Časopis pro pěstování matematiky, roč. 89 (1964), Praha

ОБ ОДНОМ НЕРАВЕНСТВЕ ДЛЯ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

ЯРОСЛАВ КУРЦВЕЙЛЬ (JAROSLAV KURZWEIL) Прага

(Поступило в редакцию 12/XII 1962)

На основе минимаксимальных соотношений для собственных чисел эрмитовых операторов приводится оценка собственных чисел одной задачи при помощи собственных чисел двух более простых задач. В частном случае эти задачи представляют поперечные колебания стержня и колебания струны.

1. Рассмотрим следующие задачи:

(1)
$$\int K(x, t)\, z(t)\, \mathrm{d}\nu(t) = \alpha y(x)\,,$$
$$\int K(x, t)\, y(t)\, \mathrm{d}\mu(t) = \alpha z(x)\,;$$

(2)
$$\int K(x, t)\, u(t)\, \mathrm{d}\mu(t) = \beta u(x)\,;$$

(3)
$$\int K(x, t)\, v(t)\, \mathrm{d}\nu(t) = \gamma v(x)\,.$$

Предполагается, что

(i) $\mu(\nu)$ — σ-конечная неотрицательная мера на σ-кольце S_1 (S_2) подмножеств некоторого множества X; если не назначена область интегрирования, то интегрирование производится по X (или $X \times X$);

(ii) положим $S_1 \cap S_2 = S_3$ и определим меру η на S_3 соотношением $\eta = \mu + \nu$; комплекснозначная функция $K(x, t)$ определена на $X \times X$, $S_3 \times S_3$ -измерима и
$$\iint |K^2|\, \mathrm{d}(\eta \times \eta) < \infty\,;$$

(iii) $K(x, t) = \overline{K}(t, x)$ и $\iint K(x, t)\, y(x)\, \bar{y}(t)\, \mathrm{d}(\eta \times \eta) \geqq 0$ для любой S_3-измеримой функции y, $\int |y|^2\, \mathrm{d}\eta < \infty$.

Разумеется, искомые решения задач (1), (2), (3) обладают тем свойством, что функции $y(t)$, $u(t)$ интегрируемы с квадратном по μ и функции $z(t)$, $v(t)$ — интегрируемы с квадратом по ν.

Как будет показано, задачи (1), (2), (3) сводятся к исследованию компактных эрмитовых операторов в пространствах Гильберта и, следовательно, для каждой из них существует больше всего счетное множество собственных чисел, и нуль является единственной возможной предельной точкой. Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ — все собственные числа задачи (1); α_i выписано s раз, если ему соответствует s-мерное собственное подпространство, и $|\alpha_1| \geqq |\alpha_2| \geqq |\alpha_3| \geqq \ldots$; пусть последовательность $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots$ $(\nu_1, \nu_2, \nu_3, \ldots)$ собственных чисел задачи (2), ((3)) обладает теми же свойствами. Все собственные значения будут действительными и $\beta_i \geqq 0$, $\gamma_i \geqq 0$, так как операторы, соответствующие задачам (2), (3), окажутся положительными. Если α — собственное число задачи (1) и $[y, z]$ — соответствующее решение, то и $-\alpha$ является собственным числом и $[y, -z]$ — соответствующее решение. Если α обладает s-мерным собственным пространством, то и $-\alpha$ обладает s-мерным собственным пространством. Главным результатом является следующая теорема:

Теорема.

$$\alpha_{2i-1}^2 \leqq \beta_i \gamma_i, \quad i = 1, 2, 3, \ldots . \tag{4}$$

Замечание 1. Если, например, $\beta_1 \geqq \beta_2 \geqq \ldots \geqq \beta_k > 0$ — все отличные от нуля собственные числа задачи (2), то задача (1) имеет больше всего $2k$ собственных чисел, отличных от нуля.

2. Пусть H — пространство Гильберта, A — компактный эрмитов оператор на H; как известно, существует последовательность собственных чисел λ_i и соответствующих ортонормированных собственных векторов w_i так, что имеет место

$$|\lambda_1| \geqq |\lambda_2| \geqq |\lambda_3| \geqq \ldots \tag{5}$$

$$Aw = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i (w, w_i)\, w_i \quad \text{для любого } w \in H, \tag{6}$$

$$|\lambda_1| = \sup |(Aw, w)|, \quad w \in H, \quad (w, w) = 1, \tag{7}$$

$$|\lambda_i| = \inf \zeta(q_1, \ldots, q_{i-1}), \quad q_1, \ldots, q_{i-1} \in H, \tag{8}$$

где

$$\zeta(q_1, \ldots, q_{i-1}) = \sup |(Aw, w)|, \quad w \in H,$$
$$(w, q_1) = \ldots = (w, q_{i-1}) = 0, \quad (w, w) = 1.$$

Каждое отличное от нуля собственное число оператора A входит в последовательность $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ и выписано в ней s раз, если ему соответствует s-мерное собственное подпространство.

Это известные факты из теории эрмитовых операторов (см. например, [2], VI). (8) является некоторым видоизменением второй теоремы из [2], VI, § 95.

3. Пусть $L^2_\mu(L^2_\nu, L^2_{\mu\times\nu}$ итд.) – множество функций, интегрируемых с квадратом по мере μ (ν, $\mu \times \nu$). При обычном определении скалярного произведения эти множества превращаются в пространства Гильберта (относительно полноты см. [3], II, § 2).

Обозначим через A_1 оператор, сопоставляющий паре $[y, z] \in L^2_\mu \times L^2_\nu$ пару

$$\left[\int K(x, t)\, z(t)\, \mathrm{d}\nu(t)\,, \quad \int K(x, t)\, y(t)\, \mathrm{d}\mu(t)\right],$$

через A_2 – оператор, отображающий $u \in L^2_\mu$ на $\int K(x, t)\, u(t)\, \mathrm{d}\mu(t)$, и через A_3 – оператор, отображающий $v \in L^2_\nu$ на $\int K(x, t)\, v(t)\, \mathrm{d}\nu(t)$. $A_1(A_2, A_3)$ – компактный (см. [2], IV, § 76) эрмитов оператор, отображающий пространство $L^2_\mu \times L^2_\nu(L^2_\mu, L^2_\nu)$ в себя. Задачи (1), (2), (3) эквиваленты задачам

$$A_1[x, z] = \alpha[y, z]\,, \quad A_2 u = \beta u\,, \quad A_3 v = \gamma v\,.$$

Пусть $[y_i, z_i] \in L^2_\mu \times L^2_\nu$, $u_i \in L^2$, $v_i \in L^2$, $i = 1, 2, \ldots, k$, и положим

(9) $$\zeta^k_1(y_1, z_1, \ldots, y_k, z_k) = \sup\,(A_1[y, z], [y, z]) = \\ = \sup 2\left|\,\mathrm{Re}\iint K(x, t)\, \bar{z}(x)\, y(t)\, \mathrm{d}(\nu \times \mu)\right|,$$

где $\int |y|^2\, \mathrm{d}\mu + \int |z|^2\, \mathrm{d}\nu = 1$, $\int y\bar{y}_i\, \mathrm{d}\mu + \int z\bar{z}_i\, \mathrm{d}\nu = 0$, $i = 1, 2, \ldots, k$,

(10) $$\zeta^2_k(u_1, \ldots, u_k) = \sup\,(A_2 u, u) = \sup \iint K(x, t)\, u(x)\, \bar{u}(t)\, \mathrm{d}(\mu \times \mu)\,,$$

где $\int u\bar{u}\, \mathrm{d}\mu = 1$, $\int u\bar{u}_i\, \mathrm{d}\mu = 0$, $i = 1, 2, \ldots, k$,

(11) $$\zeta^k_3(v_1, \ldots, v_k) = \sup\,(A_3 v, v) = \sup \iint K(x, t)\, \bar{v}(x)\, v(t)\, \mathrm{d}(\nu \times \nu)\,,$$

где $\int v\bar{v}\, \mathrm{d}\nu = 1$, $\int v\bar{v}_i\, \mathrm{d}\nu = 0$, $i = 1, 2, \ldots, k$.

Если $k = 0$, то определим ζ^0_1, ζ^0_2, ζ^0_3 формулами (9), (10), (11), но условия ортогональности отпадают. Как следует из теории эрмитовых операторов (см. (8))

(12) $$|\alpha_k| = \inf \zeta^{k-1}_1(y_1\,, \quad z_1, \ldots, y_{k-1}\,, \; z_{k-1})\,, \\ (y_i, z_i) \in L^2_\mu \times L^2_\nu\,, \quad i = 1, 2, \ldots, k-1)\,:$$

(13) $$|\beta_k| = \inf \zeta^{k-1}_2(u_1, \ldots, u_{k-1})\,, \quad u_i \in L^2_\mu\,, \quad i = 1, 2, \ldots, k-1\,;$$

(14) $$|\gamma_k| = \inf \zeta^{k-1}_3(v_1, \ldots, v_{k-1})\,, \quad v_i \in L^2_\nu\,, \quad i = 1, 2, \ldots, k-1\,, \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

4. Лемма. *Для любых* $y(t) \in L^2_\mu$, $z(t) \in L^2_\nu$ *имеет место*

$$(15)\qquad \left|\operatorname{Re}\iint K(x, t)\, \bar{z}(x)\, y(t)\, \mathrm{d}(\nu \times \mu)\right|^2 \leqq$$

$$\leqq \iint K(x, t)\, \bar{y}(x)\, y(t)\, \mathrm{d}(\mu \times \mu) \,.\, \iint K(x, t)\, \bar{z}(x)\, z(t)\, \mathrm{d}(\nu \times \nu)\,.$$

Доказательство. Пусть $\delta_1, \delta_2, \ldots$ и $q_1(t), q_2(t), \ldots$ — собственные числа и собственные функции задачи

$$(16)\qquad \int K(x, t)\, q(t)\, \mathrm{d}\eta(t) = \delta q(x)\,,$$

которые получатся по п. 2, если рассмотреть спектральное разложение компактного эрмитова оператора A_4, отображающего $q \in L^2_\eta$ на $\int K(x, t)\, q(t)\, \mathrm{d}\eta(t)$. Так как

$$\iint |K(x, t) - \sum_{i=1}^{k} \delta_i q_i(x)\, \bar{q}_i(t)|^2\, \mathrm{d}(\eta \times \eta) \geqq 0\,, \quad \text{то}$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \delta_i^2 \leqq \iint |K|^2\, \mathrm{d}(\eta \times \eta) < \infty \quad \text{и} \quad K(x, t) - \sum_{i=1}^{\infty} \delta_i q_i(x)\, \bar{q}_i(t) \in L^2_{\eta \times \eta}\,.$$

Но

$$(17)\qquad K(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \delta_i q_i(x)\, \bar{q}_i(t)\,,$$

для $(\eta \times \eta)$ почти всех (x, t), так как в противном случае уравнение (16), где K заменено $K(x, t) - \sum_{i=1}^{\infty} \delta_i q_1(x)\, \bar{q}_i(t)$, обладало бы нетривиальным решением, что противоречит (6). Из предположения (iii) следует, что $\delta_i \geqq 0$, $i = 1, 2, 3, \ldots$ Как легко убедиться, квадратичная форма действительныйх переменных σ, τ

$$\sigma^2 \iint \sum_{i=1}^{k} \delta_i q_i(x)\, \bar{q}_i(t)\, \bar{z}(x)\, z(t)\, \mathrm{d}(\nu \times \nu) +$$

$$+ 2\sigma\tau \operatorname{Re} \iint \sum_{i=1}^{k} \delta_i q_i(x)\, \bar{q}_i(t)\, \bar{z}(x)\, y(t)\, \mathrm{d}(\nu \times \mu) +$$

$$+ \tau^2 \iint \sum_{i=1}^{k} \delta_i q_i(x)\, \bar{q}_i(t)\, \bar{y}(x)\, y(t)\, \mathrm{d}(\mu \times \mu)$$

неотрицательна, и так как ряд в (17) сходится в $L^2_{\eta \times \eta}$, то и квадратичная форма

$$\sigma^2 \iint K(x, t)\, \bar{z}(x)\, z(t)\, \mathrm{d}(\nu \times \nu) + 2\sigma\tau \operatorname{Re} \iint K(x, t)\, \bar{z}(x)\, y(t)\, \mathrm{d}(\nu \times \mu) +$$

$$+ \tau^2 \iint K(x, t)\, \bar{y}(x)\, y(t)\, \mathrm{d}(\mu \times \mu)$$

неотрицательна, и лемма доказана.

Из (17) следует, что операторы A_2, A_3 положительны.

5. Как следует из (12)

$$|\alpha_{2k-1}| \leqq \operatorname{int} \zeta_1^{2k-2}(y_1, z_1, y_1, -z_1, \ldots, y_{k-1}, z_{k-1}, y_{k-1}, -z_{k-1}).$$

Из (15) и (9) следует что

$$[\zeta_1^{2k-2}(y_1, z_1, y_1, -z_1, \ldots, y_{k-1}, z_{k-1}, y_{k-1}, -z_{k-1})]^2 \leqq$$

$$\leqq \sup_{\varphi} \sup_{y,z} 4 \iint K(x, t)\, y(x)\, y(t)\, \mathrm{d}(\mu \times \mu) \,.\, \iint K(x, t)\, z(x)\, z(t)\, \mathrm{d}(\nu \times \nu),$$

где

$$\int |y|^2 \,\mathrm{d}\mu = \cos^2 \varphi\,, \quad \int y y_i \,\mathrm{d}\mu = 0\,, \quad \int |z|^2 \,\mathrm{d}\nu = \sin^2 \varphi\,, \quad \int z z_i \,\mathrm{d}\nu = 0\,,$$

$$i = 1, 2, \ldots, k-1, \ 0 \leqq \varphi \leqq \tfrac{1}{2}\pi\,.$$

Так как $\sup \cos^2 \varphi \,.\, \sin^2 \varphi = \frac{1}{4}$ то из (10) и (11) следует, что

$$(\zeta_1^{2k-2}(y_1, z_1, y_1, -z_1, \ldots, y_{k-1} z_{k-1}, y_{k-1}, -z_{k-1}))^2 \leqq$$

$$\leqq \zeta_2^{k-1}(y_1, \ldots, y_{k-1}) \,.\, \zeta_3^{k-1}(z_1, \ldots, z_{k-1}),$$

что в месте с (13) и (14) доказывает (4).

Замечание 2. Если $\mu = \nu$, то $|\alpha_{2i-1}| = |\alpha_{2i}| = \beta_i = \gamma_i$, $i = 1, 2, 3, \ldots$.

6. В [4] доказано неравенство (5) для частного случая $X = \langle 0, 1 \rangle$, $K(x, t) = x(1 - t)$ для $x \leqq t$, $K(x, t) = t(1 - x)$ для $x \geqq t$, $i = 1$. В этом случае задача (1) представляет поперечные колебания стержня со свободно опертыми концами и задачи (2) и (3) представляют колебания струны с закрепленными концами.

Литература

[1] *P. Halmos*: Measure theory. New York 1950 (русский перевод Изд. инностр. лит., Москва 1953).

[2] *F. Riesz, B. Sz.-Nagy*: Leçons d'analyse fonctionnelle. Akademiai kiado, Budapest 1952 (русский перевод Изд. инностр. лит., Москва 1954).

[3] *M. Day*: Normed linear spaces. Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1958 (русский перевод Изд. инностр. лит., Москва 1961).

[4] *Л. Янош:* Вывод одного неравенства для первых собственных значений двух краевых задач. Чехосл. матем. журнал *10* (*85*) 1960, 1, 68—82.

Výtah

O JEDNÉ NEROVNOSTI PRO VLASTNÍ ČÍSLA INTEGRÁLNÍCH ROVNIC

JAROSLAV KURZWEIL, Praha

Pomocí vlastností typu „minimax" pro vlastní čísla hermitovských operátorů je dokázána nerovnost (4) pro vlastní čísla úloh (1), (2), (3). Ve speciálním případě úloha (1) popisuje příčné kmity prostého nosníku a úlohy (2) a (3) popisují kmity struny.

Summary

AN INEQUALITY FOR EIGENVALUES OF INTEGRAL EQUATIONS

JAROSLAV KURZWEIL, Praha

Inequality (4) is proved for the eigenvalues of the problems (1), (2), (3) by means of the properties of the minimax type of the hermittian operators. In a special case problem (1) describes transverse vibrations of a freely supported beam and problems (2) and (3) describe vibrations of a string.