoláciou, teóriou pravdepodobnosti a aproximáciou funkcií.

I *Markov* je žiakom *Čebyševovym*. To sa zračí obzvlášť v teórii pravdepodobnosti, v ktorej nadto založil jedno celkom nové odvetvie, majúce dnes veľký význam najmä vo fyzike.

Bolo by iluzorným pokúsiť sa na niekoľkých desiatkach strán zachytiť hĺbku celej jeho vedeckej činnosti. Preto sa i *Delone* obmedzuje na jedinú z jeho prác, totiž magisterskú prácu z roku 1880. Jej názov znie „О бинарных квадратичных формах положительного определителя" („O binárnych kvadratických formách s kladným diskriminantom"). *Delone* hovorí, že táto práca (vysoko cenená *Čebyševom*) patrí medzi najhlbšie výsledky petrohradskej školy teórie čísel, ba dokonca snad i celej ruskej matematiky. I keď bola súčasne uverejnená (francúzsky) v Mathematische Annalen nenašla pochopenia u súčasníkov. Až v posledných 10—15 rokoch, keď už bola do značnej miery vybudovaná tzv. geometria čísel, dostalo sa jeho dielu plného ocenenia.

O čo ide? Hore sme hovorili už o prácach *Korkina* a *Zolotareva* o pozitívne definitných binárnych kvadratických formách. *Korkin* a *Zolotarev* sa zaoberali tiež binárnymi indefinitnými kvadratickými formami (s diskriminantom $D > 0$). Našli, že číslo M, o ktorom sme hovorili, je pre takéto formy rovné číslu $\sqrt{\frac{1}{5}D}$. T. j. minimum absolútnej hodnoty ľubovolnej kv. indefinitnej formy s diskriminantom D je $\leqq \sqrt{\frac{1}{5}D}$. Toto číslo sa nedá zlepšiť, keďže ho dosahuje forma

$$\sqrt{\tfrac{1}{5}D}(x^2 - xy - y^2). \tag{A}$$

Medzi formami s $D < 0$ a $D > 0$ je však podstatný rozdiel. Pre $D < 0$ sme našli hore $M = \sqrt{\frac{1}{3}|D|}$. Ak zvolíme ľubovolné číslo μ, $0 < \mu \leqq \frac{1}{3}$, potom sa dá dokázať, že je možno nájsť také formy $f(x, y)$, ktorých minimum je presne $\sqrt{\mu|D|}$. Celkom inak je tomu u foriem indefinitných ($D < 0$). Ak vylúčime všetky formy ekvivalentné s (A), potom horná hranica miním ostávajúcich foriem sa líši od $\sqrt{\frac{1}{5}D}$ o konečnú hodnotu. Je totiž rovná číslu $\sqrt{\frac{1}{8}D}$. Pritom tohto minima nadobúda skutočne forma

$$\sqrt{\tfrac{1}{8}D}(x^2 - 2xy - y^2). \tag{B}$$

Z toho vyšiel *Markov*. Jemu sa podarilo „predlžiť do nekonečna" tento proces vylučovania.[9]) Ak totiž vylúčime ďalej všetky formy ekvivalentné s formou (B) ostanú formy, pre ktoré je číslo M rovné $\sqrt{\frac{4}{221}D}$ a toto minimum nadobúda forma

$$\sqrt{\frac{4D}{221}}\,(5x^2 - 11xy - 5y^2).$$

[8]) Sobrané spisy *Zolotarevove* vydala v roku 1932 Akadémia vied SSSR. Tvoria dva sväzky; obsahujú 20 vedeckých prác a veľmi obsiahlu korešpodenciu, menovite s *Korkinom* (64 dopisov).

[9]) Možno tedy povedať, že u foriem s $D < 0$ tvoria minima akési diskrétne „spektrum", u foriem s $D > 0$ spojité „spektrum".

Markov však dokázal podstatne viac. Čísla $\frac{4}{5}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{100}{221}$, ... sú prvé členy klesajúcej postupnosti čísel $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$, ktorá má tieto vlastnosti: a) Ku každému číslu α_k existuje trieda idenfinitných binárnych kv. foriem s diskriminantom D, ktorej minimum sa rovná $\sqrt{\alpha_k \cdot D}$. b) Ak pre nejakú triedu binárných indefinitných kv. foriem s diskriminantom D žiadna z foriem nemôže pre celé x, y nadobúdať hodnôt menších ako $\sqrt{\alpha_k D}$, potom minimum tejto triedy sa rovná jednomu z čísel $\sqrt{\alpha_1 D}$, $\sqrt{\alpha_2 D}, \ldots, \sqrt{\alpha_k D}$. c) Postupnosť čísel α_k konverguje k číslu $\frac{4}{9}$. Pritom existuje nekonečne mnoho tried indefitných bin. kvadr. foriem s diskriminantom D, pre ktoré je minimum $\frac{2}{3}\sqrt{D}$. d) Všetky čísla αk sú tvaru $\left(\frac{9}{4} - \frac{1}{q^2}\right)^{-1}$, kde za q treba vziať také celé čísla, pri ktorých má diofantická rovnica $p^2 + q^2 + r^2 = 3pqr$ nekonečne mnoho celočíselných riešení pre dvojicu p, r. Čísla q nesú meno *Markovových* čísel. *Markov* dostal tieto výsledky užívajúc metódy reťazových zlomkov.

Delone v obšírnom kommentáre (33 strán) ukazuje na geometrický význam problému i *Markovovej* metódy.

Súčasná teória čísel sa snaží (ale je zatiaľ len v začiatkoch!) zovšeobecniť *Markovove* výsledky v dvoch smeroch. Za prvé tým, že uvažuje kvadratické formy viac premenných (menovite $n = 3, 4$). V tomto smere pracuje predovšetkým i dnes (skoro 70 rokov po pôvodnej práci *Markovovej*) americká škola *Dicksonova.* (V knihe *L. E. Dickson,* Studies in the Theory of numbers, 1930, je na stranách 79—150 rad docielených výsledkov, nadväzujúcich na Markova, ktoré výsledky boly medzičasom v niektorých drobnostiach už prekonané). Druhá skupina zovšeobecnení spočíva v tom, že uvažujeme indefinitné formy nekvadratické, menovite kubické. Do tohoto oboru spadá rad prác vynikajúcich súčasných čísel'ných teoretikov ako *Mordella, Davenporta, Mahlera* a iných, uverejnených v posledných 10—15 rokoch.[10])

5.

Георгий Федосеевич Вороной (*G. F. Voronoj,* 1868—1908) je odchovancom a príslušníkom petrohradskej školy teórie čísel i keď bol napr. od r. 1894 profesorom na univerzite vo Varšave. *Voronoj* pracoval len v teórii čísel. Za pomerne krátkeho života napísal iba 12 prác; jeho práce sú však značného dosahu. Na jeho práce nadväzujú v prvých publikáciach *Vinogradov,* v niektorých prácach *Delone, Žitomirskij* a *Venkov.*

Za hraniciami boly práce *Voronojove* do nedávna pomerne málo známe. Ak *Delone* venuje *Voronojovi* 120 strán textu ide mu tiež práve o to, soznámiť širšiu svetovú verejnosť s jeho výsledkami. Nadto tu ide o okruh myšlienok, v ktorých *Delone* sám najviac vytvoril.

Prvý problém, ktorý *Voronoj* riešil, je konštrukcia bázy celých čísel kubického telesa. *Voronoj* doviedol riešenie tohto problému až k vzorcom, ktoré sa hodia k numerickým výpočtom. Tieto otázky sú detailne prepracované v knihe Б. Делоне-Д. Фадеев: "Теория иррациональностей третьей степени" (*B. Delone-D. Fadeev,* Teória kubického telesa), ktorú recenzent nemá bohužiaľ k dispozícii.

Ďalšia — a to prvotriedna — práca, ktorá bezprostredne súvisí s teóriou kubického telesa má názov: „Об одном обобщении алгорифма непрерывных дробей" (O zovšeobecnení algoritmu reťazových zlomkov), doktorská dizertácia, Varšava, 1896. V tejto práci udal *Voronoj* metódu, ako nájsť tak zvané fundamentálne jednotky kubického telesa (a to pre prípad kladného i záporného diskriminantu).

Základná veta o existencii a struktúre množiny jednotiek obecného alg. čís. telesa bola dokázaná už *Dirichletom* (1846). Tento dôkaz dáva zásadne tiež možnosť

---

[10]) Výsledky tejto druhej skupiny problémov neboly ešte knižne spracované a sú roztrúsené iba po časopisoch. Niekoľko málo výsledkov s príslušnou literatúrou nájde čitateľ v knihe *Hardy-Wright,* An introduction to the Theory of Numbers, 1945 (menovite na str. 399).

po konečnom počte krokov nájsť systém fundamentálnych jednotiek telesa. V konkrétnych prípadoch však hľadať jednotky podľa tejto metody je prakticky nemožné. Ako sme už hovorili alg. teória čísel sa hemží prípadmi, kde od existenčného dôkazu ku skutočnej konštrukcii je značný skok. Preto matematici algoritmického razenia (a takým bol i Voronoj) sa s tým nespokojujú a hľadajú algoritmus, ktorý vylučuje skúšanie, alebo aspoň počet skúšok obmedzuje na minimum. V tomto prípade je táto otázka obzvlášť akútna. Je dobre známe, že hľadanie fundamentálnej jednotky kvadratického telesa (diskriminantu D) sa redukuje na riešenie tzv. *Pellovej* rovnice $x^2 - Dy^2 = 1$. Táto rovnica sa rieši elegantne metódou reťazových zlomkov. Problém, ktorý si *Voronoj* postavil (a ktorý ostatne trápil už *Jacobiho*) je tento: Je možno sostaviť nejaký algoritmus, ktorý by hral v kubickom telese tú istú úlohu ako algoritmus reťazových zlomkov v telese kvadratickom? *Voronojovi* sa to skutočne podarilo.

Delone venuje výkladu jeho metódy 30 strán. Treba podotknúť, že tento výklad je geometrický, zatiaľ čo *Voronoj* postupuje formálne aritmeticky. *Delone* však podtrhuje, že *Voronoj* myslel vyslovene geometricky. Priatelia *Voronoja* vykladajú, že v jeho konceptoch sa kupily a navršovaly na seba systémy rovnobežníkov, valcov, rovnobežnostenov a najrôznejších geometrických telies a obrazcov. V tej dobe nebolo však v móde v otázkach teórie čísel užívať geometrických pojmov. Preto jeho aritmetická formulácia je zrejme akýmsi kompromisom.[11]) Vzhľadom k tejto a ďalším prácam možno *Voronoja* považovať vedľa *Minkowskeho* za jednoho zo spoluzakladateľov geometrie čísel. *Deloneho* kommentár je sám o sebe vysokohodnotný, keďže v jasnej a srozumitelnej forme vedie čitateľa k hlbšiemu vniknutiu nielen do samotného problému, ale i do metódy geometrie čísel vôbec.

Ďalšou prácou *Voronojovou* (ktorá je v svetovej literatúre dobre známa) je jedna otázka z teórie mrežových bodov. Označme znakom $S(n)$ počet mrežových bodov vnútri a na hranici rovinného útvaru ohraničeného osami $x > 0$, $y > 0$ a hyperbolou $xy = n$. *Dirichlet* našiel (pomerne elementárne), že pre $S(n)$ platí

$$S(n) = n \log n + n(2C - 1) + 0(\sqrt{n}),$$

kde C je *Eulerova* konštanta. Išlo o to, nájsť lepší odhad pre chybu $0(\sqrt{n})$. *Voronoj* vo veľkej (40stránkovej) práci našiel v roku 1903 (metodou tzv. Fareyových zlomkov), že túto chybu možno nahradiť výrazom $0(\sqrt[3]{n} \log n)$. V ďalšom vývine sa tento problém ukázal byť neobyčajne „tvrdým". Každé ďalšie seba-menšie zlepšenie si vyžiadalo veľkej námahy. Presný rád chyby nie je dodnes známy.

Z ďalších prác *Voronojovych* je významná práca, ktorá v konštruktívnom slova smysle dovršuje práce *Korkina* a *Zolotareva* o hornej hranici M miním M_f pozitívne definitných kvadratických foriem n premenných. *Voronoj* odvodil algoritmus ako po konečnom počet krokov nájsť pozitívne kvadratickú formu v n premenných, ktorá má číslo M skutočne za svoje minimum. Tým našiel v istom smysle (v roku 1907) obecné riešenie úlohy, položenej dávno predtým *Hermitom*.

Posledná práca *Voronojova* „Recherches sur les paralleloédres primitifs" vyšla až po smrti autora v r. 1908 a 1909 v 134- a 136-tom sväzku Crellovho Journalu. Má okolo 200 strán. Posledné dve práce zapadajú už vyslovene do geometrie čísel. Problém, ktorý *Voronoj* rieši je tento: n-rozmerný euklidovský priestor je úplne vyplnený shodnými konvexnými mnohostenmi, nemajúcimi spoločných vnútorných bodov, s hranami rovnobežne uloženými. Otázka znie: aké sú všetky možné typy takýchto mnohostenov.[12])

---

[11]) 40 rokov po *Voronojovi* uverejnil nemecký matematik *Bullig* (1939) algoritmus, ktorý je v mnohých ohľadoch celkom analogický *Voronojovej* metóde.

[12]) Napríklad trojrozmerný euklidovský priestor možno takto vyplniť kryhlami alebo hranolmi o základni rovnej pravidelnému šesťuholníku.

Z jednej *Minkowskeho* práce plynie, že takýto mnohosten musí mať stred súmernosti a že takýchto mnohostenov môže existovať len konečný počet. Tento problém je opäť neobyčajne ťažký. Pre $n \geq 5$ je do dnešnej doby nerozriešený. *Voronoj* zúžil svoju otázku tým, že hľadá iba tak zvané primitívne vyplnenia priestoru. Tak nazýva také vyplnenia priestoru mnohostenmi, pri ktorom v každom vrchole sa stýka najmenší možný počet mnohostenov. Ten činí v n-rozmernom priestore $n + 1$. Napriek tomuto zjednodušeniu nesie táto práca, podľa slov *Deloneho,* pečať geniálnosti. *Voronoj* vo svojej práci našiel a) algoritmus, ako nájsť všetky primitívne vyplnenia n-rozmerného priestoru pre dané n, b) našiel všetky príslušné mnohosteny umožňujúce primitívne vyplnenie priestoru pre $n = 2, 3, 4$.

Na túto prácu *Voronoja* nadväzuje vo svojich prácach *Delone, Žitomirskij* a *A. D. Alexandrov.* Výsledkom týchto prác je, že je dnes problém úplne rozriešený (bez akéhokoľvek obmedzenia) pre priestor dvoj, troj a štvorrozmerný. V kommentároch k tejto práci pojednáva *Delone* (na 20 stránkach) o výsledkoch vlastného bádania, v ktorom sa mu podarilo veľmi zjednodušiť *Voronojove* metódy. Tieto problémy majú zrejme podstatný význam pre krištalografiu.

6.

Posledným zo šestice matematikov, ktorých život a prácu *Delone* v predloženej knihe hodnotí, je akademik Иван Матвеевич Виноградов (*I. M. Vinogradov*). *Vinogradov* sa narodil 1891. Od r. 1920 bol profesorom polytechniky a od r. 1925 univerzity v Leningrade. V r. 1929 sa stal riadnym členom Akadémie vied a od r. 1932 je riaditeľom Matematického inštitutu Akadémie vied SSSR.

Vinogradov, jeden z vedúcich matematikov súčasnej doby, zasvätil svoju prácu analytickej teórii čísel. To je tá časť teórie čísel, ktoré užíva k riešeniu svojich problémov metódy matematickej analýzy, menovite prostriedkov teórie funkcií komplexnej premennej. Štylom jeho práce treba *Vinogradova* jednoznačne priradiť k petrohradskej škole a k veľkým následovníkom *Čebyševa.* Možno tak urobiť tým skôr, že založenie analytickej teórie čísel je vlastne dielom tejto školy. Prvé dôležité výsledky tohto druhu nájdeme u *Eulera.* Tieto pokračujú potom prácami *Čebyševa,* prácou *Voronoja* v otázkach mrežových bodov a nachádzajú svoje vyvrcholenie v súčasnej dobe v prácach *Vinogradova.*

Hlavná zásluha *Vinogradova* je v tom, že našiel nové metódy, ktoré možno nazvať elementárnymi a to v tom smysle, že sa v nich užíva metód analýzy čo najmenej. To znamená, že ťažisko pri riešení problémov sa presunulo do značnej miery zpäť do aritmetiky. Pritom sú tieto metódy natoľko mocné, že vo väčšine problémov davajú výsledky aspoň rovnocenné doterajším výsledkom, avšak v špeciálnych partiách (ako Waringov problém, Goldbachov problém) doterajšie výsledky podstatne a nečakane zlepšujú. Výsledky *Vinogradovove* nie sú ovšem vytrhnutou kapitolou z matematiky. Vznikly akousi synthézou jeho neobyčajne ostrých odhadov rôznych (napr. trigonometrických) súčtov s výsledkami iných matematikov, týkajúcich sa predovšetkým otázok rozdelenia prvočísel v aritmetických postupnostiach. Za svoju znamenitú knihu „Новий метод в аналитической теории чисел" („Nová metóda v analytickej teórii čísel", vydala Akadémie vied SSSR, 1937) bol odmenený v roku 1941 Stalinskou cenou 1. stupňa. V roku 1945 dostalo sa mu od Prezídia Najvyššieho Sovietu SSSR vysokého vyznamenania Hrdinu socialistickej práce.

V sozname prác uverejnených do roku 1946 uvádza *Delone* 106 publikácií a vedeckých prác, ktoré vyšly v rôznych domácich a zahraničných časopisoch. V týchto prácach študuje *Vinogradov* tieto hlavné problémy: a) Počet mrežových bodov v značnej obecnej triede rovinných útvarov, b) počet tried binárnych kvadratických foriem, c) odhad najmenšieho primitívneho koreňa dľa daného prvočíselného modulu, d) problém Waringov, e) problém Goldbachov, f) odhad Weylových súčtov, g) problémy rozloženia modulo 1, h) odhady rôznych iných špeciálnych súčtov.

Ak sa v tejto recenzii ani nepokúsime zaoberať sa bližšie detailnou formuláciou týchto problémov, má to tri hlavné dôvody:

a) Je beznádejné v takejto recenzii podať — čo i len krátky — obraz minulosti a prítomnosti všetkých týchto problémov. Sám *Delone*, ktorý venuje *Vinogradovovym* prácam skoro 100 strán, zdôrazňuje, že sa môže zaoberať iba niekol'kými podstatnými problémami. Pritom v tejto časti knihy i *Delone* upúšťa od detailnejšieho uvádzania toho, čo bolo v týchto problémoch urobené inými matematikmi. Obmedzuje sa nakoniec na krátky výpočet prác najdôležitejších spolupracovníkov a žiakov *Vinogradova*, ako *Čudakova*, *Mardžanišviliho*, *Linnika*, *Kuzmina* a *Gel'bkeho*.

b) Druhým momentom, ktorý ul'ahčuje môjmu svedomiu v tejto veci, je okolnosť, že v prvom čísle tohto ročníku Časopisu podal prof. *V. Jarník* značne vyčerpávajúci obraz (priamej i nepriamej) *Vinogradovovej* činnosti (predovšetkým v otázkách Waringovho a Goldbachovho problému). (Viď poznámku pod čiarou [4].) Odkazujem čitatel'a na túto dôkladnú a majstrovsky jasne podanú recenziu.

c) A nakoniec tretí dôvod. *Vinogradov* je vedec nachádzajúci sa v plnej sviežesti, uprostred tvorivej práce. (V septembri tohto roku mu bolo 60 rokov.) Nemôže byť reči o nejakej záverečnej bilancii jeho činnosti. Od r. 1946, kedy končí obsah *Deloneho* knížky, uplynulo 5 rokov. Behom týchto rokov obohatil *Vinogradov* teóriu čísel o rad nových výsledkov. Niet pochybností o tom, že akokol'vek dokonalý referát o celkovej jeho činnosti sa stane skoro prekonaným. To tým skôr, že *Vinogradov* sa zaoberá problémami, ktoré sú dnes vyslovene „vo varu". Pritom *Vinogradov* sám do značnej miery diktuje smer tohto napredovania. Že *Delone* napriek tomu (a vedomý si tejto skutočnosti) pojál *Vinogradova* do svojej knihy, svedčí samo o obrovskom podiele, ktorý *Vinogradov* mal a má pre rozvoj sovietskej matematiky.

Nakoniec ešte pár slov o knihe samej. Ako som už zdôraznil na začiatku má kniha svieží styl a číta sa — myslím — plynule i odborníkovi, ktorého ťažisko práce nie je zrovna v teórii čísel. Kniha môže poslúžiť nielen tým čitatel'om, ktorí chcú získať obraz o vysokej úrovni sovietskej matematiky a jej skvelej tradícii, ale i tým, ktorí pred začatím štúdia pôvodných pojednaní chcú získať prehl'ad o doterajšom stave a o metódach užívaných pri riešení mnohých rôznych špeciálnych problémov.

Н. И. Мусхелишвили: Сингулярные интегральные уравнения. (*N. I. Muschelišvili*: **Singulární integrální rovnice.**) OGIZ, Moskva-Leningrad 1946, str. 458, cena 23 r., tiráž 5000 výtisků.

Tato kniha se zabývá theorií singulárních integrálních rovnic, které mimo jiné mají značnou důležitost v theorii rovinné pružnosti. (Viz *N. I. Muschelišvili*: Někotorye osnovnyje zadači matěmatičeskoj těorii uprugosti.)

Kniha se dělí na šest kapitol.

Kapitola I studuje vlastnosti integrálu Cauchyova typu, který jest základem úvah v kapitolách dalších.

Definujme nejprve některé pojmy.

Definice 1. Uzavřenou linií L nazveme konečný počet hladkých Jordanových jednoduchých křivek v komplexní rovině tvořící hranici Jordanovy oblasti.

Zobecněním linie přicházíme k další definici.

Definice 2. Otevřenou linií nazveme konečný počet disjunktních, hladkých, jednoduchých oblouků a hladkých, jednoduchých křivek.

Dalším důležitým pojmem jest podmínka O. Höldera.

Definice 3. Budiž $\varphi(t)$ komplexní funkce definovaná na uzavřené linii L. Funkce $\varphi(t)$ splňuje podmínku Hölderovu — říkáme podmínku H — jestliže

$$|\varphi(t_2) - \varphi(t_1)| \leqq A|t_2 - t_1|^\mu; \quad t_1, t_2 \in L,$$

když A je konstanta a $\mu \leqq 1$.

Definujme nyní integrál Cauchyova typu.

Definice 4. Integrálem Cauchyova typu s hustotou φ nazveme integrál

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(t)\,dt}{t - z}$$

pro $z \in L$ jest bráti integrál ve smyslu hlavní hodnoty Cauchyho. Snadno se ukáže, jestliže $\varphi(t)$ splňuje podmínku H, hlavní hodnota existuje.

Dalším důležitým pojmem jest funkce po částech holomorfní.

Definice 5. Nazveme funkci $\Phi(z)$ po částech holomorfní, je-li holomorfní v každé komponentě $E - L$ a je spojitě prodlužitelná na hranici každé této komponenty, když E jest komplexní rovina a L uzavřená linie, při čemž L jest hranicí Jordanovy oblasti. Spojité prodloužení z této oblasti budeme značit $\Phi^+(t)$, prodloužení z komplementu $\Phi^-(t)$.

Jednou z hlavních vět kapitoly prvé jest následující

Věta 1. Nechť $\varphi(t)$ splňuje podmínku H, potom funkce

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(t)\,dt}{t - z}$$

jest po částech holomorfní a jest pro $t_0 \in L$

$$\Phi^+(t_0) = \tfrac{1}{2}\varphi(t_0) + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(t)\,dt}{t - t_0},$$

$$\Phi^-(t_0) = -\tfrac{1}{2}\varphi(t_0) + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(t)\,dt}{t - t_0},$$

z čehož plyne, že

$$\Phi^+(t_0) - \Phi^-(t_0) = \varphi(t_0),$$

$$\Phi^+(t_0) + \Phi^-(t_0) = \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(t)\,dt}{t - t_0}.$$

Uveďme zde ještě jeden důsledek této věty.

Věta 2. Nechť funkce $\Phi(z)$ je po částech holomorfní, dále $\Phi(\infty) = 0$; a

$$\Phi^+(t) - \Phi^-(t) = \varphi(t) \text{ na } L,$$

kde $\varphi(t)$ má vlastnost H na L. Potom funkce $\Phi(z)$ jest určena jednoznačně vztahem

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(t)\,dt}{t - z}.$$

Dále se zabývá autor dalšími vlastnostmi integrálu Cauchyova typu a to jak pro linie uzavřené, tak i otevřené.

Hlavním problémem v kapitole II jest homogenní a nehomogenní Hilbertův problém.

Definice 6. Homogenním Hilbertovým problémem nazýváme tento problém: Jest určiti funkci $\Phi(z)$ po částech holomorfní s pólem předepsaného řádu v bodě $z = \infty$, aby

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t),$$

kde $G(t)$ jest funkce splňující podmínku H a $G(t) \neq 0$ pro $t \in L$.

Tento problém převádí se na větu 1, resp. 2. Rovnice se převede na tvar

$$\lg \Phi^+(t) - \log \Phi^-(t) = \lg G(t),$$

při čemž se užije dále jednoduchého obratu, aby $\lg G(t)$ splňovalo podmínku H.

Definice 7. Nehomogenním Hilbertovým problémem se nazývá problém určení funkce $\Phi(z)$ po částech holomorfní takové, aby

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) + g(t),$$

kde $g(t)$, $G(t)$ vyhovují podmínce H a $G(t) \neq 0$ pro $t \in L$.

Tento problém se řeší celkem snadno pomocí problému homogenního a věty 2.

Další část kapitoly II se zabývá singulárními integrálními rovnicemi normálního typu na uzavřených liniích.

Definice 8. Singulární integrální rovnicí normálního typu nazýváme rovnici

$$\mathsf{K}\varphi = f,$$

když

$$\mathsf{K}\varphi(t_0) = A(t_0)\,\varphi(t_0) + \frac{B(t_0)}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)\,dt}{t - t_0} + \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{K(t_0, t)\,\varphi(t)\,dt}{t - t_0},$$

když L jest uzavřená linie, funkce A, B, $K(t_0, t)$ vyhovují podmínce H a

$$S(t) = A(t) + B(t) \neq 0 \text{ na } L,$$

$$D(t) = A(t) - B(t) \neq 0 \text{ na } L.$$

Definice 9. Charakteristickou rovnicí rovnice $\mathsf{K}\varphi = f$ nazveme rovnici

$$\mathsf{K}^0\varphi = f,$$

když

$$\mathsf{K}^0\varphi(t) = A(t_0)\,\varphi(t_0) + \frac{B(t_0)}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)\,dt}{t - t_0}.$$

Operátor $\mathsf{M}\varphi$

$$\mathsf{M}\varphi = A(t_0)\,\varphi(t_0) + \frac{B(t_0)}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)\,dt}{t - t_0}$$

budeme nazývat operátorem charakteristickým.

Nejprve autor provádí úvahy o charakteristické singulární integrální rovnici, které pak zobecní pro rovnici normální. Hlavní myšlenkou studia charakteristické rovnice jest převod na Hilbertův problém. Položme

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)\,dt}{t - z};$$

potom podle věty 1

$$\varphi(t_0) = \Phi^+(t_0) - \Phi^-(t_0),$$

$$\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)\,dt}{t - t_0} = \Phi^+(t_0) + \Phi^-(t_0)$$

a problém charakteristické rovnice se převede na nehomogenní Hilbertův problém, při němž

$$(A + B)\,\Phi^+ - (A - B)\,\Phi^- = f.$$

Normální singulární rovnice se převádí na rovnici Fredholmovu s jádrem s nepodstatnou singularitou a rovnici charakteristickou. Hlavní myšlenkou jest zde tento postup: Je-li rovnice normální

$$\mathsf{K}\varphi = f, \tag{1}$$

potom tato rovnice jest v určitém smyslu ekvivalentní Fredholmově rovnici tvaru buď

$$\mathsf{NK}\varphi = \mathsf{N}f, \tag{2}$$

nebo

$$\mathsf{KN}\psi = f,$$

kde N je jistý charakteristický operátor.

Zdánlivě jest rovnice (2) ekvivalentní rovnici (1). Ve skutečnosti však lze ukázat, že nutná a postačující podmínka pro ekvivalenci rovnic (1) a (2) jest nezápornost t. zv. indexu rovnice. Tento index závisí pouze na charakteristické rovnici normální singulární integrální rovnice. Tento index hraje v theorii singulárních rovnic značnou úlohu.

V kapitole III jest použití singulárních rovnic pro určité okrajové problémy. Pro ilustraci uveďme zde *větu Privalovovu.*

Jestliže reálná část funkce $\Phi(z)$, holomorfní v Jordanově oblasti, jest spojitě prodlužitelná na hranici L a zde splňuje podmínku H, potom i imaginární část jest spojitě prodlužitelná.

O dalších důležitých větách, jako na př. o *větě Vekuově*, která hraje podstatnou úlohu ve Vekuově knize: Novyje metody rešenia eliptičeskich uravněnij, nebudeme se zde zmiňovat.

Hlavní myšlenkou je zde opět převod na singulární rovnice a problém Hilbertův.

Prvé tři kapitoly tvoří prvou část knihy zabývající se uzavřenými liniemi.

Kapitola IV řeší problém Hilbertův pro linie otevřené, kapitola V se zabývá singulárními rovnicemi pro linie otevřené. Závěrečná kapitola VI zobecňuje dále výsledky a to problém Hilbertův pro několik funkcí a zobecňuje theorii singulárních rovnic na systémy rovnic.

Kniha Muschelišviliho jest významnou prací nejen po stránce theoretické, ale zejména základem moderní theorie rovinné pružnosti mimo jiných důležitých aplikací. Jest určena pro aspiranty a studenty vyšších ročníků fysikálně-matematických fakult a pro inženýry theoretiky. Jest psána ve velmi srozumitelné a jednoduché formě. Předpokládá v podstatě pouze znalost základů theorie funkcí komplexní proměnné a základy theorie Fredholmových integrálních rovnic.

Jest velkou škodou, že tato kniha jest u nás pouze v několika exemplářích, neboť ještě s dílem téhož autora „Někotorie osnovnye zadači matematičeskoj teorii uprugosti" jest základem moderní theorie matematické rovinné pružnosti.

Ivo Babuška, Praha.

П. С. Александров: Введение в общую теорию множеств и функций. (*P. S. Alexandrov*: **Úvod do obecné theorie množin a funkcí.**) OGIZ, Moskva-Leningrad 1948, str. 441, cena 8,5 r., tiráž 25 000 výtisků.

Kniha pojednává o matematické disciplině, která svým velkým vlivem na rozvoj matematiky v posledních padesáti letech si získala místo ve vyučování na universitách a vyšších pedagogických učilištích.

Kapitoly 1, 2, 4, 5 tvoří souvislý celek elementárnějšího rázu.

V 1. kapitole se čtenář dovídá o základních pojmech z theorie množin a nejjednodušších množinových operacích, o pojmu zobrazení, mohutnosti, uspořádání a spočetnosti množiny.

V 2. kapitole se zavádějí reálná čísla pomocí Dedekindových řezů a dokazuje se nespočetnost množiny reálných čísel. Tato kapitola je nutným základem ke kapitole 5, jejímž obsahem jsou důležitější vlastnosti reálných funkcí jedné reálné proměnné (spojitost, limita, chování funkce v bodech nespojitosti, některé věty o monotonních funkcích a funkcích s variací konečnou, věty o limitách funkčních posloupností, důležitá Weierstrassova věta o aproximaci spojité funkce pomocí Bernsteinových polynomů, věty o derivacích spojité funkce s uvedením van der Waerdenova příkladu spojité funkce nemající derivaci v žádném bodě).

Ve čtvrté kapitole autor seznamuje čtenáře s důležitými základními pojmy, týkajícími se množin na přímce a v rovině, jako jsou: otevřené, uzavřené, dokonalé, husté, řídké množiny, množiny typu F_σ a G_δ a množiny 1. a 2. kategorie.

Kapitola šestá přenáší pojmy ze 4. kapitoly do libovolných metrických prostorů a dále definuje souvislost a spočetnou basi prostoru.

Kapitola sedmá je věnována kompaktním a úplným prostorům. Po definici kompaktnosti jsou studována spojitá zobrazení kompaktů a je dokázáno, že každý kompaktní metrický prostor je spojitým obrazem Kantorova diskontinua. Další úvahy ukáží čtenáři, že každý metrický prostor lze doplnit na úplný prostor a každý metrický separabilní prostor lze vnořit do Hilbertova kvádru (Urysohnova věta).

V dodatcích ke kapitole šesté a sedmé jsou vyloženy základy obecné topologie a zobecněno mnoho vět platných pro metrické prostory. Na rozdíl od jiných autorů bikompaktním prostorem zde Alexandrov rozumí takový prostor, z jehož každého otevřeného pokrytí lze vybrat pokrytí konečné. V těchto dodatcích jsou také uvedeny Urysohnovy věty o metrisovatelnosti topologických prostorů a zaveden pojem topologického součinu, k němuž se váží Tichonovovy věty o topologickém součinu bikompaktních prostorů a o vnoření úplně regulárního prostoru charakteru τ do Tichonovova kvádru téhož charakteru.

Třetí kapitola je poněkud odlišného rázu než ostatní kapitoly. Na základě poznatků z první kapitoly přichází zde autor k pojmům uspořádané, a dobře uspořádané množiny, ordinálním a kardinálním číslům. Za předpokladu axiomu výběru, který je zde uveden v několika formulacích, je dokázána Zermelova věta o možnosti dobrého uspořádání libovolné množiny.

Kniha je pro svůj jasný methodický výklad vzornou učebnicí a velmi dobře se hodí k samostatnému studiu. Poněkud obtížnější je pouze studium §§ 6. a 7. kap. 3. a § 10. kap. 7. tištěných drobným tiskem. Její předností je množství příkladů, které umožňují pochopení probírané látky.

Referát vypracoval *kolektiv studentů matem. analysy* na Karlově universitě, kteří ve stud. roce 1950/51 samostatně prostudovali tuto knihu.

А. П. Барышников: Перспектива. (*A. P. Baryšnikov*: **Perspektiva.**) ISKUSSTVO, Moskva-Leningrad 1949, str. 132, cena 8,50 r.

Kniha je určena pro vysoké umělecké školy a obsahuje látku předepsanou osnovami pro přednášky o perspektivě na těchto školách. Neobrací se tudíž k posluchačům deskriptivní geometrie, nýbrž k budoucím architektům, malířům, grafikům a jiným umělcům. Proto se autor úmyslně snažil (jak sám v předmluvě zdůrazňuje) vyložiti látku co možná přístupně a srozumitelně bez velikých nároků na předběžné znalosti z geometrie; hlavní důraz klade na užití perspektivy v praxi různých uměleckých oborů. Přesto bude dobře, když se i naši deskriptiváři seznámí s obsahem této knížky.

Učebnice se nejprve stručně zmiňuje o základních zobrazovacích methodách deskriptivní geometrie důležitých pro umělce, t. j. o promítání Mongeově, o pravoúhlé a kosoúhlé axonometrii a jejích zvláštních případech. Potom autor vykládá — bez explicitního zavedení nevlastních prvků — základní zákony středového promítání, aniž by je přesně a soustavně vyvozoval. Těžiště knihy je ve výkladu různých konstrukcí a jejich úprav v běžné praxi architekta a malíře. Podrobně probírá autor průsečnou methodu a její použití při konstrukci perspektiv architektur, interiérů a detailů staveb (schody, římsy a pod.). Kromě perspektivy kružnice je v knize také vyložena konstrukce perspektivních obrazů rotačních těles; jejich zdánlivý obrys se zde sestrojuje jenom jako obalová čára obrazů kruhových řezů. Autor také probírá užití sítí v praxi architekta i malíře a podrobně rozebírá konstrukce stínů jednoduchých geometrických těles (hranoly, jehlany, válce, kužele a rotační tělesa), hlavně při rovnoběžném osvětlení; stručně se též zmiňuje o konstrukci zrcadelných obrazů předmětů zobrazených v perspektivním obraze. Jedna kapitola je věnována stručné historii perspektivy; je doplněna řadou reprodukcí známých obrazů starých italských mistrů i umělců ruských a sovětských. U jednotlivých obrazů analysuje autor jejich perspektivu (volba distance, hlavního bodu, výšky horizontu). Tím kniha značně připomíná naši krásnou knížku prof. Kadeřávka, vydanou v Praze r. 1922; neobsahuje však tolik zajímavých podrobností jako kniha Kadeřávkova. Poslední kapitoly knihy jsou věnovány perspektivě kreslířské, reliefní, divadelní a cylindrické. Dost podrobně vykládá autor konstrukci panoramat a dioramat.

Kniha obsahuje tedy značné množství látky a pěkně ukazuje užití deskriptivní geometrie v práci architektů, malířů a jiných umělců. Proto se jí může dobře užíti nejen na školách uměleckých, nýbrž i při vyučování deskriptivní geometrie na gymnasiích (ve IV. třídě) tím spíše, že výše zmíněná kniha prof. Kadeřávka je dávno rozebrána.
E. Kraemer, Praha.